

2-formas diferenciales

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

7 de junio de 2011

2-formas básicas

2-forma básica $dx dy$

- la 2-forma básica $dx dy$

2-formas básicas

2-forma básica $dx dy$

- la 2-forma básica $dx dy$
- se define como:

2-formas básicas

2-forma básica $dx dy$

- la 2-forma básica $dx dy$
- se define como:
-

$$dx dy = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du dv$$

2-formas básicas

2-forma básica $dydz$

- la 2-forma básica $dydz$

2-formas básicas

2-forma básica $dydz$

- la 2-forma básica $dydz$
- se define como:

2-formas básicas

2-forma básica $dydz$

- la 2-forma básica $dydz$
- se define como:
-

$$dydz = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} dudv$$

2-formas básicas

2-forma básica $dzdx$

- la 2-forma básica $dzdx$

2-formas básicas

2-forma básica $dzdx$

- la 2-forma básica $dzdx$
- se define como:

2-formas básicas

2-forma básica $dzdx$

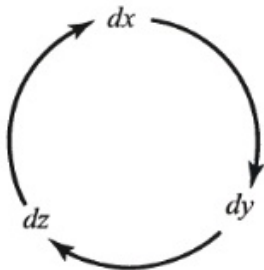
- la 2-forma básica $dzdx$
- se define como:
-

$$dzdx = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} dudv$$

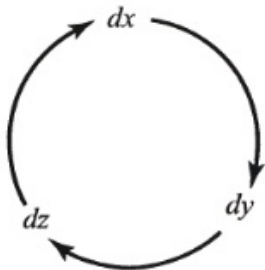
observación

observación

las 2-formas básicas se definen cíclicamente:



las 2-formas básicas se definen cíclicamente:

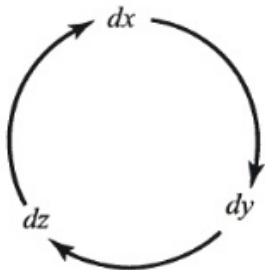


- *dydz*

observación

observación

las 2-formas básicas se definen cíclicamente:



- $dx dy$
- $dy dz$
- $dz dx$

2-formas

2-forma

- una 2-forma diferencial

2-formas

2-forma

- una 2-forma diferencial
- es una combinación lineal de 2-formas básicas

2-formas

2-forma

- una 2-forma diferencial
- es una combinación lineal de 2-formas básicas
-

$$\omega = a(x, y, z)dx dy + b(x, y, z)dy dz + c(x, y, z)dz dx$$

integral de una 2-forma

integral de una 2-forma

- S superficie parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

integral de una 2-forma

integral de una 2-forma

- S superficie parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$
- con una orientación $N = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$

integral de una 2-forma

integral de una 2-forma

- S superficie parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$
- con una orientación $N = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$
- ω una 2-forma

integral de una 2-forma

integral de una 2-forma

- S superficie parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$
- con una orientación $N = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$
- ω una 2-forma
- integral de ω sobre S

integral de una 2-forma

integral de una 2-forma

- S superficie parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$
- con una orientación $N = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$
- ω una 2-forma
- integral de ω sobre S
-

$$\iint_S \omega = \iint_D a \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} du dv$$

observación

observación

si se cambia la orientación de S , cambia el signo de $\iint_S \omega$

proposición

proposición

proposición

- $\iint_S dx dy = \iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS$

proposición

proposición

- $\iint_S dx dy = \iint_S (0, 0, 1) \cdot N dS$
- $\iint_S dy dz = \iint_S (0, 1, 0) \cdot N dS$

proposición

proposición

proposición

- $\iint_S dx dy = \iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS$
- $\iint_S dy dz = \iint_S (0, 1, 0) \cdot N \, dS$
- $\iint_S dz dx = \iint_S (1, 0, 0) \cdot N \, dS$

- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

demostración

- por definición:

