Complemento ortogonal. Proyección ortogonal

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

7 de setiembre de 2010

complemento ortogonal

definición (complemento ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$

complemento ortogonal

definición (complemento ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $S \subset V$ subconjunto cualquiera

complemento ortogonal

definición (complemento ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $S \subset V$ subconjunto cualquiera
- llamamos complemento ortogonal de S al conjunto

complemento ortogonal

definición (complemento ortogonal)

- V e.v. con producto interno $\langle , \rangle$
- $S \subset V$ subconjunto cualquiera
- llamamos complemento ortogonal de S al conjunto

$$S^{\perp} = \{v \in V : v \perp s \quad \forall s \in S\}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual
- $S = \{(1, 1, 1)\}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual
- $S = \{(1,1,1)\}$
- $$S^\perp = \{(x,y,z) : (x,y,z) \perp (1,1,1)\}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual
- $S = \{(1,1,1)\}$
- $$\begin{aligned} S^\perp &= \{(x,y,z) : (x,y,z) \perp (1,1,1)\} \\ &= \{(x,y,z) : \langle (x,y,z), (1,1,1) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual
- $S = \{(1,1,1)\}$
- $$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{(x,y,z) : (x,y,z) \perp (1,1,1)\} \\ &= \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z) : x+y+z=0\} \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual
- $S = \{(1,1,1)\}$
- $$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{(x,y,z) : (x,y,z) \perp (1,1,1)\} \\ &= \{(x,y,z) : \langle (x,y,z), (1,1,1) \rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z) : x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,-x-y) : x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual
- $S = \{(1,1,1)\}$
- $$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{(x,y,z) : (x,y,z) \perp (1,1,1)\} \\ &= \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z) : x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,-x-y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) : x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $V = \mathbb{R}^3$ con producto interno usual
- $S = \{(1,1,1)\}$
- $$\begin{aligned} S^\perp &= \{(x,y,z) : (x,y,z) \perp (1,1,1)\} \\ &= \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z) : x+y+z=0\} \\ &= \{(x,y,-x-y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ S^\perp &= [(1,0,-1),(0,1,-1)] \end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = C^0[0,1]$ con el producto $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = C^0[0,1]$ con el producto $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$
- $S = \{\mathbb{1}\}$ donde $\mathbb{1}(t) \equiv 1$ para todo t

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = C^0[0,1]$ con el producto $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$
- $S = \{\mathbb{1}\}$ donde $\mathbb{1}(t) \equiv 1$ para todo t
- $$S^\perp = \{g : \langle \mathbb{1}, g\rangle = 0\}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = C^0[0,1]$ con el producto $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$
- $S = \{\mathbb{1}\}$ donde $\mathbb{1}(t) \equiv 1$ para todo t
- $$\begin{aligned} S^\perp &= \{g : \langle \mathbb{1}, g \rangle = 0\} \\ &= \{g : \int_0^1 g(t)\,dt = 0\} \end{aligned}$$

complemento ortogonal es subespacio

proposición

- V e.v. con producto interno

complemento ortogonal es subespacio

proposición

- V e.v. con producto interno
- $S \subset V$ subconjunto cualquiera

complemento ortogonal es subespacio

proposición

- V e.v. con producto interno
- $S \subset V$ subconjunto cualquiera
- $\Rightarrow S^{\perp}$ subespacio vectorial de V

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp}$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset \ \surd$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset \ \surd$
- tomamos $v, w \in S^{\perp}$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset \ \surd$
- tomamos $v, w \in S^{\perp}$
- queremos ver que $\alpha v + \beta w \in S^{\perp}$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset \surd$
- tomamos $v, w \in S^{\perp}$
- queremos ver que $\alpha v + \beta w \in S^{\perp}$
- ahora, para cada $s \in S$

$$\langle \alpha v + \beta w, s \rangle \quad =$$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset \; \surd$
- tomamos $v, w \in S^{\perp}$
- queremos ver que $\alpha v + \beta w \in S^{\perp}$
- ahora, para cada $s \in S$

