Vector velocidad, versor tangente y longitud

Jana Rodriguez Hertz[1]
Cálculo 3

IMERL

3 de marzo de 2011

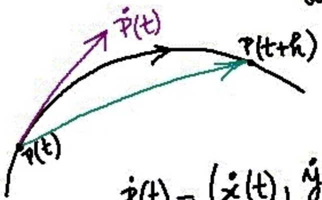
[1] Sobre notas de Eleonora Catsigeras

VECTOR VELOCIDAD

$$P = P(t): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I \qquad \text{Curva de clase } C^1$$

$h \neq 0 \quad h = \Delta t$

vector cuerda $\quad P(t+h) - P(t)$



DEF. Vector velocidad, si $\exists$ es

$$\dot P(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h}$$

$$\dot P(t) = \left(\dot x(t), \dot y(t), \dot z(t)\right)$$

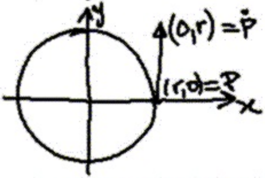
$$\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

OBS Si $\exists$ vector velocidad y es no nulo, entonces es tangente a la curva con sentido que indica la orientación para t creciente

versor tangente

Ej: $x = r\cos t$, $y = r \,\mathrm{sen}\, t$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$\dot{p}(t) = (-r\,\mathrm{sen}\, t, r\cos t)$; en $t=0$ $\quad P = (r,0)$, $\quad \dot{p} = (0,r)$



<u>DEF</u> Versor tangente $\vec{t}$

versor tangente a la curva (si existe) con sentido que indica la orientación de la curva

<u>OBS</u> Si $\exists\, \dot{p}(t)$ y es $\neq \vec{0}$, entonces $\boxed{\vec{t} = \dfrac{\dot{p}(t)}{\|\dot{p}(t)\|}}$

<u>OBS</u> $\vec{t}$ es <u>INTRÍNSECO A</u> LA CURVA

punto regular y singular

DEFINICIONES

Punto regular: Si $\exists$ versor tangente en ese punto

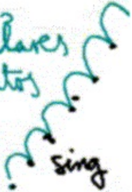
($\exists$ alguna parametrización $P(t)$ tal que $\dot{P}(t)$ $\exists$ y es $\neq \vec{0}$ en ese punto)

Punto singular: no es regular

Curva regular: Todos sus puntos son regulares.

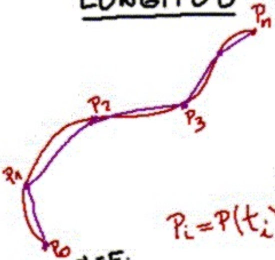
Curva regular a trozos: Todos sus puntos son regulares excepto en subconjunto discreto S de sus puntos

S discreto si ($S \cap$ subconj. acotado) es finito

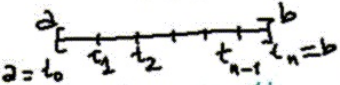


longitud

LONGITUD



$$P = P(t): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$



$P_i = P(t_i)$

$$\Delta t = \max_{1 \leq i \leq n} (t_{i-1} - t_1)$$

DEF.

Si $\exists \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \| P_i - P_{i-1} \|$ y es finito la curva es "rectificable" y ese límite es la "longitud" L de la curva

L es INTRÍNSECA a la CURVA

fórmula de la longitud

CÁLCULO de la LONGITUD. $\mathcal{C}$ de clase C^1

$$L = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \| P_i - P_{i-1} \| = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}}$$

donde

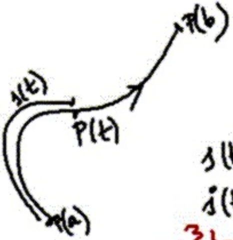
$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\alpha_i)\,(t_i - t_{i-1}) \\ \Delta y_i &= \qquad\qquad\qquad\quad = \dot{y}(\beta_i)\,(t_i - t_{i-1}) \\ \Delta z_i &= \qquad\qquad\qquad\quad = \dot{z}(\gamma_i)\,(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$L = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \int_a^b \|\dot{P}(t)\|\,dt}$$

longitud de arco - ejemplo

ABSCISA CURVILINEA O LONG. DE ARCO



$$s(t) = \int_a^t \|\dot{P}(t)\|\, dt = \int_a^t \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\, dt$$

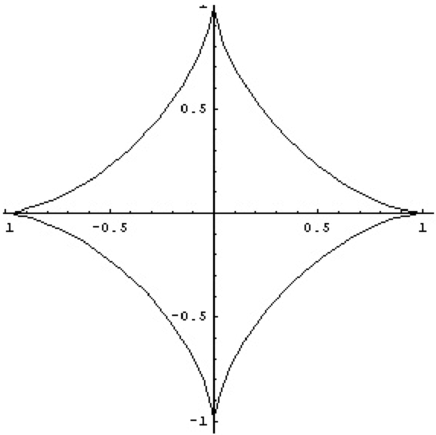
$s(t) \uparrow$ cont **INVERTIBLE**

$$\dot{s}(t) = \|\dot{P}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

Ej: ASTROIDE $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ $\quad \|\dot{P}(t)\| = 3|\cos t \operatorname{sen} t|$

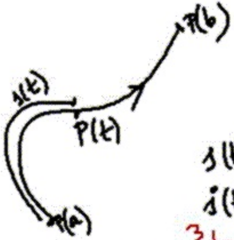
$$L = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \operatorname{sen} t|\, dt = 4\cdot 3\int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{sen} t\, dt = 6$$

astroide



longitud de arco - ejemplo

ABSCISA CURVILINEA o LONG. DE ARCO



$$s(t)=\int_a^t \|\dot{P}(t)\|\,dt=\int_a^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$$

$s(t)\uparrow$ cont INVERTIBLE

$$\dot{s}(t)=\|\dot{P}(t)\|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$

Ej: ASTROIDE $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ $\quad 0\leq t\leq 2\pi \quad \|\dot{P}(t)\|=3|\cos t\,\operatorname{sen} t|$

$$s(t)=\int_0^t 3|\cos t\,\operatorname{sen} t|\,dt \begin{cases} t\leq\frac{\pi}{2} & \frac{3\operatorname{sen}^2 t}{2} \qquad t=\pi/2 \quad s\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2} \\ \frac{\pi}{2}<t\leq\pi & \end{cases}$$

$$s(t)=\frac{3}{2}-\int_{\pi/2}^t 3\cos t\,\operatorname{sen} t\,dt=3-\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 t$$

astroide - de dónde viene