- $\iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS = \iint_D (0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v \, dudv$

demostración

- por definición:
- $\iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS = \iint_D (0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v \, du \, dv$
- $(0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$

demostración

- por definición:
- $\iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS = \iint_D (0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v \, dudv$
- $(0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$
- $(0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$

demostración

- por definición:
- $\iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS = \iint_D (0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v \, dudv$
- $(0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$
- $(0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$
- $\iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS = \iint_D \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \, dudv$

demostración

- por definición:
- $\iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS = \iint_D (0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v \, dudv$
- $(0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$
- $(0, 0, 1) \cdot \Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$
- $\iint_S (0, 0, 1) \cdot N \, dS = \iint_D \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \, dudv = \iint_S dx dy$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

● $\omega = z^2 dx dy$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $\omega = z^2 dx dy$
- S hemisferio superior de la esfera unitaria

ejemplo

ejemplo

- $\omega = z^2 dx dy$
- S hemisferio superior de la esfera unitaria
- orientado con normal N tal que $N.(x, y, z) > 0$

ejemplo

ejemplo

- $\omega = z^2 dx dy$
- S hemisferio superior de la esfera unitaria
- orientado con normal N tal que $N.(x, y, z) > 0$
- calcular $\iint_S \omega$

ejemplo

ejemplo

procedimiento:

1 parametrizamos S

ejemplo

procedimiento:

- 1 parametrizamos S
- 2 controlamos orientación N

ejemplo

procedimiento:

- 1 parametrizamos S
- 2 controlamos orientación N
- 3 calculamos $\iint_S \omega$

ejemplo

- parametrización de S :

ejemplo

- parametrización de S :

- $$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases} \quad u \in (0, \pi/2), v \in (0, 2\pi)$$

ejemplo

- parametrización de S :

- $$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases} \quad u \in (0, \pi/2), v \in (0, 2\pi)$$

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

ejemplo

- parametrización de S :

- $$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases} \quad u \in (0, \pi/2), v \in (0, 2\pi)$$

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} & i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

ejemplo

ejemplo

- parametrización de S :

- $$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases} \quad u \in (0, \pi/2), v \in (0, 2\pi)$$

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} & i & j & k \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

- $$\Rightarrow N.(x, y, z) > 0$$

ejemplo

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$

ejemplo

ejemplo

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
- $\iint_S z^2 \, dx dy = \iint_D \cos^2 u \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du dv$

ejemplo

ejemplo

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
- $\iint_S z^2 \, dx \, dy = \iint_D \cos^2 u \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du \, dv$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix}$

ejemplo

ejemplo

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
- $\iint_S z^2 \, dx \, dy = \iint_D \cos^2 u \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du \, dv$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \cos u \sin u$

ejemplo

ejemplo

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
- $\iint_S z^2 \, dx \, dy = \iint_D \cos^2 u \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du \, dv$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \cos u \sin u$
- $\iint_S z^2 \, dx \, dy = \iint_D \cos^3 u \sin u \, du \, dv$

ejemplo

ejemplo

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
- $\iint_S z^2 dx dy = \iint_D \cos^2 u \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du dv$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \cos u \sin u$
- $\iint_S z^2 dx dy = \iint_D \cos^3 u \sin u du dv$
- $\iint_S z^2 dx dy = \int_0^{2\pi} dv \cdot \left(-\frac{\cos^4 u}{4} \right)_0^{\pi/2}$

ejemplo

ejemplo

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
- $\iint_S z^2 dx dy = \iint_D \cos^2 u \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} du dv$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \cos u \sin u$
- $\iint_S z^2 dx dy = \iint_D \cos^3 u \sin u du dv$
- $\iint_S z^2 dx dy = \int_0^{2\pi} dv \cdot \left(-\frac{\cos^4 u}{4} \right)_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$

volumen encerrado por una superficie

teorema

teorema

- V sólido encerrado por una superficie cerrada S

volumen encerrado por una superficie

teorema

teorema

- V sólido encerrado por una superficie cerrada S
- S orientada con normal saliente

volumen encerrado por una superficie

teorema

teorema

- V sólido encerrado por una superficie cerrada S
- S orientada con normal saliente
- entonces

