Campos de gradientes y formas exactas
Campos irrotacionales y formas cerradas

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

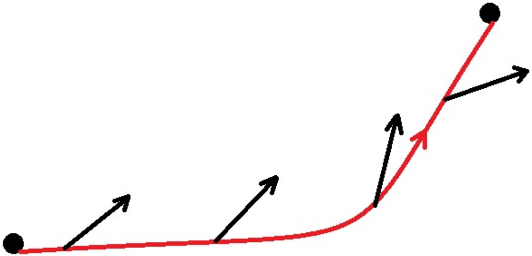
IMERL

24 de marzo de 2011

[1]

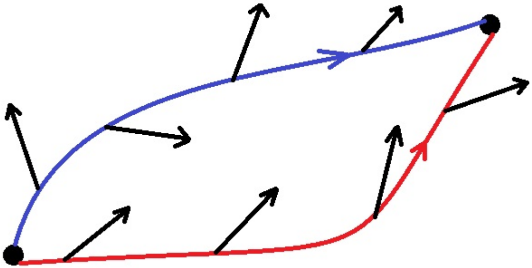
[1] Sobre notas de Eleonora Catsigeras

motivación



$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{X}\,\overrightarrow{ds}$$

motivación



$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{X}\overrightarrow{ds} \stackrel{?}{=} \int_{\mathcal{C}_2} \vec{X}\overrightarrow{ds}$$

campo de gradientes

CAMPOS DE GRADIENTES

Sea $\vec{X} = (A(x,y,z), B(\ ), C(\ ))$ CAMPO de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

Def $\vec{X}$ es "de gradientes en Ω" si $\exists\, f: \Omega \to \mathbb{R}$ de $\mathcal{C}^1$

tal que $f_x \equiv A$; $f_y \equiv B$; $f_z \equiv C$ $\quad \forall (x,y,z) \in \Omega$

f se llama pot. escalar de $\vec{X}$

$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$ se llama "gradiente de f"

formas exactas

UNO-FORMAS EXACTAS

Sea $L = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz$ $\qquad \Omega$ abierto de $\mathbb{R}^3$

DEF L es "EXACTA en Ω" si coincide con el diferencial

$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ de una $f: \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 $\forall (x,y,z) \in \Omega$

o sea $\exists f$ tal que $f_x \equiv A$; $f_y \equiv B$; $f_z \equiv C$ $\quad \forall (x,y,z) \in \Omega$

f se llama "potencial escalar" de L

propiedades

$L = A\,dx + B\,dy + C\,dz$ exacta en Ω

Proposición 1: f pot. escalar de L en Ω $\Rightarrow$ $f + k$ (cte) también es pot. escalar de L en Ω

Proposición 2: f, g potenciales escalares de L en Ω $\Rightarrow f - g = \text{cte}$ en Ω

Dem. prop. 1: $f_x \equiv A \Rightarrow (f+k)_x \equiv A$. Idem $(f+k)_y \equiv B$; $(f+k)_z \equiv C$

Dem. prop. 2: $\left.\begin{array}{l} f_x \equiv A \\ g_x \equiv A \end{array}\right\} \Rightarrow (f-g)_x \underset{\text{en } \Omega}{\equiv} 0 \Big\} \Rightarrow f - g$ es indep. de x en Ω

Idem $\left.\begin{array}{l} f-g \text{ indep. de } y \text{ en } \Omega \\ f-g \text{ '' '' } z \text{ '' ''} \end{array}\right\} \Rightarrow f - g = \text{cte en } \Omega$

rotor de un campo

En el espacio

Def. rotor de $\vec{X}$ (notación rot $\vec{X}$ o $\nabla \wedge \vec{X}$) "nabla"

es el campo $(C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$

Fórmula mnemotécnica $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ $\quad \vec{X} = (A, B, C)$

