Teorema de Gauss

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

26 de mayo de 2011

teorema de Gauss

teorema de Gauss

- $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo C^1

teorema de Gauss

teorema de Gauss

- $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo C^1
- S superficie cerrada tal que $\mathrm{int}(S) \cup S \subset \Omega$

teorema de Gauss

teorema de Gauss

- $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo C^1
- S superficie cerrada tal que $\mathrm{int}(S) \cup S \subset \Omega$
- $\Rightarrow$
$$\iint_S \vec{X}.N\,dS = \iiint_{\mathrm{int}(S)} \mathrm{div}\,\vec{X}\,dx\,dy\,dz$$

interpretación física de la divergencia

interpretación de la divergencia

div $\vec{X}(p) =$ flujo en p x unidad de volumen

interpretación física de la divergencia

- p punto cualquiera $\vec{X}$ campo diferenciable cerca de p

interpretación física de la divergencia

- p punto cualquiera $\vec{X}$ campo diferenciable cerca de p
- Gauss: $\iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\, dS = \iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV$

interpretación física de la divergencia

- p punto cualquiera $\vec{X}$ campo diferenciable cerca de p
- Gauss: $\iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\,dS = \iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div}\vec{X}\,dV$
- TVM: $\iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div}\vec{X}\,dV = \operatorname{div}\vec{X}(q)\operatorname{vol}(B_\varepsilon(p))$

interpretación física de la divergencia

- p punto cualquiera $\vec{X}$ campo diferenciable cerca de p
- Gauss: $\iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\,dS = \iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div}\vec{X}\,dV$
- TVM: $\iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div}\vec{X}\,dV = \operatorname{div}\vec{X}(q)\,\operatorname{vol}(B_\varepsilon(p))$
- juntando: $\operatorname{div}\vec{X}(q) = \frac{1}{\operatorname{vol} B_\varepsilon(p)} \iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\,dS$

interpretación física de la divergencia

- p punto cualquiera $\vec{X}$ campo diferenciable cerca de p
- Gauss: $\iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\,dS = \iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div} \vec{X}\,dV$
- TVM: $\iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div} \vec{X}\,dV = \operatorname{div} \vec{X}(q)\operatorname{vol}(B_\varepsilon(p))$
- juntando: $\operatorname{div} \vec{X}(q) = \frac{1}{\operatorname{vol} B_\varepsilon(p)} \iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\,dS$
- pasando al límite:

interpretación física de la divergencia

- p punto cualquiera $\vec{X}$ campo diferenciable cerca de p
- Gauss: $\iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\, dS = \iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV$
- TVM: $\iiint_{B_\varepsilon(p)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV = \operatorname{div} \vec{X}(q) \operatorname{vol}(B_\varepsilon(p))$
- juntando: $\operatorname{div} \vec{X}(q) = \frac{1}{\operatorname{vol} B_\varepsilon(p)} \iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\, dS$
- pasando al límite:

$$\operatorname{div} \vec{X}(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol} B_\varepsilon(p)} \iint_{\partial B_\varepsilon(p)} \vec{X}.N\, dS$$

interpretación física de la divergencia

- $\operatorname{div} \vec{X}(p) > 0 \Rightarrow p$ fuente

interpretación física de la divergencia

- $\operatorname{div} \vec{X}(p) > 0 \Rightarrow p$ fuente
- flujo de $\vec{X}$ se aleja de p

interpretación física de la divergencia

- $\operatorname{div} \vec{X}(p) > 0 \Rightarrow p$ fuente
- flujo de $\vec{X}$ se aleja de p

interpretación física de la divergencia

- $\operatorname{div} \vec{X}(p) > 0 \Rightarrow p$ fuente
- flujo de $\vec{X}$ se aleja de p

- $\operatorname{div} \vec{X}(p) < 0 \Rightarrow p$ pozo

interpretación física de la divergencia

- $\operatorname{div} \vec{X}(p) > 0 \Rightarrow p$ fuente
- flujo de $\vec{X}$ se aleja de p

