Representación de la adjunta en bases ortonormales
Operadores autoadjuntos

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

14 de octubre de 2010

lema general

lema representación matricial de una t.l.

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

lema general

lema representación matricial de una t.l.

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \to W$ transformación lineal

lema general

lema representación matricial de una t.l.

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \to W$ transformación lineal
- $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V

lema general

lema representación matricial de una t.l.

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \to W$ transformación lineal
- $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V
- $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base ortonormal de W

lema general

lema representación matricial de una t.l.

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \to W$ transformación lineal
- $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V
- $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base ortonormal de W
- entonces ${}_C(T)_{\mathcal{B}} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con

$$a_{ij} = \langle T(v_j), w_i\rangle \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array}$$

demostración

- $A = _{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ matriz asociada a T

demostración

- $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ matriz asociada a T
- $\Rightarrow$ columna j= $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \mathrm{coord}_{\mathcal{C}}(T(v_j))$

demostración

- $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ matriz asociada a T
- $\Rightarrow$ columna j= $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \text{coord}_{\mathcal{C}}(T(v_j))$
- como $\mathcal{C}$ base ortonormal,

$$T(v_j) = \langle T(v_j), w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle T(v_j), w_m \rangle w_m$$

demostración

- $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ matriz asociada a T
- $\Rightarrow$ columna j= $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \text{coord}_{\mathcal{C}}(T(v_j))$
- como $\mathcal{C}$ base ortonormal,

$$T(v_j) = \langle T(v_j), w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle T(v_j), w_m \rangle w_m$$

- $\Rightarrow$ coord$_{\mathcal{C}}(Tv_j)$=columna j de $A = \begin{pmatrix} \langle T(v_j), w_1 \rangle \\ \langle T(v_j), w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle T(v_j), w_m \rangle \end{pmatrix}$

demostración

- $A =_{C} (T)_{\mathcal{B}}$ matriz asociada a T
- $\Rightarrow$ columna j= $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \text{coord}_C(T(v_j))$
- como C base ortonormal,

$$T(v_j) = \langle T(v_j), w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle T(v_j), w_m \rangle w_m$$

- $\Rightarrow$ coord$_C(Tv_j)$=columna j de A = $\begin{pmatrix} \langle T(v_j), w_1 \rangle \\ \langle T(v_j), w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle T(v_j), w_m \rangle \end{pmatrix}$
- $\Rightarrow a_{ij} = \langle T(v_j), w_i \rangle$

demostración

- $A =_C (T)_{\mathcal{B}}$ matriz asociada a T
- $\Rightarrow$ columna j= $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \text{coord}_C(T(v_j))$
- como C base ortonormal,

$$T(v_j) = \langle T(v_j), w_1 \rangle w_1 + \cdots + \langle T(v_j), w_m \rangle w_m$$

- $\Rightarrow$ coord$_C(Tv_j)$=columna j de $A = \begin{pmatrix} \langle T(v_j), w_1 \rangle \\ \langle T(v_j), w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle T(v_j), w_m \rangle \end{pmatrix}$
- $\Rightarrow a_{ij} = \langle T(v_j), w_i \rangle$ $\square$

matriz asociada de la adjunta

proposición (matriz asociada de la adjunta)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$

matriz asociada de la adjunta

proposición (matriz asociada de la adjunta)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$
- $T : V \longrightarrow W$ t.l.

matriz asociada de la adjunta

proposición (matriz asociada de la adjunta)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$
- $T : V \to W$ t.l.
- $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V

matriz asociada de la adjunta

proposición (matriz asociada de la adjunta)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$
- $T : V \to W$ t.l.
- $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V
- $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base ortonormal de W

matriz asociada de la adjunta

proposición (matriz asociada de la adjunta)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$
- $T : V \to W$ t.l.
- $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V
- $C = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base ortonormal de W
- $\Rightarrow$

$$_{\mathcal{B}}(T^*)_C = \overline{[_C(T)_{\mathcal{B}}]}^t$$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$
- queremos ver que $B = \overline{A}^t$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$
- queremos ver que $B = \overline{A}^t$
- o sea, queremos ver que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$
- queremos ver que $B = \overline{A}^t$
- o sea, queremos ver que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$
- ahora

