3-formas diferenciales

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

21 de junio de 2011

3-formas básicas

3-forma básica $dxdydz$

- la 3-forma básica $dxdydz$

3-formas básicas

3-forma básica *dxdydz*

- la 3-forma básica *dxdydz*
- se define como:

3-formas básicas

3-forma básica *dxdydz*

- la 3-forma básica *dxdydz*
- se define como:
- $$dxdydz = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} dudvdw$$

3-formas básicas

3-forma básica $dydzdx$

- la 3-forma básica $dydzdx$

3-formas básicas

3-forma básica $dydzdx$

- la 3-forma básica $dydzdx$
- se define como:

3-formas básicas

3-forma básica *dydzdx*

- la 3-forma básica *dydzdx*
- se define como:
- $$dydzdx = \begin{vmatrix} y_u & z_u & x_u \\ y_v & z_v & x_v \\ y_w & z_w & x_w \end{vmatrix} dudvdw$$

3-formas básicas

3-forma básica *dydzdx*

- la 3-forma básica *dydzdx*
- se define como:
- $$dydzdx = \begin{vmatrix} y_u & z_u & x_u \\ y_v & z_v & x_v \\ y_w & z_w & x_w \end{vmatrix} dudvdw = dxdydz$$

3-formas básicas

3-formas básicas

las otras 3-formas básicas se definen análogamente

propiedad de las 3-formas básicas

propiedad de las 3-formas básicas

tenemos

propiedad de las 3-formas básicas

propiedad de las 3-formas básicas

tenemos

- $dxdydz = dydzdx = dzdxdy$

propiedad de las 3-formas básicas

propiedad de las 3-formas básicas

tenemos

- $dxdydz = dydzdx = dzdxdy$
- $dxdydz = -dydxdz$

propiedad de las 3-formas básicas

propiedad de las 3-formas básicas

tenemos

- $dxdydz = dydzdx = dzdxdy$
- $dxdydz = -dydxdz$
- $dydxdz = dxdzdy = dzdydx$

propiedad de las 3-formas básicas

propiedad de las 3-formas básicas

tenemos

- $dxdydz = dydzdx = dzdxdy$
- $dxdydz = -dydxdz$
- $dydxdz = dxdzdy = dzdydx$
- $dxdxdz = 0$

propiedad de las 3-formas básicas

propiedad de las 3-formas básicas

tenemos

- $dxdydz = dydzdx = dzdxdy$
- $dxdydz = -dydxdz$
- $dydxdz = dxdzdy = dzdydx$
- $dxdxdz = 0$
- $dydydz = 0$

propiedad de las 3-formas básicas

propiedad de las 3-formas básicas

tenemos

- $dxdydz = dydzdx = dzdxdy$
- $dxdydz = -dydxdz$
- $dydxdz = dxdzdy = dzdydx$
- $dxdxdz = 0$
- $dydydz = 0$
- etc

3-formas diferenciales

3-forma diferencial

3-formas diferenciales

3-forma diferencial

- dada una función $\alpha : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

3-formas diferenciales

3-forma diferencial

- dada una función $\alpha : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
- llamamos 3-forma diferencial a

3-formas diferenciales

3-forma diferencial

- dada una función $\alpha : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
- llamamos 3-forma diferencial a
-
$$\alpha(x, y, z)dxdydz$$

suma de 3-formas diferenciales

suma de 3-formas diferenciales

suma de 3-formas diferenciales

suma de 3-formas diferenciales

- dadas las 3-formas $\alpha_1 \, dxdydz$

suma de 3-formas diferenciales

suma de 3-formas diferenciales

- dadas las 3-formas $\alpha_1 dxdydz$
- y $\alpha_2 dxdydz$

suma de 3-formas diferenciales

suma de 3-formas diferenciales

- dadas las 3-formas $\alpha_1 dxdydz$
- y $\alpha_2 dxdydz$
- se define la suma de las 3-formas como

suma de 3-formas diferenciales

suma de 3-formas diferenciales

- dadas las 3-formas $\alpha_1 dxdydz$
- y $\alpha_2 dxdydz$
- se define la suma de las 3-formas como
- $$(\alpha_1 + \alpha_2)dxdydz$$

