Campos vectoriales
Circulación y flujo

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

22 de marzo de 2011

1

[1] Sobre notas de Eleonora Catsigeras

CAMPOS VECTORIALES

Def. Campo es una aplic. CONTINUA $\vec{X} : \Omega \longrightarrow V \to$ vector

Ω conj abierto de puntos

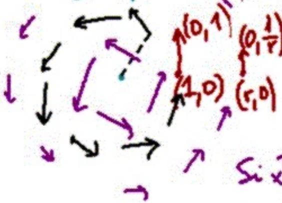
$\vec{X}(P)$ es un vector

$P \to$ punto de Ω

$$\vec{X}(\underbrace{x,y,z}_{\text{coord. de } P}) = \big(A(x,y,z),\, B(x,y,z),\, C(x,y,z)\big)$$

componentes de $\vec{X}$

Ejemplo: en el plano $\vec{X} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right)$ $\quad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



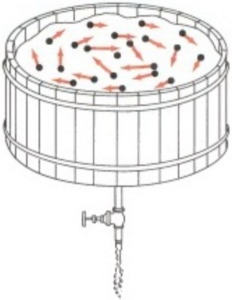
$\vec{X}(1,0) = (0,1)$

$\vec{X}(r,0) = \left(0, \dfrac{1}{r}\right)$

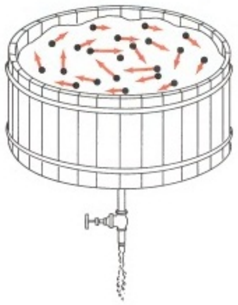
Si $x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{X} = (-y,x) \\ \|\vec{X}\| = 1 \\ \langle \vec{X}, P-O \rangle = 0 \end{cases}$

Si $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \|\vec{X}\| = \dfrac{1}{r}$

ejemplo 1



ejemplo 1



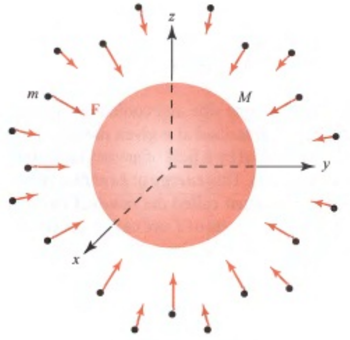
Campo vectorial describiendo el movimiento del agua en un estanque

ejemplo 2: campo gravitacional

Ley de Newton:

$$F(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$$

ejemplo 2: campo gravitacional



Ley de Newton:

$$F(x, y, z) = -\frac{mMG}{r^3}(x, y, z)$$

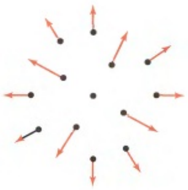
Campo gravitacional

ejemplo 3: campos eléctricos

Ley de Coulomb:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x, y, z)$$

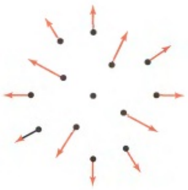
ejemplo 3: campos eléctricos



$qq_0 > 0$ cargas $=$ signo

Ley de Coulomb:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x,y,z)$$



$qq_0 > 0$ cargas $=$ signo

$qq_0 < 0$ cargas $\neq$ signo

Ley de Coulomb:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x,y,z)$$

circulación de un campo

CAMPO asociado a una UNO-FORMA

$$\left.\begin{array}{l} A\,dx + B\,dy + C\,dz \\ \text{es } \vec{X} = (A\,,B\,,C) \end{array}\right\} \text{ en } \Omega \text{ de } \left\langle \begin{array}{l}\text{esp.}\\ \text{plano}\end{array}\right.$$

Def. circulación del campo $\vec{X}$ a lo largo de curva $\mathcal{C}$ orientada

NOTACIÓN $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{X}\cdot\vec{ds} \overset{\text{def}}{=} \int_0^L \vec{X}(P(s))\cdot\vec{t}(s)\,ds$

prod. escalar

donde L es la LONG. de $\mathcal{C}$

$P(s)$ es el punto de $\mathcal{C}$ con abscisa curvilínea $0\le s\le L$

$\vec{t}(s)$ " " versor tangente a $\mathcal{C}$ en $P(s)$

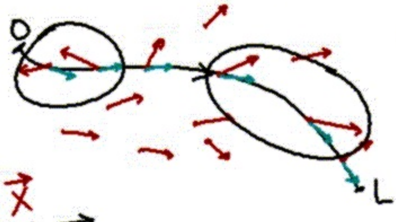
OBS. la circ es intrínseca al campo $\vec{X}$ y a la curva $\mathcal{C}$ orientada

interpretación de la circulación

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X}\cdot\vec{ds} \overset{\text{def}}{=} \int_0^L \vec{X}(P(s))\cdot\vec{t}(s)\; ds$$