$$\begin{aligned} \langle \alpha v + \beta w, s \rangle &= \\ \alpha \langle v, s \rangle + \beta \langle w, s \rangle &= \end{aligned}$$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset \surd$
- tomamos $v, w \in S^{\perp}$
- queremos ver que $\alpha v + \beta w \in S^{\perp}$
- ahora, para cada $s \in S$

$$\begin{array}{lcl} \langle \alpha v + \beta w, s \rangle & = & \\ \alpha \langle v, s \rangle + \beta \langle w, s \rangle & = & \\ \alpha .0 + \beta .0 & = & 0 \end{array}$$

demostración

- $\vec{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \emptyset \; \surd$
- tomamos $v, w \in S^{\perp}$
- queremos ver que $\alpha v + \beta w \in S^{\perp}$
- ahora, para cada $s \in S$

$$\begin{aligned} \langle \alpha v + \beta w, s \rangle &= \\ \alpha \langle v, s \rangle + \beta \langle w, s \rangle &= \\ \alpha .0 + \beta .0 &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno
- $S \subset V$ subespacio vectorial

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno
- $S \subset V$ subespacio vectorial
- $B = \{s_1, \ldots, s_k\}$ base de S

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno
- $S \subset V$ subespacio vectorial
- $B = \{s_1, \ldots, s_k\}$ base de S
- entonces

$$v \in S^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad v \perp s_i \quad \forall i = 1, \ldots, k$$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:
  - $s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:
  - $s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$
  - $$\langle v, s \rangle \quad =$$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:
    - $s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$
    - $$\langle v, s \rangle = \langle v, \alpha_1 s_1 + \ldots \alpha_k s_k \rangle$$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:
  - $s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$
  - $$\begin{aligned} \langle v, s \rangle &= \langle v, \alpha_1 s_1 + \ldots \alpha_k s_k \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, s_1 \rangle + \cdots + \overline{\alpha_k} \langle v, s_k \rangle \end{aligned}$$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:
  - $s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$
  - $$\begin{aligned} \langle v, s \rangle &= \langle v, \alpha_1 s_1 + \ldots \alpha_k s_k \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, s_1 \rangle + \cdots + \overline{\alpha_k} \langle v, s_k \rangle = 0 \end{aligned}$$

proposición

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:
  - $s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$
  - $$\begin{aligned} \langle v, s \rangle &= \langle v, \alpha_1 s_1 + \ldots \alpha_k s_k \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, s_1 \rangle + \cdots + \overline{\alpha_k} \langle v, s_k \rangle = 0 \end{aligned}$$
- $\Rightarrow v \in S^{\perp}$

demostración

- $\Rightarrow$) obvio $\surd$
- $\Leftarrow$) supongamos que $v \perp s_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow$ para todo $s \in S$ tenemos:
  - $s = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k$
  - $$\begin{aligned} \langle v, s \rangle &= \langle v, \alpha_1 s_1 + \ldots \alpha_k s_k \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, s_1 \rangle + \cdots + \overline{\alpha_k} \langle v, s_k \rangle = 0 \end{aligned}$$
- $\Rightarrow v \in S^{\perp}$ $\square$

ejemplo

ejemplo

- $V = \mathbb{R}^3$ con el producto usual

ejemplo

ejemplo

- $V = \mathbb{R}^3$ con el producto usual
- $S = \{(x, y, z) :\ x + y + z = 0\}$ (subespacio)

ejemplo

ejemplo

- $V = \mathbb{R}^3$ con el producto usual
- $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ (subespacio)
- $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ base de S

ejemplo

ejemplo

- $V = \mathbb{R}^3$ con el producto usual
- $S = \{(x, y, z) : \ x + y + z = 0\}$ (subespacio)
- $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ base de S
- $$S^{\perp} = \{(x, y, z) : \langle (x, y, z), (1, 0, -1) \rangle = \langle (x, y, z), (0, 1, -1) \rangle = 0\}$$