integral de una 3-forma

integral de una 3-forma diferencial

integral de una 3-forma

integral de una 3-forma diferencial

- la integral de la 3-forma

integral de una 3-forma

integral de una 3-forma diferencial

- la integral de la 3-forma
- $\alpha(x, y, z)dxdydz$

integral de una 3-forma

integral de una 3-forma diferencial

- la integral de la 3-forma
- $\alpha(x, y, z)dxdydz$
- se define como

integral de una 3-forma

integral de una 3-forma diferencial

- la integral de la 3-forma
- $\alpha(x, y, z)dxdydz$
- se define como
- $$\iiint_\Omega \alpha(x, y, z)dxdydz = \iiint_D \alpha \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} dudvdw$$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

el producto exterior de 1-formas básicas con 2-formas básicas se define así

- $dx \wedge (dydz) = dxdydz$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

el producto exterior de 1-formas básicas con 2-formas básicas se define así

- $dx \wedge (dydz) = dxdydz$
- $dx \wedge (dzdx) = 0$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

el producto exterior de 1-formas básicas con 2-formas básicas se define así

- $dx \wedge (dydz) = dxdydz$
- $dx \wedge (dzdx) = 0$
- $dx \wedge (dxdy) = 0$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

el producto exterior de 1-formas básicas con 2-formas básicas se define así

- $dx \wedge (dydz) = dxdydz$
- $dx \wedge (dzdx) = 0$
- $dx \wedge (dxdy) = 0$
- $dy \wedge (dxdy) = 0$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

el producto exterior de 1-formas básicas con 2-formas básicas se define así

- $dx \wedge (dydz) = dxdydz$
- $dx \wedge (dzdx) = 0$
- $dx \wedge (dxdy) = 0$
- $dy \wedge (dxdy) = 0$
- $dy \wedge (dydz) = 0$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

el producto exterior de 1-formas básicas con 2-formas básicas se define así

- $dx \wedge (dydz) = dxdydz$
- $dx \wedge (dzdx) = 0$
- $dx \wedge (dxdy) = 0$
- $dy \wedge (dxdy) = 0$
- $dy \wedge (dydz) = 0$
- $dy \wedge (dzdx) = dxdydz$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

el producto exterior de 1-formas básicas con 2-formas básicas se define así

- $dx \wedge (dydz) = dxdydz$
- $dx \wedge (dzdx) = 0$
- $dx \wedge (dxdy) = 0$
- $dy \wedge (dxdy) = 0$
- $dy \wedge (dydz) = 0$
- $dy \wedge (dzdx) = dxdydz$
- etc

producto exterior de 1-formas con 2-formas

producto exterior

producto exterior de 1-formas con 2-formas

producto exterior

- en general, el producto de las formas

producto exterior de 1-formas con 2-formas

producto exterior

- en general, el producto de las formas
- $L = Adx + Bdy + Cdz$ y

producto exterior de 1-formas con 2-formas

producto exterior

- en general, el producto de las formas
- $L = Adx + Bdy + Cdz$ y
- $\omega = adydz + bdzdx + cdxdy$

producto exterior de 1-formas con 2-formas

producto exterior

- en general, el producto de las formas
- $L = Adx + Bdy + Cdz$ y
- $\omega = adydz + bdzdx + cdxdy$
- es

$$L \wedge \omega = (Aa + Bb + Cc)dxdydz$$

producto exterior de 2-formas con 1-formas

producto exterior

producto exterior de 2-formas con 1-formas

producto exterior

- análogamente, el producto exterior de las formas

producto exterior de 2-formas con 1-formas

producto exterior

- análogamente, el producto exterior de las formas
- $\omega = adydz + bdzdx + cdxdy$ y

producto exterior de 2-formas con 1-formas

producto exterior

- análogamente, el producto exterior de las formas
- $\omega = adydz + bdzdx + cdxdy$ y
- $L = Adx + Bdy + Cdz$

producto exterior de 2-formas con 1-formas

producto exterior

- análogamente, el producto exterior de las formas
- $\omega = adydz + bdzdx + cdxdy$ y
- $L = Adx + Bdy + Cdz$
- es

$$\omega \wedge L = (Aa + Bb + Cc)dxdydz$$

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

- $\omega = xdx + ydy$

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$
- $\omega \wedge \eta =$
  $(xdx + ydy) \wedge zydx + (xdx + ydy) \wedge xzdy + (xdx + ydy) \wedge xydz$

