Ortogonalidad y ortonormalidad

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

2 de setiembre de 2010

vectores ortogonales

definición (vectores ortogonales)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$

vectores ortogonales

definición (vectores ortogonales)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $v, w \in V$ son ortogonales si

vectores ortogonales

definición (vectores ortogonales)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $v, w \in V$ son ortogonales si

$$\langle v, w \rangle = 0$$

vectores ortogonales

definición (vectores ortogonales)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $v, w \in V$ son ortogonales si

$$\langle v, w \rangle = 0$$

- Notación:

$$v \perp w$$

conjunto ortogonal

definicón (conjunto ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$

conjunto ortogonal

definicón (conjunto ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $A \subset V$ conjunto ortogonal si

conjunto ortogonal

definicón (conjunto ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $A \subset V$ conjunto ortogonal si

$$v, w \in A,$$

conjunto ortogonal

definicón (conjunto ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $A \subset V$ conjunto ortogonal si

$$v, w \in A, \quad v \neq w$$

conjunto ortogonal

definicón (conjunto ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $A \subset V$ conjunto ortogonal si

$$v, w \in A, \quad v \neq w \qquad \Rightarrow \qquad v \perp w$$

observación 1

el vector $\vec{0}$

$$\vec{0} \perp v \qquad \forall v \in V$$

observación 2

$v \not\perp v$

$$v \perp v$$

observación 2

$v \not\perp v$

$$v \perp v \qquad \Rightarrow \qquad v = \vec{0}$$

conjunto ortonormal

definición (conjunto ortonormal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$

conjunto ortonormal

definición (conjunto ortonormal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $A \subset V$ conjunto ortonormal si:
  1. A conjunto ortogonal

conjunto ortonormal

definición (conjunto ortonormal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $A \subset V$ conjunto ortonormal si:
  1. A conjunto ortogonal
  2. $\|v\| = 1$ para todo $v \in A$

conjunto ortonormal

definición (conjunto ortonormal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $A \subset V$ conjunto ortonormal si:
  1. A conjunto ortogonal
  2. $\|v\| = 1$ para todo $v \in A$
- Obs: $\|.\|$ norma inducida por $\langle , \rangle$

observación

normalización

- A conjunto ortogonal

observación

normalización

- A conjunto ortogonal
- $\vec{0} \notin A$

observación

normalización

- A conjunto ortogonal
- $\vec{0} \notin A$
- $\Rightarrow$ el conjunto

$$\left\{ \frac{v}{\|v\|} : v \in A \right\}$$

observación

normalización

- A conjunto ortogonal
- $\vec{0} \notin A$
- $\Rightarrow$ el conjunto

$$\left\{ \frac{v}{\|v\|} : v \in A \right\}$$

- es ortonormal

ejemplo

base canónica de $\mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ con producto interno usual

ejemplo

base canónica de $\mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ con producto interno usual
- la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto ortonormal

ejemplo

base canónica de $\mathbb{R}^n$

- $V = \mathbb{R}^n$ con producto interno usual
- la base canónica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto ortonormal
- donde

$$e_i = \begin{array}{c} (0,0, \quad \ldots, 1, \ldots \quad 0,0) \\ \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\quad i \end{array}$$

teorema

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$

teorema

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ conjunto ortogonal

teorema

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ conjunto ortogonal
- $v_i \neq \vec{0}$ para todo i

teorema

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$
- $\{v_1, \dots, v_k\}$ conjunto ortogonal
- $v_i \neq \vec{0}$ para todo i
- $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k\}$ es l.i.