ejemplo

ejemplo

- $V = \mathbb{R}^3$ con el producto usual
- $S = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ (subespacio)
- $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ base de S
- $$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{(x, y, z) : \langle (x, y, z), (1, 0, -1)\rangle = \langle (x, y, z), (0, 1, -1)\rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : x - z = 0 \quad \text{y} \quad y - z = 0\} \end{aligned}$$

ejemplo

ejemplo

- $V = \mathbb{R}^3$ con el producto usual
- $S = \{(x, y, z) : \; x + y + z = 0\}$ (subespacio)
- $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ base de S
- $$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{(x, y, z) : \langle (x, y, z), (1, 0, -1)\rangle = \langle (x, y, z), (0, 1, -1)\rangle = 0\} \\ &= \{(x, y, z) : \; x - z = 0 \quad \text{y} \quad y - z = 0\} \\ &= \{(z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ejemplo

ejemplo

- $V = \mathbb{R}^3$ con el producto usual
- $S = \{(x,y,z) : \ x+y+z=0\}$ (subespacio)
- $B = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ base de S
- $$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(1,0,-1)\rangle = \langle (x,y,z),(0,1,-1)\rangle = 0\} \\ &= \{(x,y,z) : \ x-z=0 \quad \text{y} \quad y-z=0\} \\ &= \{(z,z,z) : z \in \mathbb{R}\} \\ S^{\perp} &= [(1,1,1)] \end{aligned}$$

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno
- $S \subset V$ s.e.v. de dimensión finita

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno
- $S \subset V$ s.e.v. de dimensión finita
- $\Rightarrow V = S \oplus S^{\perp}$

demostración

Vamos a probar:

1. $V = S + S^{\perp}$

demostración

Vamos a probar:

1. $V = S + S^{\perp}$
2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$

demostración

Vamos a probar:

1. $V = S + S^{\perp}$
2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
    - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \dots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - queremos probar que $v - v_S \in S^{\perp}$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - queremos probar que $v - v_S \in S^{\perp}$
   - porque entonces tenemos que:

$$v = v_S + v - v_S$$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \dots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - queremos probar que $v - v_S \in S^{\perp}$
   - porque entonces tenemos que:

$$v = \underset{\in S}{\underset{\uparrow}{v_S}} + \underset{\in S^{\perp}}{\underset{\uparrow}{v - v_S}}$$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - queremos probar que $v - v_S \in S^{\perp}$
   - porque entonces tenemos que:

$$\begin{array}{ccccc} v & = & v_S & + & v - v_S \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \in S & & \in S^{\perp} \end{array}$$

   - y eso probaría que $V = S + S^{\perp}$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - porque entonces tenemos que:

$$\begin{array}{ccccc} v & = & v_S & + & v - v_S \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \in S & & \in S^{\perp} \end{array}$$

   - y eso probaría que $V = S + S^{\perp}$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$\langle v - v_S, s_j \rangle \quad = \quad \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle \qquad \text{(def. } v_S\text{)}$$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$\begin{aligned} \langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\ &= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \end{aligned}$$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \dots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && (\langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij})
\end{aligned}
$$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - agarremos un vector $v \in V$ cualquiera,
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && = 0
\end{aligned}
$$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && = 0
\end{aligned}
$$

2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$:
   - supongamos $v \in S \cap S^{\perp}$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && = 0
\end{aligned}
$$

2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$:
   - supongamos $v \in S \cap S^{\perp}$
   - $\Rightarrow v \perp s$ para todo $s \in S$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && = 0
\end{aligned}
$$

2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$:
   - supongamos $v \in S \cap S^{\perp}$
   - $\Rightarrow v \perp s$ para todo $s \in S$
   - también para $s = v$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && = 0
\end{aligned}
$$

2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$:
   - supongamos $v \in S \cap S^{\perp}$
   - $\Rightarrow v \perp s$ para todo $s \in S$
   - también para $s = v$
   - $\Rightarrow v \perp v$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && = 0
\end{aligned}
$$