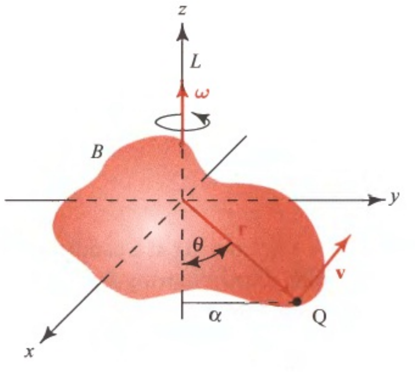
$$\nabla \wedge \vec{X} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial}{\partial z}A - \frac{\partial C}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}B - \frac{\partial}{\partial y}A\right)\vec{k}$$

en el plano $\vec{X} = (A(x,y), B(x,y))$

Def. $\nabla \wedge \vec{X}$ es $(0, 0, B_x - A_y)$

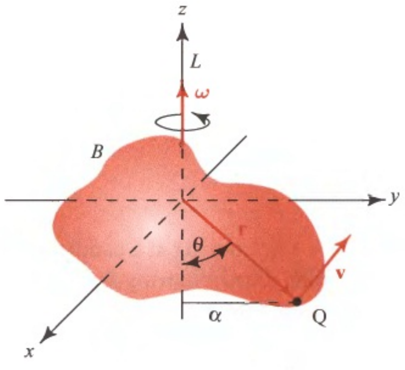
rotor de $\vec{X}$

aplicación: rotación de un cuerpo sólido



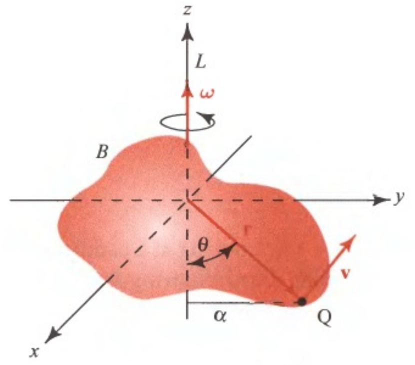
$\vec{X}$ vector velocidad

aplicación: rotación de un cuerpo sólido



$\vec{X}$ vector velocidad
$\vec{\omega} = \omega\mathbf{k}$ vector velocidad angular

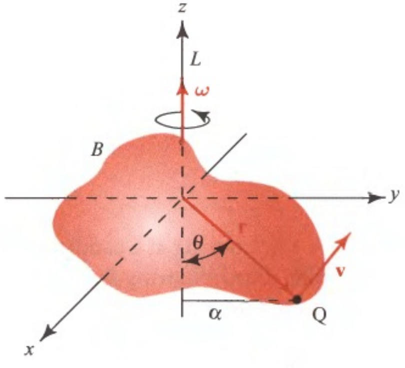
aplicación: rotación de un cuerpo sólido



$\vec{X}$ vector velocidad
$\vec{\omega} = \omega\mathbf{k}$ vector velocidad angular

$$\vec{X} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

aplicación: rotación de un cuerpo sólido

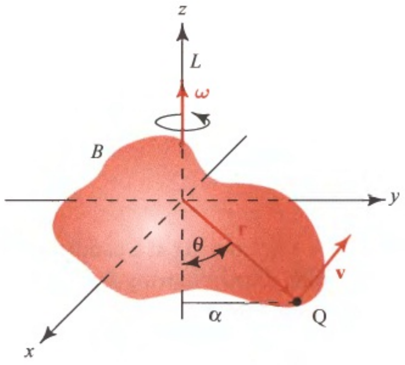


$\vec{X}$ vector velocidad
$\vec{\omega} = \omega \mathbf{k}$ vector velocidad angular

$$\vec{X} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

$$\nabla \wedge \vec{X} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{matrix} \right\|$$

aplicación: rotación de un cuerpo sólido



$\vec{X}$ vector velocidad
$\vec{\omega} = \omega\mathbf{k}$ vector velocidad angular

$$\vec{X} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

$$\nabla \wedge \vec{X} = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{array} \right\| = 2\omega\mathbf{k}$$

campo irrotacional y forma cerrada

Def $\vec{X}$ es "irrotacional" en Ω

$$\operatorname{rot} \vec{X} \equiv \vec{0} \text{ en } \Omega.$$

Def $\vec{X}$ "irrotacional en Ω" $\Leftrightarrow$ la uno-forma asociada a $\vec{X}$ es "cerrada en Ω"

