

Area encerrada por curva cerrada simple

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

15 de marzo de 2011

1

¹Sobre notas de Eleonora Catsigeras

curva cerrada simple

CURVAS CERRADAS SIMPLES

$P: P(t) \quad a \leq t \leq b$ DEF. ES CERRADA si $P(a) = P(b)$

Ejemplo Curva de Lissajous $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin t \end{cases}$

DEF Una curva cerrada simple

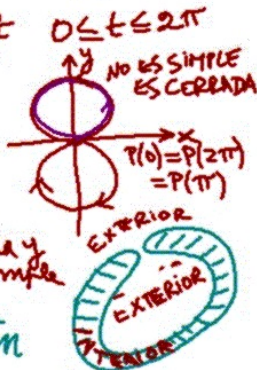
si $t \in (a, b) \mapsto P(t)$ es INYECTIVA
y además $P(t) \neq P(a) = P(b) \quad \forall t \in (a, b)$

Ejemplo

$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$ es cerrada y simple

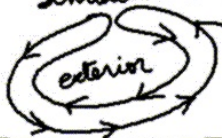
TEOREMA de JORDAN

Una curva plana
cerrada simple separa al plano en
DOS componentes CONEXAS
UNA ACOTADA LLAMADA INTERIOR
OTRA. NO " " " EXTERIOR



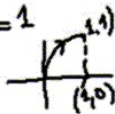
ejemplo

Def. Una curva plana cerrada simple está orientada en sentido antihorario si deja al interior a la izquierda.
Sentido horario: opuesto al antihorario



$x = x(t)$
 $y = y(t)$ es C^1 a trozos $a \leq t \leq b$ Ejemplo en $0 \leq t \leq 2$

$$\begin{aligned} t \in [0, 1] \quad x &= t \quad y = \sqrt{1 - (t-1)^2} \\ 0 \leq x \leq 1 \quad x \uparrow \quad y^2 + (x-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

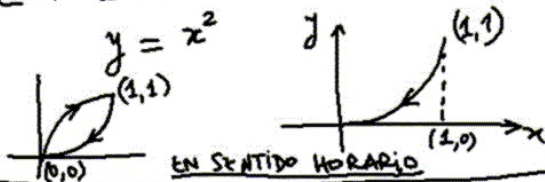


$$x(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ 2-t, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - (t-1)^2}, & t \in [0, 1] \\ (2-t)^2, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

ejemplo

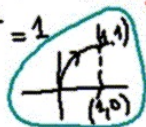
$$t \in [1, 2] \quad 1 \geq x \geq 0 \quad x \downarrow \text{cont } t$$



$x = x(t)$
 $y = y(t)$ es C^1 a trozos $a \leq t \leq b$ Ejemplo en $0 \leq t \leq 2$

$$t \in [0, 1] \quad x = t \quad y = \sqrt{1 - (t-1)^2}$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad x \uparrow \quad y^2 + (x-1)^2 = 1$$



$$x(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1] \\ 2-t, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - (t-1)^2}, & t \in [0, 1] \\ (2-t)^2, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

CÁLCULO DE ÁREAS

Teorema $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$

C^1 a trozos
plana, cerrada
Simple
orientada en sentido
antihorario para $t \uparrow$

Entonces el área del interior
es

$$0 \leq A = \int_a^b -y \dot{x} dt = \int_a^b x \dot{y} dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

Dem. Veremos más adelante como corolario del
Teor. de Gauss

observación - no dep. de parametrización

CAMBIO DE PARÁMETROS

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

$$\begin{cases} x = X(T) \\ y = Y(T) \end{cases} \quad c \leq T \leq d$$

DOS PARAMETRIZACIONES
DE LA MISMA CURVA
ORIENTADAS en = SENS.
TIDO

Suponemos que $\exists$

$$\begin{aligned} T &= T(t) & T(a) &= c \\ & & T(b) &= d \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x(t) &= X(T(t)) \quad \checkmark \\ y(t) &= Y(T(t)) \quad \checkmark \end{aligned}$$

TEOR.

$$\int_a^b x(t) \dot{y}(t) dt =$$

$$\int_c^d X(T) \dot{Y}(T) dT$$

Dem.

$T \equiv T(t)$
 $X(T(t)) = x(t)$

$$\dot{Y}(T) dT = \underbrace{\dot{Y}(T(t))}_{y'(t)} \underbrace{\dot{T}(t) dt}_{dt}$$

observación - no dep. de parametrización

CAMBIO DE PARÁMETROS

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

$$\begin{cases} x = X(T) \\ y = Y(T) \end{cases} \quad c \leq T \leq d$$

TEOR.

$$\int_a^b y(t) \dot{x}(t) dt = \int_c^d Y(T) \dot{X}(T) dT$$

DOS PARAMETRIZACIONES
DE LA MISMA CURVA
ORIENTADAS en = SENS.
TIDO

Suponemos que $\exists$

$$T = T(t)$$

$$T(a) = c$$

$$T(b) = d$$

$$x(t) = X(T(t)) \quad \checkmark$$

$$y(t) = Y(T(t)) \quad \checkmark \checkmark$$

ejemplo

Ejemplo Área encerrada por elipse

$$\begin{aligned}x &= a \cos t \\y &= b \sin t\end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \quad A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab$$

Si $a=b=r$ Área del círculo de radio r

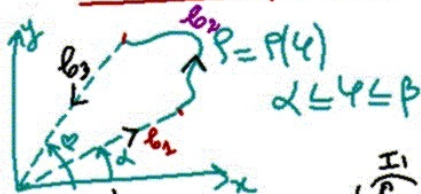
$$\pi r^2$$



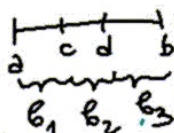
$$\begin{aligned}y &= x^2 \\x &= t \\y &= t^2 \quad 0 \leq t \leq 1\end{aligned}$$

áreas en polares

Áreas en polares



$$a \leq t \leq b$$



$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} P^2(\varphi) d\varphi$$

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b (x y' - y x') dt = \frac{1}{2} \left(\int_a^c \frac{I_1}{c} + \int_c^d \frac{I_2}{d} + \int_d^b \frac{I_3}{b} \right)$$

$$I_1 \quad b_1 \begin{cases} x = T \cos \alpha \\ y = T \sin \alpha \\ xy - yx' = 0 \end{cases} \quad 0 \leq T \leq P(\alpha) \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta \quad I_1 = 0$$

$$I_3 \quad b_3 \begin{cases} x = T \cos \beta \\ y = T \sin \beta \\ xy - yx' = 0 \end{cases} \quad 0 \leq T \leq P(\beta) \quad \beta \leq \varphi \leq \alpha \quad I_3 = 0$$

$$I_2 \quad b_2 \begin{cases} x = P(\varphi) \cos \varphi \\ y = P(\varphi) \sin \varphi \\ xy - yx' = P^2 \end{cases} \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta \quad I_2 = \int_{\alpha}^{\beta} P^2(\varphi) d\varphi$$