$$b_{ij} = \langle T^*(w_j), v_i \rangle$$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$
- queremos ver que $B = \overline{A}^t$
- o sea, queremos ver que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$
- ahora

$$b_{ij} = \langle T^*(w_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, T^*(w_j) \rangle}$$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$
- queremos ver que $B = \overline{A}^t$
- o sea, queremos ver que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$
- ahora

$$b_{ij} = \langle T^*(w_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, T^*(w_j) \rangle} = \overline{\langle T(v_i), w_j \rangle}$$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y $_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$
- queremos ver que $B = \overline{A}^t$
- o sea, queremos ver que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$
- ahora

$$b_{ij} = \langle T^*(w_j), v_i\rangle = \overline{\langle v_i, T^*(w_j)\rangle} = \overline{\langle T(v_i), w_j\rangle} = \overline{a_{ji}}^t$$

demostración

- sean $A =_{\mathcal{C}} (T)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{C}}$
- queremos ver que $B = \overline{A}^t$
- o sea, queremos ver que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$
- ahora

$$b_{ij} = \langle T^*(w_j), v_i \rangle = \overline{\langle v_i, T^*(w_j) \rangle} = \overline{\langle T(v_i), w_j \rangle} = \overline{a_{ji}}^t$$

- $\square$

operadores autoadjuntos

definición (operador autoadjunto)

- V e.v. con producto interno

operadores autoadjuntos

definición (operador autoadjunto)

- V e.v. con producto interno
- $T : V \to V$ operador lineal autoadjunto

operadores autoadjuntos

definición (operador autoadjunto)

- V e.v. con producto interno
- $T : V \to V$ operador lineal autoadjunto
- si

$$T = T^*$$

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno
- $T : V \to V$ operador lineal

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno
- $T : V \to V$ operador lineal
- entonces

$$T \text{ autoadjunto} \quad \Leftrightarrow \quad \langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

demostración

ejercicio

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno sobre $\mathbb{C}$

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno sobre $\mathbb{C}$
- $T : V \to V$ operador lineal

proposición

proposición

- V e.v. con producto interno sobre $\mathbb{C}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- entonces

$$T \text{ autoadjunto} \quad \Leftrightarrow \quad \langle T(v), v \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

demostración

- no la vamos a dar (consultar libro rojo)

demostración

- no la vamos a dar (consultar libro rojo)
- la proposición no vale si V e.v. sobre $\mathbb{R}$

matriz simétrica

matriz simétrica

matriz simétrica

matriz simétrica

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matriz simétrica

matriz simétrica

matriz simétrica

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matriz simétrica
- si

$$A^t = A$$

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$
- $T : V \to V$ operador lineal

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:
  1. T autoadjunto

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:
  1. T autoadjunto
  2. $\forall\, \mathcal{B}$ base ortonormal de V: ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz simétrica

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:
  1. T autoadjunto
  2. $\forall\, \mathcal{B}$ base ortonormal de V: ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz simétrica
  3. $\exists\, \mathcal{B}_0$ base ortonormal de V tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ matriz simétrica

demostración 1 $\Rightarrow$ 2

- $$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = _{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$$
- xq $T = T^*$ (autoadjunto)

demostración 1 $\Rightarrow$ 2

- $$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{[_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}]}^t$$
- xq $T = T^*$ (autoadjunto)
- proposición anterior

demostración 1 $\Rightarrow$ 2

- $$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = _{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{[_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}]}^t = [_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}]^t$$

- xq $T = T^*$ (autoadjunto)
- proposición anterior
- xq $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz real

demostración 1 $\Rightarrow$ 2

- $$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{[_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}]}^t = [_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}]^t$$