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge zydx + (xdx + ydy) \wedge xzdy + (xdx + ydy) \wedge xydz$
- $\omega \wedge \eta = xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz)$

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge zydx + (xdx + ydy) \wedge xzdy + (xdx + ydy) \wedge xydz$
- $\omega \wedge \eta = xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz)$
- $\omega \wedge \eta = (x^2z - y^2z)dxdy - x^2ydzdx + xy^2dydz$

ejemplo 1

producto exterior de dos 1-formas

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$
- $\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge zydx + (xdx + ydy) \wedge xzdy + (xdx + ydy) \wedge xydz$
- $\omega \wedge \eta = xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz)$
- $\omega \wedge \eta = (x^2z - y^2z)dxdy - x^2ydzdx + xy^2dydz$
- $\omega \wedge \eta = xy^2dydz - x^2ydzdx + (x^2z - y^2z)dxdy$

ejemplo 2

producto exterior de 1-forma y 2-forma

ejemplo 2

producto exterior de 1-forma y 2-forma

- $\omega = xdx - ydy$

ejemplo 2

producto exterior de 1-forma y 2-forma

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$

ejemplo 2

producto exterior de 1-forma y 2-forma

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$
- $\omega \wedge \eta = (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdxdy)$

ejemplo 2

producto exterior de 1-forma y 2-forma

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$
- $\omega \wedge \eta = (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdxdy)$
- $\omega \wedge \eta =$ $x^2(dx \wedge dydz) - xy(dy \wedge dydz) + xz(dx \wedge dxdy) - yz(dy \wedge dxdy)$

ejemplo 2

producto exterior de 1-forma y 2-forma

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$
- $\omega \wedge \eta = (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdxdy)$
- $\omega \wedge \eta =$ $x^2(dx \wedge dydz) - xy(dy \wedge dydz) + xz(dx \wedge dxdy) - yz(dy \wedge dxdy)$
- $\omega \wedge \eta = x^2 dxdydz$

derivada exterior de 2-formas

derivada exterior de 2-formas

derivada exterior de 2-formas

derivada exterior de 2-formas

- si $\eta = Adydz + Bdzdx + Cdxdy$,

derivada exterior de 2-formas

derivada exterior de 2-formas

- si $\eta = Adydz + Bdzdx + Cdxdy$,
- la derivada exterior de la 2-forma η

derivada exterior de 2-formas

derivada exterior de 2-formas

- si $\eta = Adydz + Bdzdx + Cdxdy$,
- la derivada exterior de la 2-forma η
- se define como

$$d\eta = (A_x + B_y + C_z)dxdydz$$

derivada de 2-formas básicas

derivada de 2-formas básicas

derivada de 2-formas básicas

derivada de 2-formas básicas

- $d(dydz) = 0$

derivada de 2-formas básicas

derivada de 2-formas básicas

- $d(dydz) = 0$
- $d(dzdx) = 0$

derivada de 2-formas básicas

derivada de 2-formas básicas

- $d(dydz) = 0$
- $d(dzdx) = 0$
- $d(dxdy) = 0$

derivada de la suma

derivada de la suma

derivada de la suma

derivada de la suma

- η_1 y η_2 2-formas

derivada de la suma

derivada de la suma

- η_1 y η_2 2-formas
- $$d(\eta_1 + \eta_2) = d\eta_1 + d\eta_2$$

teorema de Stokes

teorema de Stokes

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- ω 1-forma definida sobre $\Omega \supset S$

teorema de Stokes

teorema de Stokes

- ω 1-forma definida sobre $\Omega \supset S$
- $$\int_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega$$

teorema de Gauss

teorema de Gauss

teorema de Gauss

teorema de Gauss

- η 2-forma definida sobre $\Omega \supset \overline{W} = \partial W \cup \operatorname{int} W$

teorema de Gauss

teorema de Gauss

- η 2-forma definida sobre $\Omega \supset \overline{W} = \partial W \cup \operatorname{int} W$
- $$\iint_{\partial W} \eta = \iiint_{W} d\eta$$