

Representación de Riesz

Adjunta de una representación lineal

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

5 de octubre de 2010

definición

definición

- llamamos funcional lineal **a**

definición

definición

- llamamos funcional lineal α
- $T : V \rightarrow \mathbb{K}$

definición

definición

- llamamos funcional lineal a
- $T : V \rightarrow \mathbb{K}$
- donde V e.v. sobre $\mathbb{K}$ cuerpo

ejemplo

ejemplo de funcional lineal

- dado V e.v. con producto interno

ejemplo

ejemplo de funcional lineal

- dado V e.v. con producto interno
- si $w \in V$

ejemplo

ejemplo de funcional lineal

- dado V e.v. con producto interno
- si $w \in V$
- entonces

ejemplo

ejemplo de funcional lineal

- dado V e.v. con producto interno
- si $w \in V$
- entonces
- $T_w(v) = \langle v, w \rangle$

ejemplo

ejemplo de funcional lineal

- dado V e.v. con producto interno
- si $w \in V$
- entonces
- $T_w(v) = \langle v, w \rangle$
- es un funcional lineal

teorema de representación de Riesz

teorema de representación de Riesz

- dado V e.v. de dimensión finita con producto interno

teorema de representación de Riesz

teorema de representación de Riesz

- dado V e.v. de dimensión finita con producto interno
- si $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal

teorema de representación de Riesz

teorema de representación de Riesz

- dado V e.v. de dimensión finita con producto interno
- si $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- entonces $\exists ! w \in V$ tal que

teorema de representación de Riesz

teorema de representación de Riesz

- dado V e.v. de dimensión finita con producto interno
- si $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- entonces $\exists! w \in V$ tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- en particular, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- en particular, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V
- queremos que $T(e_k) = \langle e_k, w \rangle$ para $k = 1, \dots, n$

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- en particular, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V
- queremos que $T(e_k) = \langle e_k, w \rangle$ para $k = 1, \dots, n$
- pero entonces tenemos $\langle w, e_k \rangle = \overline{T(e_k)}$

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- en particular, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V
- queremos que $T(e_k) = \langle e_k, w \rangle$ para $k = 1, \dots, n$
- pero entonces tenemos $\langle w, e_k \rangle = \overline{T(e_k)}$
- ahora $w = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle w, e_n \rangle e_n$

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- en particular, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V
- queremos que $T(e_k) = \langle e_k, w \rangle$ para $k = 1, \dots, n$
- pero entonces tenemos $\langle w, e_k \rangle = \overline{T(e_k)}$
- ahora $w = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle w, e_n \rangle e_n$
- $\Rightarrow w = \overline{T(e_1)} e_1 + \dots + \overline{T(e_n)} e_n$

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- en particular, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V
- queremos que $T(e_k) = \langle e_k, w \rangle$ para $k = 1, \dots, n$
- pero entonces tenemos $\langle w, e_k \rangle = \overline{T(e_k)}$
- ahora $w = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle w, e_n \rangle e_n$
- $\Rightarrow w = \overline{T(e_1)} e_1 + \dots + \overline{T(e_n)} e_n$
- es el w que hace $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$

demostración - existencia

- queremos encontrar w tal que
- $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- en particular, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormal de V
- queremos que $T(e_k) = \langle e_k, w \rangle$ para $k = 1, \dots, n$
- pero entonces tenemos $\langle w, e_k \rangle = \overline{T(e_k)}$
- ahora $w = \langle w, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle w, e_n \rangle e_n$
- $\Rightarrow w = \overline{T(e_1)} e_1 + \dots + \overline{T(e_n)} e_n$
- es el w que hace $T(v) = \langle v, w \rangle$ para todo $v \in V$
- (verificar)

demostración - unicidad

- si hubiera dos vectores w_1 y w_2 tales que

demostración - unicidad

- si hubiera dos vectores w_1 y w_2 tales que
- $T(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$ para todo $v \in V$

demostración - unicidad

- si hubiera dos vectores w_1 y w_2 tales que
- $T(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$ para todo $v \in V$
- entonces $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$ para todo $v \in V$

demostración - unicidad

- si hubiera dos vectores w_1 y w_2 tales que
- $T(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$ para todo $v \in V$
- entonces $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$ para todo $v \in V$
- $\Rightarrow w_1 - w_2 = \vec{0}$

demostración - unicidad

- si hubiera dos vectores w_1 y w_2 tales que
- $T(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$ para todo $v \in V$
- entonces $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$ para todo $v \in V$
- $\Rightarrow w_1 - w_2 = \vec{0}$
- $\Rightarrow w_1 = w_2$

demostración - unicidad

- si hubiera dos vectores w_1 y w_2 tales que
- $T(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$ para todo $v \in V$
- entonces $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$ para todo $v \in V$
- $\Rightarrow w_1 - w_2 = \vec{0}$
- $\Rightarrow w_1 = w_2 \quad \square$

