producto exterior y derivada de 1-formas

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

9 de junio de 2011

introducción

campo asociado a una 2-forma

- $\omega = a dy dz + b dz dx + c dx dy$

introducción

campo asociado a una 2-forma

- $\omega = adydz + bdzdx + cdxdy$
- campo asociado a la 2-forma ω:

introducción

campo asociado a una 2-forma

- $\omega = adydz + bdzdx + cdxdy$
- campo asociado a la 2-forma ω:
- $$\vec{Y} = (a, b, c)$$

observación

prestar atención al orden en que aparecen las 2-formas básicas!!

recordar

recordar que el campo vectorial asociado a una uno forma

$$L = Adx + Bdy + Cdz$$

recordar

recordar que el campo vectorial asociado a una uno forma

$$L = Adx + Bdy + Cdz$$

es

$$\vec{X} = (A, B, C)$$

producto exterior de 1-formas

producto exterior de 1-formas

- L_1 1-forma asociada al campo $X_1 = (A_1, B_1, C_1)$

producto exterior de 1-formas

producto exterior de 1-formas

- L_1 1-forma asociada al campo $X_1 = (A_1, B_1, C_1)$
- L_2 1-forma asociada al campo $X_2 = (A_2, B_2, C_2)$

producto exterior de 1-formas

producto exterior de 1-formas

- L_1 1-forma asociada al campo $X_1 = (A_1, B_1, C_1)$
- L_2 1-forma asociada al campo $X_2 = (A_2, B_2, C_2)$
- el producto exterior de L_1 y L_2, $L_1 \wedge L_2$

producto exterior de 1-formas

producto exterior de 1-formas

- L_1 1-forma asociada al campo $X_1 = (A_1, B_1, C_1)$
- L_2 1-forma asociada al campo $X_2 = (A_2, B_2, C_2)$
- el producto exterior de L_1 y L_2, $L_1 \wedge L_2$
- es la 2-forma asociada al campo $X_1 \wedge X_2$

producto exterior de 1-formas

producto exterior de 1-formas

$$L_1 \wedge L_2$$

producto exterior de 1-formas

producto exterior de 1-formas

$$L_1 \wedge L_2 = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

propiedades

propiedades

1. $dx \wedge dx = 0$

propiedades

propiedades

1. $dx \wedge dx = 0$
2. $dy \wedge dy = 0$

propiedades

propiedades

1. $dx \wedge dx = 0$
2. $dy \wedge dy = 0$
3. $dz \wedge dz = 0$

demostración

ejercicio

propiedades

anticonmutatividad

- $dydx = -dxdy$

propiedades

anticonmutatividad

- $dydx = -dxdy$
- $dxdz = -dzdx$

propiedades

anticonmutatividad

- $dydx = -dxdy$
- $dxdz = -dzdx$
- $dzdy = -dydz$

propiedades

anticonmutatividad

- $dydx = -dxdy$
- $dxdz = -dzdx$
- $dzdy = -dydz$
- en general $L_1 \wedge L_2 = -L_2 \wedge L_1$

propiedades

integral del producto exterior de 1-formas

- L_1 1-forma asociada a X_1

propiedades

integral del producto exterior de 1-formas

- L_1 1-forma asociada a X_1
- L_2 1-forma asociada a X_2

propiedades

integral del producto exterior de 1-formas

- L_1 1-forma asociada a X_1
- L_2 1-forma asociada a X_2
- la integral de $L_1 \wedge L_2$:

$$\iint_S L_1 \wedge L_2 = \iint_S (X_1 \wedge X_2).N\, dS$$

demostración

ejercicio

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\omega_1 = a_1 dydz + b_1 dzdx + c_1 dxdy$

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\omega_1 = a_1 dydz + b_1 dzdx + c_1 dxdy$
- $\omega_2 = a_2 dydz + b_2 dzdx + c_2 dxdy$

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\omega_1 = a_1 dydz + b_1 dzdx + c_1 dxdy$
- $\omega_2 = a_2 dydz + b_2 dzdx + c_2 dxdy$
- suma de ω_1 y ω_2

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\omega_1 = a_1 dydz + b_1 dzdx + c_1 dxdy$
- $\omega_2 = a_2 dydz + b_2 dzdx + c_2 dxdy$
- suma de ω_1 y ω_2
- $$\omega_1 + \omega_2 = (a_1 + a_2)dydz + (b_1 + b_2)dzdx + (c_1 + c_2)dxdy$$

propiedad distributiva

propiedad distributiva

- L_1, L_2, L_3 1-formas

propiedad distributiva

propiedad distributiva

- L_1, L_2, L_3 1-formas
- $$(L_1 + L_2) \wedge L_3 = (L_1 \wedge L_3) + (L_2 \wedge L_3)$$