- $\operatorname{div} \vec{X}(p) < 0 \Rightarrow p$ pozo
- flujo de $\vec{X}$ se acerca a p

interpretación física de la divergencia

- si $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ campo sin divergencia

interpretación física de la divergencia

- si div $\vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ campo sin divergencia
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\, dS = 0 \; \forall S$ superficie cerrada

interpretación física de la divergencia

- si div $\vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \to$ campo sin divergencia
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\,dS = 0$ $\forall S$ superficie cerrada
- $\Leftarrow$ también vale

interpretación física de la divergencia

- si div $\vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ campo sin divergencia
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\, dS = 0$ $\forall S$ superficie cerrada
- $\Leftarrow$ también vale
- la cantidad de fluído que entra en cualquier superficie

interpretación física de la divergencia

- si div $\vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \to$ campo sin divergencia
- $\Rightarrow \int\int_S \vec{X}.N\, dS = 0\ \forall S$ superficie cerrada
- $\Leftarrow$ también vale
- la cantidad de fluído que entra en cualquier superficie
- es igual a la que sale

interpretación física de la divergencia

- si div $\vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ campo sin divergencia
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\, dS = 0\ \forall S$ superficie cerrada
- $\Leftarrow$ también vale
- la cantidad de fluído que entra en cualquier superficie
- es igual a la que sale
- fluído incompresible

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\vec{X} = (3x + y + z, x^2 + 2y + e^z, e^{x^2} + y^2 + 4z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\vec{X} = (3x + y + z, x^2 + 2y + e^z, e^{x^2} + y^2 + 4z)$
- S tetraedro de vértices

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\vec{X} = (3x + y + z, x^2 + 2y + e^z, e^{x^2} + y^2 + 4z)$
- S tetraedro de vértices
- $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\vec{X} = (3x + y + z, x^2 + 2y + e^z, e^{x^2} + y^2 + 4z)$
- S tetraedro de vértices
- $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$
- calcular $\int\int_S \vec{X}.N\, dS$

ejemplo 1

- Gauss: $\iint_S \vec{X}.N\, dS = \iiint_{\text{int}\, S} \operatorname{div} \vec{X}\, dV$

ejemplo 1

- Gauss: $\iint_S \vec{X}.N\,dS = \iiint_{\text{int}\,S} \operatorname{div}\vec{X}\,dV$
- $\operatorname{div}\vec{X} = (3x+y+z)_x + (x^2+2y+e^z)_y + (e^{x^2}+y^2+4z)_z$

ejemplo 1

- Gauss: $\iint_S \vec{X}.N\,dS = \iiint_{\text{int}\,S} \text{div}\,\vec{X}\,dV$
- $\text{div}\,\vec{X} = (3x + y + z)_x + (x^2 + 2y + e^z)_y + (e^{x^2} + y^2 + 4z)_z$
- $\text{div}\,\vec{X} = 3 + 2 + 4 = 9$

ejemplo 1

- Gauss: $\iint_S \vec{X}.N\, dS = \iiint_{\text{int}\, S} \operatorname{div} \vec{X}\, dV$
- $\operatorname{div} \vec{X} = (3x + y + z)_x + (x^2 + 2y + e^z)_y + (e^{x^2} + y^2 + 4z)_z$
- $\operatorname{div} \vec{X} = 3 + 2 + 4 = 9$
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\, dS = 9.\, \text{vol}(\text{int}\, S)$

ejemplo 1

- Gauss: $\iint_S \vec{X}.N\,dS = \iiint_{\text{int}\,S} \operatorname{div}\vec{X}\,dV$
- $\operatorname{div}\vec{X} = (3x+y+z)_x + (x^2+2y+e^z)_y + (e^{x^2}+y^2+4z)_z$
- $\operatorname{div}\vec{X} = 3+2+4 = 9$
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\,dS = 9.\,\text{vol}(\text{int}\,S)$
- $\iint_S \vec{X}.N\,dS = \frac{3}{2} > 0$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\vec{X} = (2x + y, -y + z, -z)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\vec{X} = (2x + y, -y + z, -z)$
- S subconjunto del elipsoide $2x^2 + 8y^2 + z^2 = 1$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\vec{X} = (2x + y, -y + z, -z)$
- S subconjunto del elipsoide $2x^2 + 8y^2 + z^2 = 1$
- tal que $z < \frac{1}{2}$,