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- queremos determinar w representante de Riesz

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- queremos determinar w representante de Riesz
- tomamos base canónica, y tenemos

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- queremos determinar w representante de Riesz
- tomamos base canónica, y tenemos
- $w_1 = T(e_1) = 4,$

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- queremos determinar w representante de Riesz
- tomamos base canónica, y tenemos
- $w_1 = T(e_1) = 4$, $w_2 = T(e_2) = 0$,

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- queremos determinar w representante de Riesz
- tomamos base canónica, y tenemos
- $w_1 = T(e_1) = 4$, $w_2 = T(e_2) = 0$, $w_3 = T(e_3) = -1$

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- queremos determinar w representante de Riesz
- tomamos base canónica, y tenemos
- $w_1 = T(e_1) = 4$, $w_2 = T(e_2) = 0$, $w_3 = T(e_3) = -1$
- $\Rightarrow w = (4, 0, -1)$

ejemplo

ejemplo

- sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- queremos determinar w representante de Riesz
- tomamos base canónica, y tenemos
- $w_1 = T(e_1) = 4$, $w_2 = T(e_2) = 0$, $w_3 = T(e_3) = -1$
- $\Rightarrow w = (4, 0, -1)$
- $\Rightarrow T(x, y, z) = \langle (x, y, z), (4, 0, -1) \rangle$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

● sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$
- ahora, $\dim \ker(T) = \dim V - \dim \Im(T) = n - 1$ (sino $T \equiv 0$)

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$
- ahora, $\dim \ker(T) = \dim V - \dim \Im(T) = n - 1$ (sino $T \equiv 0$)
- $\Rightarrow \dim \ker(T)^\perp = 1$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$
- ahora, $\dim \ker(T) = \dim V - \dim \Im(T) = n - 1$ (sino $T \equiv 0$)
- $\Rightarrow \dim \ker(T)^\perp = 1$
- tomamos e vector ortonormal en $\ker(T)^\perp$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$
- ahora, $\dim \ker(T) = \dim V - \dim \Im(T) = n - 1$ (sino $T \equiv 0$)
- $\Rightarrow \dim \ker(T)^\perp = 1$
- tomamos e vector ortonormal en $\ker(T)^\perp$
- y tenemos para todo $v \in V$: $v_\perp = \langle v, e \rangle e$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$
- ahora, $\dim \ker(T) = \dim V - \dim \Im(T) = n - 1$ (sino $T \equiv 0$)
- $\Rightarrow \dim \ker(T)^\perp = 1$
- tomamos e vector ortonormal en $\ker(T)^\perp$
- y tenemos para todo $v \in V$: $v_\perp = \langle v, e \rangle e$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp) = \langle v, e \rangle T(e)$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$
- ahora, $\dim \ker(T) = \dim V - \dim \Im(T) = n - 1$ (sino $T \equiv 0$)
- $\Rightarrow \dim \ker(T)^\perp = 1$
- tomamos e vector ortonormal en $\ker(T)^\perp$
- y tenemos para todo $v \in V$: $v_\perp = \langle v, e \rangle e$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp) = \langle v, e \rangle T(e)$
- $\Rightarrow T(v) = \langle v, \overline{T(e)}e \rangle$

otra forma de encontrar el representante de Riesz

- sea $T : V \rightarrow \mathbb{K}$ funcional lineal
- $\Rightarrow V = \ker(T) \oplus \ker(T)^\perp$
- $\Rightarrow v = v_0 + v_\perp$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp)$
- ahora, $\dim \ker(T) = \dim V - \dim \Im(T) = n - 1$ (sino $T \equiv 0$)
- $\Rightarrow \dim \ker(T)^\perp = 1$
- tomamos e vector ortonormal en $\ker(T)^\perp$
- y tenemos para todo $v \in V$: $v_\perp = \langle v, e \rangle e$
- $\Rightarrow T(v) = T(v_\perp) = \langle v, e \rangle T(e)$
- $\Rightarrow T(v) = \langle v, \overline{T(e)e} \rangle \quad \square$

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- $\Rightarrow \ker(T) = \{(x, y, z) : 4x - z = 0\}$ (plano)

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- $\Rightarrow \ker(T) = \{(x, y, z) : 4x - z = 0\}$ (plano)
- $\ker(T)^\perp = \mathbb{R}(4, 0, -1)$ (dirección normal al plano)