propiedad distributiva

propiedad distributiva

- L_1, L_2, L_3 1-formas
- $$(L_1 + L_2) \wedge L_3 = (L_1 \wedge L_3) + (L_2 \wedge L_3)$$
- $$L_1 \wedge (L_2 + L_3) = (L_1 \wedge L_2) + (L_1 \wedge L_3)$$

ejemplo 1

producto exterior de 1-formas básicas

- $dx \wedge dy = dxdy$

ejemplo 1

producto exterior de 1-formas básicas

- $dx \wedge dy = dxdy$
- $dy \wedge dz = dydz$

ejemplo 1

producto exterior de 1-formas básicas

- $dx \wedge dy = dxdy$
- $dy \wedge dz = dydz$
- $dz \wedge dx = dzdx$

ejemplo 1

- $dx \wedge dy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

ejemplo 1

- $dx \wedge dy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = dxdy$

ejemplo 1

- $dx \wedge dy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = dxdy$
- $dy \wedge dz = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

ejemplo 1

- $dx \wedge dy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = dxdy$
- $dy \wedge dz = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = dydz$

ejemplo 1

- $dx \wedge dy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = dxdy$
- $dy \wedge dz = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = dydz$
- $dz \wedge dx = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

ejemplo 1

- $dx \wedge dy = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = dxdy$
- $dy \wedge dz = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = dydz$
- $dz \wedge dx = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = dzdx$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $L = xdx + ydy$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $L = xdx + ydy$
- $H = zydx + xzdy + xydz$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $L = xdx + ydy$
- $H = zydx + xzdy + xydz$
- calcular $L \wedge H$

ejemplo 2

- aplicando propiedad distributiva:

ejemplo 2

- aplicando propiedad distributiva:
- $L \wedge H = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$

ejemplo 2

- aplicando propiedad distributiva:
- $L \wedge H = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$
- $= (xyzdx \wedge dx) + (x^2 zdx \wedge dy) + (x^2 ydx \wedge dz) +$
  $+ (y^2 zdy \wedge dx) + (xyzdy \wedge dy) + (xy^2 dy \wedge dz)$

ejemplo 2

- aplicando propiedad distributiva:
- $L \wedge H = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$
- $= (xyzdx \wedge dx) + (x^2zdx \wedge dy) + (x^2ydx \wedge dz) +$
  $+(y^2zdy \wedge dx) + (xyzdy \wedge dy) + (xy^2dy \wedge dz)$
- $= 0 + x^2zdxdy - x^2ydzdx - y^2zdxdy + 0 + xy^2dydz$

ejemplo 2

- aplicando propiedad distributiva:
- $L \wedge H = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$
- $= (xyzdx \wedge dx) + (x^2 zdx \wedge dy) + (x^2 ydx \wedge dz) +$
  $+ (y^2 zdy \wedge dx) + (xyzdy \wedge dy) + (xy^2 dy \wedge dz)$
- $= 0 + x^2 zdxdy - x^2 ydzdx - y^2 zdxdy + 0 + xy^2 dydz$
- $L \wedge H = xy^2 dydz - x^2 ydzdx + (x^2 - y^2) zdxdy$

0-formas

0-forma

- una 0-forma diferencial

0-formas

0-forma

- una 0-forma diferencial
- es una función C^1

0-formas

0-forma

- una 0-forma diferencial
- es una función C^1
- $$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

derivada exterior de 0-formas

derivada exterior de 0-formas

- f 0-forma

derivada exterior de 0-formas

derivada exterior de 0-formas

- f 0-forma
- derivada exterior de f

derivada exterior de 0-formas

derivada exterior de 0-formas

- f 0-forma
- derivada exterior de f
- es la 1-forma:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

derivada exterior de 0-formas

observación

- f 0-forma

derivada exterior de 0-formas

observación

- f 0-forma
- campo vectorial asociado a la 1-forma df:

derivada exterior de 0-formas

observación

- f 0-forma
- campo vectorial asociado a la 1-forma df:
- ∇f

derivada exterior de 1-formas

derivada exterior de 1-formas

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ 1-forma

derivada exterior de 1-formas

derivada exterior de 1-formas

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ 1-forma
- la derivada exterior de L es la 2-forma:

derivada exterior de 1-formas

derivada exterior de 1-formas

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ 1-forma
- la derivada exterior de L es la 2-forma:
- $$dL = dAdx + dBdy + dCdz$$

proposición

proposición

el campo asociado a la 2-forma dL es el rotor del campo asociado a la 1-forma L

demostración

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ asociado a $X = (A, B, C)$

demostración

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ asociado a $X = (A, B, C)$
- $dL = dAdx + dBdy + dCdz$

demostración

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ asociado a $X = (A, B, C)$
- $dL = dAdx + dBdy + dCdz$
- $dL = (A_x dx + A_y dy + A_z dz)dx + (B_x dx + B_y dy + B_z dz)dy + $
  $+(C_x dx + C_y dy + C_z dz)dz$