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\vec{X} = (2x + y, -y + z, -z)$
- S subconjunto del elipsoide $2x^2 + 8y^2 + z^2 = 1$
- tal que $z < \frac{1}{2}$,
- con $N(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0).(1, 0, 0) > 0$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\vec{X} = (2x + y, -y + z, -z)$
- S subconjunto del elipsoide $2x^2 + 8y^2 + z^2 = 1$
- tal que $z < \frac{1}{2}$,
- con $N(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0).(1, 0, 0) > 0$
- calcular $\iint_S \vec{X}.N\, dS$

ejemplo 2

- observemos que S no es cerrada

ejemplo 2

- observemos que S no es cerrada
- para aplicar Gauss, hay que cerrar la superficie

ejemplo 2

- observemos que S no es cerrada
- para aplicar Gauss, hay que cerrar la superficie
- por ejemplo con una tapa $T \subset \{z = \frac{1}{2}\}$

ejemplo 2

- observemos que S no es cerrada
- para aplicar Gauss, hay que cerrar la superficie
- por ejemplo con una tapa $T \subset \{z = \frac{1}{2}\}$
- $\Rightarrow \iint_{S \cup T} \vec{X}.N\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{X}\, dV$

ejemplo 2

- observemos que S no es cerrada
- para aplicar Gauss, hay que cerrar la superficie
- por ejemplo con una tapa $T \subset \{z = \frac{1}{2}\}$
- $\Rightarrow \iint_{S \cup T} \vec{X}.N\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{X}\, dV$
- $\operatorname{div} \vec{X} = 2 - 1 - 1 = 0$

ejemplo 2

- observemos que S no es cerrada
- para aplicar Gauss, hay que cerrar la superficie
- por ejemplo con una tapa $T \subset \{z = \frac{1}{2}\}$
- $\Rightarrow \iint_{S \cup T} \vec{X}.N\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{X}\, dV$
- $\operatorname{div} \vec{X} = 2 - 1 - 1 = 0$
- $\Rightarrow \iint_S \vec{X}.N\, dS = -\iint_T \vec{X}.N\, dS$

ejemplo 2

- parametricemos T

ejemplo 2

- parametricemos T
- $T = \{2x^2 + 8y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{z = \frac{1}{2}\}$

ejemplo 2

- parametricemos T
- $T = \{2x^2 + 8y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{z = \frac{1}{2}\}$
- $T = \{2x^2 + 8^2 \leq \frac{3}{4},\, z = \frac{1}{2}\}$

ejemplo 2

- parametricemos T
- $T = \{2x^2 + 8y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{z = \frac{1}{2}\}$
- $T = \{2x^2 + 8^2 \leq \frac{3}{4},\ z = \frac{1}{2}\}$
- $T = \{\frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}y^2 \leq 1,\ z = \frac{1}{2}\}$

ejemplo 2

- parametricemos T
- $T = \{2x^2 + 8y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{z = \frac{1}{2}\}$
- $T = \{2x^2 + 8^2 \leq \frac{3}{4},\ z = \frac{1}{2}\}$
- $T = \{\frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}y^2 \leq 1,\ z = \frac{1}{2}\}$
- $\begin{cases} x = r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\cos\theta \\ y = r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}\sin\theta \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ con $r \in (0,1),\ \theta \in (0, 2\pi)$

ejemplo 2

- $N \equiv (0, 0, 1)$

ejemplo 2

- $N \equiv (0,0,1)$
- $\int\int_T \vec{X}.N\,dS =$

ejemplo 2

- $N \equiv (0,0,1)$
- $\int\int_T \vec{X}.N\, dS =$
- $= -\int_T z\, dS$

ejemplo 2

- $N \equiv (0,0,1)$
- $\int\int_T \vec{X}.N\, dS =$
- $= -\int_T z\, dS$
- $= -\frac{1}{2}.A(T)$

ejemplo 2

- calculemos $A(T)$

ejemplo 2

- calculemos $A(T)$
- $\Phi_r = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}\sin\theta, 0)$

ejemplo 2

- calculemos $A(T)$
- $\Phi_r = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}} \sin\theta, 0)$
- $\Phi_\theta = (-r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cos\theta, r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}} \cos\theta, 0)$

ejemplo 2

- calculemos $A(T)$
- $\Phi_r = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}\sin\theta, 0)$
- $\Phi_\theta = (-r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\cos\theta, r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}\cos\theta, 0)$
- $\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}\sin\theta & 0 \\ -r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\sin\theta & r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}}\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$

ejemplo 2

- calculemos $A(T)$
- $\Phi_r = (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}} \sin\theta, 0)$
- $\Phi_\theta = (-r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cos\theta, r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}} \cos\theta, 0)$
- $\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}} \sin\theta & 0 \\ -r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \sin\theta & r\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{32}} \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$
- $\Phi_r \wedge \Phi_\theta = (0, 0, \frac{3}{16} r)$

