

Adjunta de una representación lineal Ejemplos. Propiedades

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

12 de octubre de 2010

definición: adjunta

definición (clase pasada)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

definición: adjunta

definición (clase pasada)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal

definición: adjunta

definición (clase pasada)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- cualquier función $T^* : W \rightarrow V$ se llama adjunta de T si

definición: adjunta

definición (clase pasada)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- cualquier función $T^* : W \rightarrow V$ se llama adjunta de T si
-

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \quad \forall v \in V \ w \in W$$

teorema de existencia y unicidad

teorema: $\exists!$ adjunta (clase pasada)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita

teorema de existencia y unicidad

teorema: $\exists!$ adjunta (clase pasada)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- toda $T : V \rightarrow W$ transformación lineal

teorema de existencia y unicidad

teorema: $\exists!$ adjunta (clase pasada)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- toda $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- tiene una única $T^* : W \rightarrow V$ transformación lineal adjunta

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0) \rangle =$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (1, 0, 0) \rangle$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (1, 0, 0) \rangle = x - y + 2z$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (1, 0, 0) \rangle =$
 $x - y + 2z = \langle (x, y, z), (1, -1, 2) \rangle \quad \forall (x, y, z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\langle (x, y, z), T^*(1, 0, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (1, 0, 0) \rangle =$
 $x - y + 2z = \langle (x, y, z), (1, -1, 2) \rangle \quad \forall (x, y, z)$
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 1, 0) \rangle =$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 1, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 1, 0) \rangle$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 1, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 4x - 3z$

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 1, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 4x - 3z = \langle (x, y, z), (4, 0, -3) \rangle \quad \forall (x, y, z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 1, 0) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 1, 0) \rangle = 4x - 3z = \langle (x, y, z), (4, 0, -3) \rangle \quad \forall (x, y, z)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 0, 1) \rangle =$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 0, 1) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 0, 1) \rangle$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 0, 1) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = x + 5y + z$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 0, 1) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 0, 1) \rangle =$
 $x + 5y + z = \langle (x, y, z), (1, 5, 1) \rangle \quad \forall (x, y, z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$
- $\langle (x, y, z), T^*(0, 0, 1) \rangle = \langle T(x, y, z), (0, 0, 1) \rangle =$
 $x + 5y + z = \langle (x, y, z), (1, 5, 1) \rangle \quad \forall (x, y, z)$
- $\Rightarrow T^*(0, 0, 1) = (1, 5, 1)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$
- $\Rightarrow T^*(0, 0, 1) = (1, 5, 1)$
- $\therefore T^*(x, y, z) = x(1, -1, 2) + y(4, 0, -3) + z(1, 5, 1)$

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, consideramos
- $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x - 3z, x + 5y + z)$
- calculemos $T^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, alcanza con base canónica
- $\Rightarrow T^*(1, 0, 0) = (1, -1, 2)$
- $\Rightarrow T^*(0, 1, 0) = (4, 0, -3)$
- $\Rightarrow T^*(0, 0, 1) = (1, 5, 1)$
- $\therefore T^*(x, y, z) = x(1, -1, 2) + y(4, 0, -3) + z(1, 5, 1) = (x + 4y + z, -x + 5z, 2x - 3y + z)$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle =$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle = \langle T(A), B \rangle$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle = \langle T(A), B \rangle = \langle M.A, B \rangle$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle = \langle T(A), B \rangle = \langle M.A, B \rangle = \text{tr}(B^t.(M.A))$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle = \langle T(A), B \rangle = \langle M.A, B \rangle = \text{tr}(B^t.(M.A)) = \text{tr}((B^t.M)A)$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle = \langle T(A), B \rangle = \langle M.A, B \rangle = \text{tr}(B^t.(M.A)) = \text{tr}((B^t.M)A) = \text{tr}((M^t.B)^t A)$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle = \langle T(A), B \rangle = \langle M.A, B \rangle = \text{tr}(B^t.(M.A)) = \text{tr}((B^t.M)A) = \text{tr}((M^t.B)^t A) = \langle A, M^t.B \rangle \quad \forall A$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t.A)$
- $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = M.A$ (M matriz fija)
- calculemos T^*
- $\langle A, T^*(B) \rangle = \langle T(A), B \rangle = \langle M.A, B \rangle = \text{tr}(B^t.(M.A)) = \text{tr}((B^t.M)A) = \text{tr}((M^t.B)^t A) = \langle A, M^t.B \rangle \quad \forall A$
- $\Rightarrow T^*(B) = M^t.B$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^* q \rangle =$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq \rangle$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq \rangle$ por partes

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq \rangle$ por partes
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0)$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq \rangle$ por partes
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0)$
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)(x - 1) \rangle = p(0)$

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq \rangle$ por partes
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0)$
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)(x - 1) \rangle = p(0)$
- $\Rightarrow$ la aplicación $Tp = p(0)$ tendría un representante de Riesz

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq \rangle$ por partes
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0)$
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)(x - 1) \rangle = p(0)$
- $\Rightarrow$ la aplicación $Tp = p(0)$ tendría un representante de Riesz
- la clase pasada vimos que no tiene

ejemplo 3

transformación sin adjunta

ejemplo 3 (transformación sin adjunta)