demostración

- sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$

demostración

- sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \ldots, k$:

demostración

- sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \ldots, k$:

$$\vec{0} \quad = \langle a_1 v_1, v_j \rangle + \cdots + \langle a_k v_k, v_j \rangle$$

demostración

- sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \langle a_1 v_1, v_j \rangle + \cdots + \langle a_k v_k, v_j \rangle \\ &= a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + a_k \langle v_k, v_j \rangle \end{aligned}$$

demostración

- sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \langle a_1 v_1, v_j \rangle + \cdots + \langle a_k v_k, v_j \rangle \\
&= a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + a_k \langle v_k, v_j \rangle \\
&= a_j \langle v_j, v_j \rangle & (\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij})
\end{aligned}$$

demostración

- sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \langle a_1 v_1, v_j\rangle + \cdots + \langle a_k v_k, v_j\rangle \\ &= a_1\langle v_1, v_j\rangle + \cdots + a_k\langle v_k, v_j\rangle \\ &= a_j\langle v_j, v_j\rangle && (\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}) \\ &= a_j\|v_j\|^2 = \vec{0}\end{aligned}$$

demostración

- sean $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \dots, k$:

$$
\begin{aligned}
\vec{0} &= \langle a_1 v_1, v_j \rangle + \cdots + \langle a_k v_k, v_j \rangle \\
&= a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + a_k \langle v_k, v_j \rangle \\
&= a_j \langle v_j, v_j \rangle && (\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}) \\
&= a_j \| v_j \|^2 = \vec{0}
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow a_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$

demostración

- sean $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \langle a_1 v_1, v_j \rangle + \cdots + \langle a_k v_k, v_j \rangle \\
&= a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + a_k \langle v_k, v_j \rangle \\
&= a_j \langle v_j, v_j \rangle && (\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}) \\
&= a_j \| v_j \|^2 = \vec{0}
\end{aligned}$$

- $\Rightarrow a_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$
- $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_k\}$ l.i.

demostración

- sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = \vec{0}$
- $\Rightarrow$ para cada $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \langle a_1 v_1, v_j \rangle + \cdots + \langle a_k v_k, v_j \rangle \\ &= a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + a_k \langle v_k, v_j \rangle \\ &= a_j \langle v_j, v_j \rangle \qquad (\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}) \\ &= a_j \|v_j\|^2 = \vec{0} \end{aligned}$$

- $\Rightarrow a_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_k\}$ l.i. $\square$

teorema (Pitágoras)

teorema (Pitágoras)

- V e.v. con producto interno

teorema (Pitágoras)

teorema (Pitágoras)

- V e.v. con producto interno
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ conjunto ortogonal

teorema (Pitágoras)

teorema (Pitágoras)

- V e.v. con producto interno
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ conjunto ortogonal
- $\Rightarrow$
$$\|v_1 + \cdots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_k\|^2$$

demostración

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\| = \left\langle \sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j \right\rangle$$

demostración

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{k} v_i \right\| &= \left\langle \sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

demostración

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{k} v_i\right\| &= \left\langle \sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, v_i\rangle \qquad (\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij})
\end{aligned}$$

demostración

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{k} v_i\right\| &= \left\langle \sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, v_i\rangle \qquad (\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2
\end{aligned}
$$

$\square$

método Gram-Schmidt

teorema (método Gram-Schmidt)

- V e.v. con producto interno

método Gram-Schmidt

teorema (método Gram-Schmidt)

- V e.v. con producto interno
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V

método Gram-Schmidt

teorema (método Gram-Schmidt)

- V e.v. con producto interno
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V
- $\Rightarrow$ existe $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de V tal que

método Gram-Schmidt

teorema (método Gram-Schmidt)

- V e.v. con producto interno
- $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V
- $\Rightarrow$ existe $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de V tal que
  1. B conjunto ortonormal

método Gram-Schmidt

teorema (método Gram-Schmidt)

- V e.v. con producto interno
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V
- $\Rightarrow$ existe $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de V tal que
  1. B conjunto ortonormal
  2. $[v_1, \ldots, v_k] = [w_1, \ldots, w_k]$ para todo $k = 1, \ldots, n$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\checkmark$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\checkmark$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su "componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle =$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su "componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal,

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$
   - $w_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 , w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$
   - $w_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$
   - $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortonormal y $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$
   - $w_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$
   - $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortonormal y $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$
4. se procede inductivamente tomando:

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$
   - $w_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$
   - $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortonormal y $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$
4. se procede inductivamente tomando:
   - $u_k := v_k - \langle v_k, w_{k-1} \rangle w_{k-1} - \cdots - \langle v_k, w_1 \rangle w_1$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$
   - $w_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$
   - $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortonormal y $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$
4. se procede inductivamente tomando:
   - $u_k := v_k - \langle v_k, w_{k-1} \rangle w_{k-1} - \cdots - \langle v_k, w_1 \rangle w_1$
   - $w_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su “componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su “componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$
   - $w_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$
   - $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortonormal y $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$
4. se procede inductivamente tomando:
   - $u_k := v_k - \langle v_k, w_{k-1} \rangle w_{k-1} - \cdots - \langle v_k, w_1 \rangle w_1$
   - $w_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$
   - $\{w_1, \ldots, w_k\}$ ortonormal y $[w_1, \ldots, w_k] = [v_1, \ldots, v_k]$

demostración

Se procede inductivamente:

1. $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\surd$
2. ahora le sacamos a v_2 su "componente" w_1:
   - $u_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$
   - $\Rightarrow u_2 \perp w_1$:
   - $\langle u_2, w_1 \rangle = \langle v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle - \langle v_2, w_1 \rangle = 0$
   - $w_2 := \frac{u_2}{\|u_2\|}$ cumple: $\{w_1, w_2\}$ ortonormal, $[v_1, v_2] = [w_1, w_2]$
3. ahora le sacamos a v_3 su "componente" w_2 y w_1:
   - $u_3 := v_3 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1$
   - $w_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$
   - $\{w_1, w_2, w_3\}$ ortonormal y $[w_1, w_2, w_3] = [v_1, v_2, v_3]$
4. se procede inductivamente tomando:
   - $u_k := v_k - \langle v_k, w_{k-1} \rangle w_{k-1} - \cdots - \langle v_k, w_1 \rangle w_1$
   - $w_k := \frac{u_k}{\|u_k\|}$
   - $\{w_1, \ldots, w_k\}$ ortonormal y $[w_1, \ldots, w_k] = [v_1, \ldots, v_k]$

$\square$

corolarios

corolarios

V e.v. de dimensión finita con producto interno

corolarios

corolarios

V e.v. de dimensión finita con producto interno

- tiene una base ortonormal

corolarios

corolarios

V e.v. de dimensión finita con producto interno

- tiene una base ortonormal
- todo subespacio vectorial tiene una base ortonormal

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4)\right]$$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4)\right]$$

- $w_1 = \dfrac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|}$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4) \right]$$

- $w_1 = \frac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4) \right]$$

- $w_1 = \frac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
- $u_2 = (0, 2, 4) - \langle (0, 2, 4), w_1 \rangle w_1$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4)\right]$$

- $w_1 = \frac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
- $u_2 = (0, 2, 4) - \langle (0, 2, 4), w_1 \rangle w_1 = (0, 2, 4) - 4w_1$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4)\right]$$

- $w_1 = \frac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
- $u_2 = (0, 2, 4) - \langle (0, 2, 4), w_1 \rangle w_1 = (0, 2, 4) - 4w_1 = (-\sqrt{3}, 0, 1)$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4)\right]$$

- $w_1 = \frac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
- $u_2 = (0, 2, 4) - \langle (0, 2, 4), w_1 \rangle w_1 = (0, 2, 4) - 4w_1 = (-\sqrt{3}, 0, 1)$
- $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4)\right]$$

- $w_1 = \frac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
- $u_2 = (0, 2, 4) - \langle (0, 2, 4), w_1 \rangle w_1 = (0, 2, 4) - 4w_1 = (-\sqrt{3}, 0, 1)$
- $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$

ejemplo 1

ejemplo 1

En $\mathbb{R}^3$, encontrar una base ortonormal para el subespacio:

$$S = \left[(\sqrt{3}, 2, 3), (0, 2, 4)\right]$$

- $w_1 = \frac{(\sqrt{3},2,3)}{\|(\sqrt{3},2,3)\|} = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$
- $u_2 = (0, 2, 4) - \langle (0, 2, 4), w_1 \rangle w_1 = (0, 2, 4) - 4w_1 = (-\sqrt{3}, 0, 1)$
- $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow \qquad B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