2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$:
   - supongamos $v \in S \cap S^{\perp}$
   - $\Rightarrow v \perp s$ para todo $s \in S$
   - también para $s = v$
   - $\Rightarrow v \perp v$
   - $\Rightarrow v = \vec{0}$

demostración

empezamos por

1. $V = S + S^{\perp}$:
   - $\{s_1, \ldots, s_k\}$ base ortonormal de S, y definamos:
   - $v_S = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \quad \in S$
   - veamos entonces que $v - v_S \perp S$:

$$
\begin{aligned}
\langle v - v_S, s_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle, s_j \right\rangle && \text{(def. } v_S\text{)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle \langle s_i, s_j \rangle && \text{(linealidad)} \\
&= \langle v, s_j \rangle - \langle v, s_j \rangle && = 0
\end{aligned}
$$

2. $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$:
   - supongamos $v \in S \cap S^{\perp}$
   - $\Rightarrow v \perp s$ para todo $s \in S$
   - también para $s = v$
   - $\Rightarrow v \perp v$
   - $\Rightarrow v = \vec{0}$ $\square$

observación

observación

- V e.v. con producto interno

observación

observación

- V e.v. con producto interno
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$

observación

observación

- V e.v. con producto interno
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (S^{\perp})^{\perp} = S$

observación

observación

- V e.v. con producto interno
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (S^{\perp})^{\perp} = S$
- (ejercicio)

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (\exists!) \qquad v = v_S + v_{\perp} \qquad \forall v \in V$

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (\exists!) \qquad v = v_S + v_{\perp} \qquad \forall v \in V$

definición (proyección ortogonal)

- proyección ortogonal de v:

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (\exists!) \qquad v = v_S + v_{\perp} \qquad \forall v \in V$

definición (proyección ortogonal)

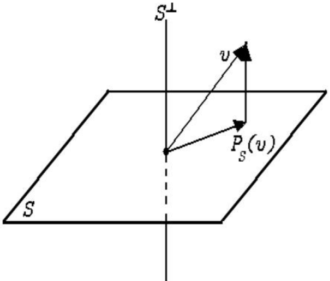
- proyección ortogonal de v:
- $P_S(v) := v_S$

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (\exists!) \qquad v = v_S + v_{\perp} \qquad \forall v \in V$

definición (proyección ortogonal)

- proyección ortogonal de v:
- $P_S(v) := v_S$

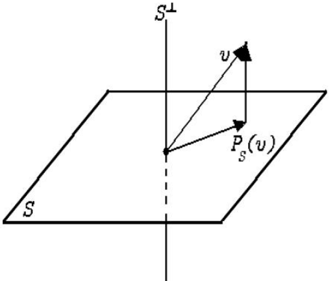


proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (\exists!) \qquad v = v_S + v_{\perp} \qquad \forall v \in V$

definición (proyección ortogonal)

- proyección ortogonal de v:
- $P_S(v) := v_S$



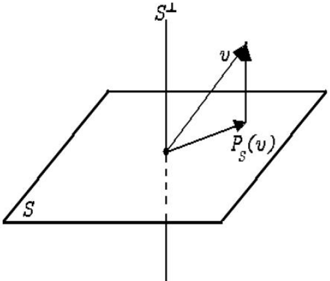
- $\dim V < \infty$

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (\exists!) \qquad v = v_S + v_{\perp} \qquad \forall v \in V$

definición (proyección ortogonal)

- proyección ortogonal de v:
- $P_S(v) := v_S$



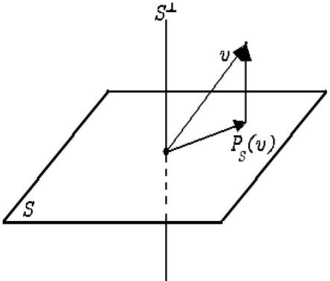
- $\dim V < \infty$
- $B = \{s_1, \ldots, s_k\}$ base de S

proyección ortogonal

- V e.v. con producto interno.
- S s.e.v. tal que $V = S \oplus S^{\perp}$
- $\Rightarrow (\exists!) \qquad v = v_S + v_{\perp} \qquad \forall v \in V$

definición (proyección ortogonal)