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- $\Rightarrow \ker(T) = \{(x, y, z) : 4x - z = 0\}$ (plano)
- $\ker(T)^\perp = \mathbb{R}(4, 0, -1)$ (dirección normal al plano)
- $e = \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, -1)$

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- $\Rightarrow \ker(T) = \{(x, y, z) : 4x - z = 0\}$ (plano)
- $\ker(T)^\perp = \mathbb{R}(4, 0, -1)$ (dirección normal al plano)
- $e = \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, -1)$
- $T(x, y, z) = \langle (x, y, z), T(e)e \rangle$

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- $\Rightarrow \ker(T) = \{(x, y, z) : 4x - z = 0\}$ (plano)
- $\ker(T)^\perp = \mathbb{R}(4, 0, -1)$ (dirección normal al plano)
- $e = \frac{1}{17}(4, 0, -1)$
- $T(x, y, z) = \langle (x, y, z), T(e)e \rangle$
- notar que $T(e)e = \frac{1}{17} \cdot 17(4, 0, -1)$

el ejemplo anterior con otro enfoque

ejemplo

- volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $T(x, y, z) = 4x - z$
- $\Rightarrow \ker(T) = \{(x, y, z) : 4x - z = 0\}$ (plano)
- $\ker(T)^\perp = \mathbb{R}(4, 0, -1)$ (dirección normal al plano)
- $e = \frac{1}{17}(4, 0, -1)$
- $T(x, y, z) = \langle (x, y, z), T(e)e \rangle$
- notar que $T(e)e = \frac{1}{17} \cdot 17(4, 0, -1) = (4, 0, -1)$

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- funcional lineal $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(0)$

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- funcional lineal $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(0)$
- supongamos que $\exists q_0 \in V$ tal que $T(p) = \langle p, q_0 \rangle$ para todo p

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- funcional lineal $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(0)$
- supongamos que $\exists q_0 \in V$ tal que $T(p) = \langle p, q_0 \rangle$ para todo p
- $\Rightarrow T(xp) = 0 = \int_0^1 xp(x)q_0(x) dx$ para todo p

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- funcional lineal $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(0)$
- supongamos que $\exists q_0 \in V$ tal que $T(p) = \langle p, q_0 \rangle$ para todo p
- $\Rightarrow T(xp) = 0 = \int_0^1 xp(x)q_0(x) dx$ para todo p
- $\Rightarrow \langle p(x), xq_0(x) \rangle = 0$ para todo p

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- funcional lineal $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(0)$
- supongamos que $\exists q_0 \in V$ tal que $T(p) = \langle p, q_0 \rangle$ para todo p
- $\Rightarrow T(xp) = 0 = \int_0^1 xp(x)q_0(x) dx$ para todo p
- $\Rightarrow \langle p(x), xq_0(x) \rangle = 0$ para todo p
- $\Rightarrow xq_0(x) \equiv 0$

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- funcional lineal $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(0)$
- supongamos que $\exists q_0 \in V$ tal que $T(p) = \langle p, q_0 \rangle$ para todo p
- $\Rightarrow T(xp) = 0 = \int_0^1 xp(x)q_0(x) dx$ para todo p
- $\Rightarrow \langle p(x), xq_0(x) \rangle = 0$ para todo p
- $\Rightarrow xq_0(x) \equiv 0$
- $\Rightarrow q_0(x) \equiv 0$

Teorema Riesz no vale en dimensión infinita

ejemplo

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ (dimensión infinita)
- producto interno: $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- funcional lineal $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T(p) = p(0)$
- supongamos que $\exists q_0 \in V$ tal que $T(p) = \langle p, q_0 \rangle$ para todo p
- $\Rightarrow T(xp) = 0 = \int_0^1 xp(x)q_0(x) dx$ para todo p
- $\Rightarrow \langle p(x), xq_0(x) \rangle = 0$ para todo p
- $\Rightarrow xq_0(x) \equiv 0$
- $\Rightarrow q_0(x) \equiv 0$ ABSURDO

definición: adjunta

problema

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

definición: adjunta

problema

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal

definición: adjunta

problema

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- cualquier función $T^* : W \rightarrow V$ se llama adjunta de T si

definición: adjunta

problema

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- cualquier función $T^* : W \rightarrow V$ se llama adjunta de T si
-