$$\text{vol}(V) = \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S y dz dx = \iint_S (0, y, 0) \cdot N dS$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S y dz dx = \iint_S (0, y, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S z dx dy = \iint_S (0, 0, z) \cdot N dS$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S y dz dx = \iint_S (0, y, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S z dx dy = \iint_S (0, 0, z) \cdot N dS$
- $\Rightarrow \iint_S dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_S (x, y, z) \cdot N dS$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S y dz dx = \iint_S (0, y, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S z dx dy = \iint_S (0, 0, z) \cdot N dS$
- $\Rightarrow \iint_S dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_S (x, y, z) \cdot N dS$
- por Gauss: $\iint_S (x, y, z) \cdot N dS = \iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dV$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S y dz dx = \iint_S (0, y, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S z dx dy = \iint_S (0, 0, z) \cdot N dS$
- $\Rightarrow \iint_S dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_S (x, y, z) \cdot N dS$
- por Gauss: $\iint_S (x, y, z) \cdot N dS = \iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dV$
- $\iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dV = 3 \iiint_V dV$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S y dz dx = \iint_S (0, y, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S z dx dy = \iint_S (0, 0, z) \cdot N dS$
- $\Rightarrow \iint_S dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_S (x, y, z) \cdot N dS$
- por Gauss: $\iint_S (x, y, z) \cdot N dS = \iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dV$
- $\iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dV = 3 \iiint_V dV = 3 \operatorname{vol}(V)$

volumen encerrado por una superficie

demostración

- $\iint_S x dy dz = \iint_S (x, 0, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S y dz dx = \iint_S (0, y, 0) \cdot N dS$
- $\iint_S z dx dy = \iint_S (0, 0, z) \cdot N dS$
- $\Rightarrow \iint_S dy dz + y dz dx + z dx dy = \iint_S (x, y, z) \cdot N dS$
- por Gauss: $\iint_S (x, y, z) \cdot N dS = \iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dV$
- $\iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dV = 3 \iiint_V dV = 3 \operatorname{vol}(V)$
- $\Rightarrow \operatorname{vol}(V) = \frac{1}{3} \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$

ejercicio

ejercicio

- demostrar que:

ejercicio

ejercicio

- demostrar que:
- $\text{vol}(V) = \iint_S x dy dz$

ejercicio

ejercicio

- demostrar que:
- $\text{vol}(V) = \iint_S x dy dz$
- $\text{vol}(V) = \iint_S y dz dx$

ejercicio

ejercicio

- demostrar que:
- $\text{vol}(V) = \iint_S x dy dz$
- $\text{vol}(V) = \iint_S y dz dx$
- $\text{vol}(V) = \iint_S z dx dy$

ejemplo

ejemplo

ejemplocalcular el volumen encerrado por la esfera de radio r

ejemplo

- parametrización de la esfera

ejemplo

- parametrización de la esfera
- $$\begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$$

ejemplo

- parametrización de la esfera
- $$\begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$$
- $\text{vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot N \, dS$

ejemplo

- parametrización de la esfera
- $$\begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$$
- $\text{vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot N \, dS$
- $(x, y, z) \cdot N = \frac{r^2}{r}$

ejemplo

- parametrización de la esfera
- $$\begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$$
- $\text{vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot N \, dS$
- $(x, y, z) \cdot N = \frac{r^2}{r} = r$

ejemplo

- parametrización de la esfera

- $$\begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$$

- $\text{vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot N \, dS$

- $(x, y, z) \cdot N = \frac{r^2}{r} = r$

- $\text{vol}(B) = \frac{r}{3} \iint_S dS$

ejemplo

- parametrización de la esfera

- $$\begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$$

- $\text{vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot N \, dS$

- $(x, y, z) \cdot N = \frac{r^2}{r} = r$

- $\text{vol}(B) = \frac{r}{3} \iint_S dS = \frac{r}{3} \text{area(esfera)}$

ejemplo

ejemplo

- parametrización de la esfera

$$\bullet \begin{cases} x = r \cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi), v \in (0, \pi)$$

- $\text{vol}(B) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot N \, dS$

- $(x, y, z) \cdot N = \frac{r^2}{r} = r$

- $\text{vol}(B) = \frac{r}{3} \iint_S dS = \frac{r}{3} \text{area(esfera)}$

- $\text{vol}(B) = \frac{4}{3} \pi r^3$