- $V = \{\text{polinomios reales}\}$ con producto
 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$
- consideramos $D : V \rightarrow V$ tal que $Dp = p'$
- si D tuviera adjunta, entonces
- $\langle p, D^*q \rangle = \langle Dp, q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq \rangle$ por partes
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)q \rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0)$
- $\Rightarrow \langle p, (D^* + D)(x - 1) \rangle = p(0)$
- $\Rightarrow$ la aplicación $Tp = p(0)$ tendría un representante de Riesz
- la clase pasada vimos que no tiene
- $\Rightarrow D$ no tiene adjunta

proposición 1

proposición 1

- Sean V, W, U e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

proposición 1

proposición 1

- Sean V, W, U e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T_1, T_2 : V \rightarrow W, T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$

proposición 1

proposición 1

- Sean V, W, U e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T_1, T_2 : V \rightarrow W, T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$
- entonces

proposición 1

proposición 1

- Sean V, W, U e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T_1, T_2 : V \rightarrow W, T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$
- entonces
 - $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

proposición 1

proposición 1

- Sean V, W, U e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T_1, T_2 : V \rightarrow W, T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$
- entonces
 - 1 $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
 - 2 $(\alpha \cdot T)^* = \bar{\alpha} \cdot T^*$

proposición 1

proposición 1

- Sean V, W, U e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T_1, T_2 : V \rightarrow W, T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$
- entonces
 - 1 $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
 - 2 $(\alpha \cdot T)^* = \overline{\alpha} \cdot T^*$
 - 3 $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

proposición 1

proposición 1

- Sean V, W, U e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T_1, T_2 : V \rightarrow W, T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$
- entonces
 - 1 $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
 - 2 $(\alpha \cdot T)^* = \overline{\alpha} \cdot T^*$
 - 3 $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
 - 4 $Id^* = Id$

demostración

ejercicio

proposición 2

proposición 2

- V, W e.v. de dimensión finita

proposición 2

proposición 2

- V, W e.v. de dimensión finita
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal

proposición 2

proposición 2

- V, W e.v. de dimensión finita
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- $\Rightarrow$

$$(T^*)^* = T$$

demostración

Para todo $x \in W, y \in V$

demostración

Para todo $x \in W, y \in V$

$$\langle x, (T^*)^* y \rangle = \langle T^* x, y \rangle$$

demostración

Para todo $x \in W, y \in V$

$$\begin{aligned}\langle x, (T^*)^* y \rangle &= \langle T^* x, y \rangle \\ &= \overline{\langle y, T^* x \rangle}\end{aligned}$$

demostración

Para todo $x \in W, y \in V$

$$\begin{aligned}\langle x, (T^*)^* y \rangle &= \langle T^* x, y \rangle \\ &= \overline{\langle y, T^* x \rangle} \\ &= \overline{\langle Ty, x \rangle}\end{aligned}$$

demostración

Para todo $x \in W, y \in V$

$$\begin{aligned}\langle x, (T^*)^* y \rangle &= \langle T^* x, y \rangle \\ &= \overline{\langle y, T^* x \rangle} \\ &= \overline{\langle Ty, x \rangle} \\ &= \langle x, Ty \rangle\end{aligned}$$

demostración

Para todo $x \in W, y \in V$

$$\begin{aligned}\langle x, (T^*)^* y \rangle &= \langle T^* x, y \rangle \\ &= \overline{\langle y, T^* x \rangle} \\ &= \overline{\langle Ty, x \rangle} \\ &= \langle x, Ty \rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (T^*)^* = T$$

demostración

Para todo $x \in W, y \in V$

$$\begin{aligned}\langle x, (T^*)^* y \rangle &= \langle T^* x, y \rangle \\ &= \overline{\langle y, T^* x \rangle} \\ &= \overline{\langle Ty, x \rangle} \\ &= \langle x, Ty \rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (T^*)^* = T \quad \square$$

proposición 3

proposición 3

- V, W e.v. de dimensión finita

proposición 3

proposición 3

- V, W e.v. de dimensión finita
- sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal

proposición 3

proposición 3

- V, W e.v. de dimensión finita
- sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- entonces T invertible $\Leftrightarrow T^*$ invertible

proposición 3

proposición 3

- V, W e.v. de dimensión finita
- sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- entonces T invertible $\Leftrightarrow T^*$ invertible
- y

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

demostración

Supongamos que T es invertible

$$\langle v_1, v_2 \rangle =$$

demostración

Supongamos que T es invertible

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle T^{-1} T v_1, v_2 \rangle$$

demostración

Supongamos que T es invertible

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2 \rangle &= \langle T^{-1} T v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, T^* (T^{-1})^* v_2 \rangle\end{aligned}$$

demostración

Supongamos que T es invertible

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2 \rangle &= \langle T^{-1} T v_1, v_2 \rangle \\ &= \langle v_1, T^* (T^{-1})^* v_2 \rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow T^*$ invertible

proposición 4

proposición 4

- V, W e.v. de dimensión finita

proposición 4

proposición 4

- V, W e.v. de dimensión finita
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal

proposición 4

proposición 4

- V, W e.v. de dimensión finita
- $T : V \rightarrow W$ transformación lineal
- entonces

$$\lambda \text{ valor propio de } T \iff \bar{\lambda} \text{ valor propio de } T^*$$

demostración

- λ valor propio de T

demostración

- λ valor propio de T
- $\Leftrightarrow T - \lambda I$ no invertible

demostración

- λ valor propio de T
- $\Leftrightarrow T - \lambda I$ no invertible
- $\Leftrightarrow (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I$ no invertible

demostración

- λ valor propio de T
- $\Leftrightarrow T - \lambda I$ no invertible
- $\Leftrightarrow (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$ no invertible
- $\Leftrightarrow \bar{\lambda}$ valor propio de T^*