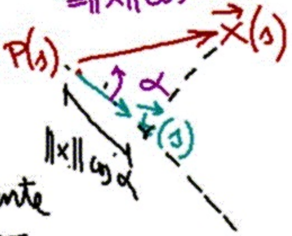
diferencial de arco de $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}\subset\Omega$



$$\vec{X}\cdot\vec{t} = \|\vec{X}\|\,\|\vec{t}\|\cos\alpha \qquad \|\vec{t}\| = 1$$

$$= \|\vec{X}\|\cos\alpha$$



$\vec{X}\cdot\vec{t}$ componente del campo $\vec{X}$ que es tangente a la curva

cálculo de la circulación

CÁLCULO de la CIRCULACIÓN $\quad \int_{\mathcal{C}} \vec{X}\cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} L \longrightarrow$ una forma asoc. a $\vec{X}$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X}\cdot d\vec{s} \overset{\text{def}}{=} \int_0^L \underbrace{\vec{X}(P(s))\cdot\vec{t}(s)}\,\underbrace{ds} \underset{s=s(t)}{=} \int_a^b \left(\frac{A\dot{x}+B\dot{y}+C\dot{z}}{\cancel{\|\dot{P}\|}}\right)\cancel{\|\dot{P}\|}\,dt$$

$\mathcal{C} \quad P=P(t) \quad a\le t\le b \quad s=s(t)$

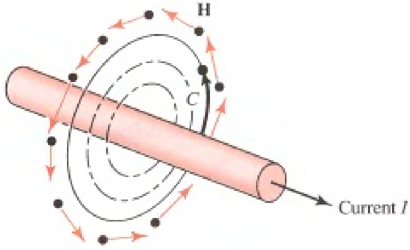
$ds = \dot{s}\,dt \quad \dot{s}(t)=\|\dot{P}\|$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{t}=\dfrac{\dot{P}}{\|\dot{P}\|}=\dfrac{(\dot{x},\dot{y},\dot{z})}{\|\dot{P}\|} \\ \vec{X}=(A,B,C) \end{array}\right\} \vec{X}\cdot\vec{t} = \frac{A\dot{x}+B\dot{y}+C\dot{z}}{\|\dot{P}\|}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

$$= \int_{\mathcal{C}} L$$

aplicación: ley de Ampère



Flujo de la densidad de corriente

Ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I_{enc}$$

flujo de un campo a través de una curva

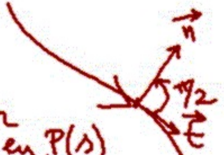
$\vec{X}$ campo plano $\quad \vec{X}:\Omega \to V$

$\mathcal{C}$ curva plana $\quad \mathcal{C} \subset \Omega$ orientada

Def Flujo de $\vec{X}$ a través de $\mathcal{C}$ es

$$\int_0^L \underbrace{\vec{X}(P(s)) \cdot \vec{n}(s)}_{\text{componente de } \vec{X} \text{ normal a } \mathcal{C}} \, ds$$

$\vec{n}(s) \to$ versor normal a $\mathcal{C}$ en $P(s)$ $\gamma(s)$



$\vec{X}$ metros/seg $\quad (\vec{X} \cdot \vec{n})$ metros/seg a través de la curva.

$(\vec{X} \cdot \vec{n}) \cdot \underbrace{\Delta s}_{\text{metros}}$ [: metros²/seg] // CAUDAL m²/seg del fluido plano A TRAVÉS de la $\mathcal{C}$

cálculo del flujo

FLUJO a través de $\mathcal{C}$ plana

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X}\cdot\vec{n}\,ds \overset{\text{def}}{=} \int_0^L \vec{X}(P(s))\cdot\vec{n}(s)\,ds \underset{s=s(t)}{=} \int_a^b (-A\dot{y}+B\dot{x})\,dt$$

notación

$t=a;\ s=0$

$t=b;\ s=L$

$$\mathcal{C}: P=P(t) \qquad \vec{t}=\frac{\dot{P}}{\|\dot{P}\|}=\frac{(\dot{x},\dot{y})}{\|\dot{P}\|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\dfrac{(-\dot{y},\dot{x})}{\|\dot{P}\|} \\ \vec{X}=(A,B) \end{array}\right\} \vec{X}\cdot\vec{n}=\frac{-A\dot{y}+B\dot{x}}{\|\dot{P}\|}$$

$$ds=\dot{s}\,dt=\|\dot{P}\|\,dt$$

$\vec{X}=(A,B)$

$\hat{L}=B\,dx-A\,dy$

$\Downarrow$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X}\cdot\vec{n}\,ds=\int_{\mathcal{C}}\hat{L}$$