base ortonormal de S

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt = t - \frac{1}{2}$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt = t - \frac{1}{2}$
- $\mathbf{w}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt = t - \frac{1}{2}$
- $\mathbf{w}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt = t - \frac{1}{2}$
- $\mathbf{w}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$
- $u_3 = e^t - \frac{1}{12}\langle e^t, t - \frac{1}{2}\rangle(t - \frac{1}{2}) - \langle e^t, 1\rangle$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt = t - \frac{1}{2}$
- $\mathbf{w}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$
- $u_3 = e^t - \frac{1}{12}\langle e^t, t - \frac{1}{2}\rangle(t - \frac{1}{2}) - \langle e^t, 1\rangle =$
  $e^t - \frac{1}{24}(3 - e)(t - \frac{1}{2}) - (e - 1)$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt = t - \frac{1}{2}$
- $\mathbf{w}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$
- $u_3 = e^t - \frac{1}{12}\langle e^t, t - \frac{1}{2}\rangle(t - \frac{1}{2}) - \langle e^t, 1\rangle = e^t - \frac{1}{24}(3 - e)(t - \frac{1}{2}) - (e - 1)$
- $\mathbf{w}_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|},$

ejemplo 2

En $V = C^0[0,1]$, con $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, encontrar base ortonormal de

$$S = \left[1, t, e^t\right]$$

- $\mathbf{w}_1 = 1$ (tiene norma 1)
- $u_2 = t - \langle t, 1\rangle 1 = t - \int_0^1 t\,dt = t - \frac{1}{2}$
- $\mathbf{w}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$
- $u_3 = e^t - \frac{1}{12}\langle e^t, t - \frac{1}{2}\rangle(t - \frac{1}{2}) - \langle e^t, 1\rangle =$
  $e^t - \frac{1}{24}(3 - e)(t - \frac{1}{2}) - (e - 1)$
- $\mathbf{w}_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$, con $\|u_3\|^2 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - \frac{1}{48}(3 - e)^2 - (e - 1)^2$

propiedades

propiedades de bases ortonormales

V e.v. con producto interno, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal, $v \in V$

propiedades

propiedades de bases ortonormales

V e.v. con producto interno, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal, $v \in V$

1. $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n$

propiedades

propiedades de bases ortonormales

V e.v. con producto interno, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal, $v \in V$

1. $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n$
2. $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$

propiedades

propiedades de bases ortonormales

V e.v. con producto interno, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal, $v \in V$

1. $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n$
2. $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$
3. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, entonces

propiedades

propiedades de bases ortonormales

V e.v. con producto interno, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal, $v \in V$

1. $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n$
2. $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$
3. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, entonces

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

demostración

1. Sea $v \in V$,

demostración

1. Sea $v \in V$, entonces, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

demostración

1. Sea $v \in V$, entonces, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

   Ahora

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle$$

demostración

1. Sea $v \in V$, entonces, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

   Ahora

$$\begin{aligned} \langle v, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle \end{aligned}$$

demostración

1. Sea $v \in V$, entonces, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

   Ahora

$$\begin{aligned} \langle v, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \end{aligned}$$

demostración

2. tenemos:

$$\|v\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i\right\|^2 \quad (parte(1))$$

demostración

2. tenemos:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i \right\|^2 \quad (parte(1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \| \langle v, v_i \rangle v_i \|^2 \quad (teo. Pitgoras) \end{aligned}$$

demostración

2. tenemos:

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle v_i\right\|^2 \quad (parte(1)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\|\langle v, v_i\rangle v_i\|^2 \quad (teo. Pitgoras) \\
&= \sum_{i=1}^{n}|\langle v, v_i\rangle|^2\|v_i\|^2
\end{aligned}
$$

demostración

2. tenemos:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle v_i\right\|^2 \quad (parte(1))\\
&= \sum_{i=1}^{n}\|\langle v, v_i\rangle v_i\|^2 \quad (teo. Pitgoras)\\
&= \sum_{i=1}^{n}|\langle v, v_i\rangle|^2\|v_i\|^2\\
&= \sum_{1=1}^{n}|\langle v, v_i\rangle|^2
\end{aligned}$$

demostración

3. sale usando linealidad (ejercicio)

demostración

3. sale usando linealidad (ejercicio) $\square$