demostración

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ asociado a $X = (A, B, C)$
- $dL = dAdx + dBdy + dCdz$
- $dL = (A_x dx + A_y dy + A_z dz)dx + (B_x dx + B_y dy + B_z dz)dy + +(C_x dx + C_y dy + C_z dz)dz$
- $dL = -A_y dxdy + A_z dzdx + B_x dxdy - B_z dydz - C_x dzdx + C_y dydz$

demostración

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ asociado a $X = (A, B, C)$
- $dL = dAdx + dBdy + dCdz$
- $dL = (A_x dx + A_y dy + A_z dz)dx + (B_x dx + B_y dy + B_z dz)dy +$ $+(C_x dx + C_y dy + C_z dz)dz$
- $dL =$ $-A_y dxdy + A_z dzdx + B_x dxdy - B_z dydz - C_x dzdx + C_y dydz$
- $dL = (C_y - B_z)dydz + (A_z - C_x)dzdx + (B_x - A_y)dxdy$

demostración

- $L = Adx + Bdy + Cdz$ asociado a $X = (A, B, C)$
- $dL = dAdx + dBdy + dCdz$
- $dL = (A_x dx + A_y dy + A_z dz)dx + (B_x dx + B_y dy + B_z dz)dy + $ $+ (C_x dx + C_y dy + C_z dz)dz$
- $dL =$ $-A_y dxdy + A_z dzdx + B_x dxdy - B_z dydz - C_x dzdx + C_y dydz$
- $dL = (C_y - B_z)dydz + (A_z - C_x)dzdx + (B_x - A_y)dxdy$
- $\Rightarrow dL$ asociado a rot X

proposición

proposición

- f función C^2

proposición

proposición

- f función C^2
- $\Rightarrow$

$$d(df) = 0$$

demostración

- por proposición anterior

demostración

- por proposición anterior
- el campo vectorial asociado a la 2-forma $d(df)$

demostración

- por proposición anterior
- el campo vectorial asociado a la 2-forma $d(df)$
- es el rotor del campo vectorial asociado a la 1-forma df

demostración

- por proposición anterior
- el campo vectorial asociado a la 2-forma $d(df)$
- es el rotor del campo vectorial asociado a la 1-forma df
- pero el campo asociado a df es ∇f

demostración

- por proposición anterior
- el campo vectorial asociado a la 2-forma $d(df)$
- es el rotor del campo vectorial asociado a la 1-forma df
- pero el campo asociado a df es ∇f
- $\Rightarrow$ campo asociado a $d(df)$ es

demostración

- por proposición anterior
- el campo vectorial asociado a la 2-forma $d(df)$
- es el rotor del campo vectorial asociado a la 1-forma df
- pero el campo asociado a df es ∇f
- $\Rightarrow$ campo asociado a $d(df)$ es
- $\text{rot}(\nabla f) \equiv \vec{0}$

demostración

- por proposición anterior
- el campo vectorial asociado a la 2-forma $d(df)$
- es el rotor del campo vectorial asociado a la 1-forma df
- pero el campo asociado a df es ∇f
- $\Rightarrow$ campo asociado a $d(df)$ es
- $\mathrm{rot}(\nabla f) \equiv \vec{0}$ $\surd$

ejemplo 3

ejemplo 3

- calcular la derivada exterior de la 1-forma:

ejemplo 3

ejemplo 3

- calcular la derivada exterior de la 1-forma:
- $$L = xdx + ydy + zdz$$

ejemplo 3

- $L = xdx + ydy + zdz$

ejemplo 3

- $L = xdx + ydy + zdz$
- campo asociado a L es $X = (x, y, z)$

ejemplo 3

- $L = xdx + ydy + zdz$
- campo asociado a L es $X = (x, y, z)$
- calculamos rot X

ejemplo 3

- $L = xdx + ydy + zdz$
- campo asociado a L es $X = (x, y, z)$
- calculamos rot X
- rot $X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$

ejemplo 3

- $L = xdx + ydy + zdz$
- campo asociado a L es $X = (x, y, z)$
- calculamos rot X
- rot $X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$
- $\Rightarrow dL = 0$

otra forma de verlo

- otra forma de calcular dL

otra forma de verlo

- otra forma de calcular dL
- $X = (A, B, C)$ campo asociado a L

otra forma de verlo

- otra forma de calcular dL
- $X = (A, B, C)$ campo asociado a L
- $\Rightarrow dL = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{vmatrix}$

ejemplo 4

ejemplo 4

- calcular dL

ejemplo 4

ejemplo 4

- calcular dL
- si $L = -yzdx + xydy + yzdz$

ejemplo 4

- $L = -yzdx + xydy + yzdz$

ejemplo 4

- $L = -yzdx + xydy + yzdz$
- $dL = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -yz & xy & yz \end{vmatrix}$

ejemplo 4

- $L = -yzdx + xydy + yzdz$
- $dL = \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -yz & xy & yz \end{vmatrix}$
- $dL = zdydz - ydzdx + (y - z)dxdy$