ejemplo 2

- $A(T) = \iint_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$

ejemplo 2

- $A(T) = \iint_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$
- $A(T) = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$

ejemplo 2

- $A(T) = \iint_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$
- $A(T) = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$
- $A(T) = \frac{3}{16}\pi r^2|_0^1$

ejemplo 2

- $A(T) = \int\int_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$
- $A(T) = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$
- $A(T) = \frac{3}{16} \pi r^2 |_0^1$
- $A(T) = \frac{3}{16} \pi$

ejemplo 2

- $A(T) = \int\int_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$
- $A(T) = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$
- $A(T) = \frac{3}{16}\pi r^2|_0^1$
- $A(T) = \frac{3}{16}\pi$
- $\int\int_T \vec{X}.N\, dS = -\frac{1}{2}A(T)$

ejemplo 2

- $A(T) = \int\int_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$
- $A(T) = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$
- $A(T) = \frac{3}{16} \pi r^2 |_0^1$
- $A(T) = \frac{3}{16} \pi$
- $\int\int_T \vec{X}.N\, dS = -\frac{1}{2} A(T) = -\frac{3}{32} \pi$

ejemplo 2

- $A(T) = \int\int_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$
- $A(T) = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$
- $A(T) = \frac{3}{16} \pi r^2|_0^1$
- $A(T) = \frac{3}{16}\pi$
- $\int\int_T \vec{X}.N\, dS = -\frac{1}{2}A(T) = -\frac{3}{32}\pi$
- $\int\int_S \vec{X}.N\, dS = -\int\int_T \vec{X}.N\, dS$

ejemplo 2

- $A(T) = \int\int_D \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr\, d\theta$
- $A(T) = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\, dr$
- $A(T) = \frac{3}{16} \pi r^2 |_0^1$
- $A(T) = \frac{3}{16} \pi$
- $\int\int_T \vec{X}.N\, dS = -\frac{1}{2} A(T) = -\frac{3}{32}\pi$
- $\int\int_S \vec{X}.N\, dS = -\int\int_T \vec{X}.N\, dS = \frac{3}{32}\pi$

ejemplo *

observación importante

si $\vec{X}$ no es C^1 en todo el interior de S, entonces el teorema de Gauss no se cumple

ejemplo *

ejemplo *

- $\vec{X} = -c\frac{\vec{r}}{r^3}$ campo gravitacional

ejemplo *

ejemplo *

- $\vec{X} = -c\frac{\vec{r}}{r^3}$ campo gravitacional
- $\partial B_\varepsilon(0)$ esfera que encierra el origen

ejemplo *

ejemplo *

- $\vec{X} = -c\frac{\vec{r}}{r^3}$ campo gravitacional
- $\partial B_\varepsilon(0)$ esfera que encierra el origen
- $\Rightarrow$
$$\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{X}.N\,dS \neq \iiint_{B_\varepsilon(0)} \operatorname{div}\vec{X}\,dV$$

ejemplo *

- div $\vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

ejemplo *

- $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- $\Rightarrow \iiint_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV = 0$

ejemplo *

- $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- $\Rightarrow \iiint_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV = 0$
- por otro lado:

ejemplo *

- $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- $\Rightarrow \iiint_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)} \operatorname{div} \vec{X} \, dV = 0$
- por otro lado:
- $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{X}.N \, dS = -c \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{\vec{r}}{r} \, dS$

ejemplo *

- $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- $\Rightarrow \iiint_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV = 0$
- por otro lado:
- $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{X}.N\, dS = -c \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{\vec{r}}{r}\, dS$
- $= -c \iint_S \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS$

ejemplo *

- $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- $\Rightarrow \iiint_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV = 0$
- por otro lado:
- $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{X}.N\, dS = -c \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{\vec{r}}{r}\, dS$
- $= -c \iint_S \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS$
- $= -\frac{c}{\varepsilon^2} A(\partial B_\varepsilon(0))$

ejemplo *

- $\operatorname{div} \vec{X} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$
- $\Rightarrow \iiint_{\mathcal{B}_\varepsilon(0)} \operatorname{div} \vec{X}\, dV = 0$
- por otro lado:
- $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{X}.N\, dS = -c \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{\vec{r}}{r}\, dS$
- $= -c \iint_S \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS$
- $= -\frac{c}{\varepsilon^2} A(\partial B_\varepsilon(0))$
- $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{X}.N\, dS = -4c\pi \neq 0$