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \quad \forall v \in V \ w \in W$$

teorema de existencia y unicidad

teorema: $\exists!$ adjunta

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita

teorema de existencia y unicidad

teorema: $\exists!$ adjunta

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- toda $T : V \rightarrow W$ transformación lineal

teorema de existencia y unicidad

teorema: $\exists!$ adjunta

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- toda $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- tiene una única $T^* : W \rightarrow V$ transformación lineal adjunta

demostración - unicidad

- si hubiera dos T_1^* y T_2^*

demostración - unicidad

- si hubiera dos T_1^* y T_2^*
- entonces tendríamos

demostración - unicidad

- si hubiera dos T_1^* y T_2^*
- entonces tendríamos
-

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T_1^*(w) \rangle = \langle v, T_2^*(w) \rangle \quad \forall v, w$$

demostración - unicidad

- si hubiera dos T_1^* y T_2^*
- entonces tendríamos
-

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T_1^*(w) \rangle = \langle v, T_2^*(w) \rangle \quad \forall v, w$$

- $\Rightarrow \langle v, T_1^*(w) - T_2^*(w) \rangle$ para todo v, w

demostración - unicidad

- si hubiera dos T_1^* y T_2^*
- entonces tendríamos
-

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T_1^*(w) \rangle = \langle v, T_2^*(w) \rangle \quad \forall v, w$$

- $\Rightarrow \langle v, T_1^*(w) - T_2^*(w) \rangle$ para todo v, w
- $\Rightarrow T_1^*(w) = T_2^*(w)$ para todo $w \in W$

demostración - unicidad

- si hubiera dos T_1^* y T_2^*
- entonces tendríamos
-

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T_1^*(w) \rangle = \langle v, T_2^*(w) \rangle \quad \forall v, w$$

- $\Rightarrow \langle v, T_1^*(w) - T_2^*(w) \rangle$ para todo v, w
- $\Rightarrow T_1^*(w) = T_2^*(w)$ para todo $w \in W$ $\square$

demostración - existencia

- para cada $w \in W$ fijo, la transformación:

demostración - existencia

- para cada $w \in W$ fijo, la transformación:
- $T_w(v) = \langle T(v), w \rangle$

demostración - existencia

- para cada $w \in W$ fijo, la transformación:
- $T_w(v) = \langle T(v), w \rangle$
- es un funcional lineal

demostración - existencia

- para cada $w \in W$ fijo, la transformación:
- $T_w(v) = \langle T(v), w \rangle$
- es un funcional lineal
- $\Rightarrow$ por teorema de representación de Riesz $\exists!$ $T^*(w)$ tal que

demostración - existencia

- para cada $w \in W$ fijo, la transformación:
- $T_w(v) = \langle T(v), w \rangle$
- es un funcional lineal
- $\Rightarrow$ por teorema de representación de Riesz $\exists!$ $T^*(w)$ tal que
- $T_w(v) = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$

demostración - existencia

- para cada $w \in W$ fijo, la transformación:
- $T_w(v) = \langle T(v), w \rangle$
- es un funcional lineal
- $\Rightarrow$ por teorema de representación de Riesz $\exists!$ $T^*(w)$ tal que
- $T_w(v) = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$
- $\therefore$ existe adjunta de T

demostración - linealidad

- veamos que T^* es lineal

demostración - linealidad

- veamos que T^* es lineal
- sean $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

demostración - linealidad

- veamos que T^* es lineal
- sean $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
-

$$\langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \rangle = \langle T(v), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle$$

demostración - linealidad

- veamos que T^* es lineal
- sean $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
-

$$\begin{aligned}\langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \rangle &= \langle T(v), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle T(v), w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle T(v), w_2 \rangle\end{aligned}$$

demostración - linealidad

- veamos que T^* es lineal
- sean $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
-

$$\begin{aligned}
 \langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \rangle &= \langle T(v), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle \\
 &= \overline{\alpha_1} \langle T(v), w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle T(v), w_2 \rangle \\
 &= \overline{\alpha_1} \langle v, T^*(w_1) \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v, T^*(w_2) \rangle
 \end{aligned}$$

demostración - linealidad

- veamos que T^* es lineal
- sean $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
-

$$\begin{aligned}
 \langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \rangle &= \langle T(v), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle \\
 &= \overline{\alpha_1} \langle T(v), w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle T(v), w_2 \rangle \\
 &= \overline{\alpha_1} \langle v, T^*(w_1) \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v, T^*(w_2) \rangle \\
 &= \langle v, \alpha_1 T^*(w_1) + \alpha_2 T^*(w_2) \rangle
 \end{aligned}$$

demostración - linealidad

- veamos que T^* es lineal
- sean $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$
-

$$\begin{aligned}
 \langle v, T^*(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \rangle &= \langle T(v), \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \rangle \\
 &= \overline{\alpha_1} \langle T(v), w_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle T(v), w_2 \rangle \\
 &= \overline{\alpha_1} \langle v, T^*(w_1) \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v, T^*(w_2) \rangle \\
 &= \langle v, \alpha_1 T^*(w_1) + \alpha_2 T^*(w_2) \rangle
 \end{aligned}$$