Consecuencias

$\vec{X}$ de gradientes en Ω $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\vec{X}$ irrotacional en Ω

$$\vec{X} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \text{ en } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

es irrotacional en Ω

no es de grad. en Ω

teorema

teorema

- $\vec{X}$ de gradientes $\Rightarrow$ $\vec{X}$ irrotacional

teorema

- $\vec{X}$ de gradientes $\Rightarrow$ $\vec{X}$ irrotacional
- L forma exacta $\Rightarrow$ L forma cerrada

observación 1

<u>Observación</u> $\Omega^* \subset \Omega \begin{cases} L \text{ exacta en } \Omega \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{exacta en } \Omega^* \\ L \text{ cerrada en } \Omega \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} L \text{ cerrada en } \Omega^* \end{cases}$

observación 2

- $\vec{X}$ irrotacional $\not\Rightarrow$ $\vec{X}$ de gradientes

observación 2

- $\vec{X}$ irrotacional $\not\Rightarrow$ $\vec{X}$ de gradientes
- L forma cerrada $\not\Rightarrow$ L exacta

ejemplo

Ejemplo $L = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ $\qquad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

A $\qquad$ B

$$\left.\begin{array}{l} A_y = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ B_x = \quad '' \end{array}\right\} A_y \equiv B_x \text{ en } \Omega \Rightarrow L \text{ es cerrada en } \Omega$$

Al final veremos que L no es exacta (cerrada $\not\Rightarrow$ exacta)

$\Omega^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{y=0;\ x \geq 0\}$

$\Omega^* \subset \Omega \Rightarrow \boxed{L \text{ cerrada en } \Omega^*}$

Sean (ρ, φ) sus coord. polares $0<\varphi<2\pi$

$(x,y) \in \Omega^*$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg}\varphi(x,y) = \dfrac{y}{x} \\ (1+\operatorname{tg}^2\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2} \\ (1+\operatorname{tg}^2\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{array}$$

φ es potencial escalar de L en Ω^*

L es exacta en Ω^*

ejemplo

Probaremos que L no es exacta en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Por absurdo Sup. que $\exists f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^1 \Rightarrow \boxed{\text{continua } \forall (x,y) \in \Omega}$ (1)

tal que $f_x \equiv A$; $f_y \equiv B$ en Ω

$$\left.\begin{array}{l} \Omega^* \subset \Omega \Rightarrow f_x \equiv A \ ; \ f_y \equiv B \text{ en } \Omega^* \\ \text{teníamos } \varphi_x \equiv A \ ; \ \varphi_y \equiv B \text{ en } \Omega^* \end{array}\right\} f - \varphi = k \text{ cte en } \Omega^*$$

$$f(x,y) = \varphi(x,y) + k \quad \forall (x,y) \in \Omega^*$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ y \to 0^+}} f(x,y) = \underbrace{\lim_{\substack{x\to 1 \\ y \to 0^+}} \varphi(x,y)}_{=0} + k = k$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ y \to 0^-}} f(x,y) = \underbrace{\lim_{\substack{x\to 1 \\ y \to 0^-}} \varphi(x,y)}_{=2\pi} + k = 2\pi + k$$

$$f(1,0^+) = k \neq 2\pi + k = f(1,0^-)$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es discontinua } (1,0) \\ (1,0) \in \Omega \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ABSURDO} \\ \text{contradice} \end{array}$$

(1)