- proyección ortogonal de v:
- $P_S(v) := v_S$



- $\dim V < \infty$
- $B = \{s_1, \ldots, s_k\}$ base de S
- $\Rightarrow P_S(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i$

observación

1. $P_S(v)$ no depende de la base B

observación

1. $P_S(v)$ no depende de la base B
2. $V = S \oplus S^{\perp}$

observación

1. $P_S(v)$ no depende de la base B
2. $V = S \oplus S^{\perp}$

$$\Rightarrow \qquad v = P_S(v) + P_{S^{\perp}}(v)$$

teorema

teorema

- V e.v. con producto interno

teorema

teorema

- V e.v. con producto interno
- S s.e.v. de dimensión finita

teorema

teorema

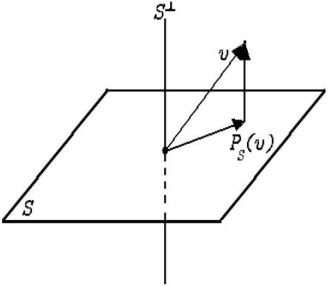
- V e.v. con producto interno
- S s.e.v. de dimensión finita
- $\Rightarrow \forall s \in S$

teorema

teorema

- V e.v. con producto interno
- S s.e.v. de dimensión finita
- $\Rightarrow \forall s \in S$

$$\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\|$$



demostración

$$\|v - s\|^2 \quad = \quad \langle v - s, v - s \rangle$$

demostración

$$\begin{aligned} \|v - s\|^2 &= \langle v - s, v - s \rangle \\ &= \langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s, P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s \rangle \end{aligned}$$

demostración

$$
\begin{aligned}
\|v-s\|^2 &= \langle v-s, v-s\rangle \\
&= \langle P_S(v)+P_{S^\perp}(v)-s, P_S(v)+P_{S^\perp}(v)-s\rangle \\
&= \langle P_S(v)-s, P_S(v)-s\rangle + 2\Re\langle P_S(v)-s, P_{S^\perp}(v)\rangle + \\
&+ \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle
\end{aligned}
$$

demostración

$$
\begin{aligned}
\|v - s\|^2 &= \langle v - s, v - s\rangle \\
&= \langle P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s, P_S(v) + P_{S^\perp}(v) - s\rangle \\
&= \langle P_S(v) - s, P_S(v) - s\rangle + 2\Re\langle P_S(v) - s, P_{S^\perp}(v)\rangle + \\
&+ \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&= \|P_S(v) - s\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2
\end{aligned}
$$

demostración

$$
\begin{aligned}
\|v-s\|^2 &= \langle v-s, v-s\rangle \\
&= \langle P_S(v)+P_{S^\perp}(v)-s, P_S(v)+P_{S^\perp}(v)-s\rangle \\
&= \langle P_S(v)-s, P_S(v)-s\rangle + 2\Re\langle P_S(v)-s, P_{S^\perp}(v)\rangle + \\
&+ \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&= \|P_S(v)-s\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow$ se alcanza el mínimo en $s = P_S(v) \in S$

demostración

$$
\begin{aligned}
\|v-s\|^2 &= \langle v-s, v-s\rangle \\
&= \langle P_S(v)+P_{S^\perp}(v)-s, P_S(v)+P_{S^\perp}(v)-s\rangle \\
&= \langle P_S(v)-s, P_S(v)-s\rangle + 2\Re\langle P_S(v)-s, P_{S^\perp}(v)\rangle + \\
&+ \langle P_{S^\perp}(v), P_{S^\perp}(v)\rangle \\
&= \|P_S(v)-s\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2
\end{aligned}
$$

- $\Rightarrow$ se alcanza el mínimo en $s = P_S(v) \in S$ $\square$