- xq $T = T^*$ (autoadjunto)
- proposición anterior
- xq $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz real
- $\Rightarrow$ $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz simétrica para cualquier base ortonormal $\mathcal{B}$

demostración 1 $\Rightarrow$ 2

- $$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \overline{[_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}]}^t = [_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}]^t$$
- xq $T = T^*$ (autoadjunto)
- proposición anterior
- xq $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz real
- $\Rightarrow$ $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz simétrica para cualquier base ortonormal $\mathcal{B}$ $\square$

demostración 2 $\Rightarrow$ 3

- OBVIO

demostración 2 $\Rightarrow$ 3

- OBVIO
- si vale para toda base ortonormal, vale para alguna base ortonormal

demostración 3 $\Rightarrow$ 1

- sea $\mathcal{B}_0$ tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ sea simétrica

demostración 3 $\Rightarrow$ 1

- sea $\mathcal{B}_0$ tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ sea simétrica
- entonces

$$ {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} = [{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t $$

demostración 3 $\Rightarrow$ 1

- sea $\mathcal{B}_0$ tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ sea simétrica
- entonces

$$ {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} = [{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t = \overline{[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]}^t $$

- por ser $[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t$ matriz real

demostración 3 $\Rightarrow$ 1

- sea $\mathcal{B}_0$ tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ sea simétrica
- entonces

$$ {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} = [{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t = \overline{[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]}^t = {}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0} $$

- por ser $[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t$ matriz real
- por proposición anterior

demostración 3 $\Rightarrow$ 1

- sea $\mathcal{B}_0$ tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ sea simétrica
- entonces

$$ {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} = [{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t = \overline{[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]}^t = {}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0} $$

- por ser $[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t$ matriz real
- por proposición anterior
- $\Rightarrow$ T y T^* coinciden en la base $\mathcal{B}_0$

demostración 3 $\Rightarrow$ 1

- sea $\mathcal{B}_0$ tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ sea simétrica
- entonces

$$ {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} = [{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t = \overline{[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]}^t = {}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0} $$

- por ser $[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}]^t$ matriz real
- por proposición anterior
- $\Rightarrow$ T y T^* coinciden en la base $\mathcal{B}_0$
- $\Rightarrow$ $T = T^*$ (autoadjunto)

demostración 3 $\Rightarrow$ 1

- sea $\mathcal{B}_0$ tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ sea simétrica
- entonces

$$ {}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0} = \left[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}\right]^t = \overline{\left[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}\right]}^t = {}_{\mathcal{B}_0}(T^*)_{\mathcal{B}_0} $$

- por ser $\left[{}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}\right]^t$ matriz real
- por proposición anterior
- $\Rightarrow$ T y T^* coinciden en la base $\mathcal{B}_0$
- $\Rightarrow$ $T = T^*$ (autoadjunto) $\square$

matriz hermítica

definición (matriz hermítica)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matriz hermítica

matriz hermítica

definición (matriz hermítica)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matriz hermítica
- si

$$A = \overline{A}^t$$

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$
- $T : V \to V$ operador lineal

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:
  1. T autoadjunto

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:
    1. T autoadjunto
    2. $\forall\, \mathcal{B}$ base ortonormal de V: ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz hermítica

teorema

teorema

- V e.v. de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$
- $T : V \to V$ operador lineal
- Son equivalentes:
  1. T autoadjunto
  2. $\forall\ \mathcal{B}$ base ortonormal de V: ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ matriz hermítica
  3. $\exists\ \mathcal{B}_0$ base ortonormal de V tal que ${}_{\mathcal{B}_0}(T)_{\mathcal{B}_0}$ matriz hermítica

demostración

ejercicio

teorema

teorema

- V e.v. complejo de dimensión finita

teorema

teorema

- V e.v. complejo de dimensión finita
- $T : V \to V$ autoadjunto

teorema

teorema

- V e.v. complejo de dimensión finita
- $T : V \to V$ autoadjunto
- $\Rightarrow$ todos los vap de T son reales

teorema

teorema

- V e.v. complejo de dimensión finita
- $T : V \to V$ autoadjunto
- $\Rightarrow$ todos los vap de T son reales
- $\Rightarrow$ todas las raíces características son reales.

demostración

- λ vap de T

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$
- por otro lado:

$$\langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle$$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$
- por otro lado:

$$\langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$
- por otro lado:

$$\langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

- ahora, por ser T autoadjunto $\langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$
- por otro lado:

$$\langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$$

- ahora, por ser T autoadjunto $\langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle$
- $\Rightarrow \lambda \|v\|^2 = \overline{\lambda} \|v\|^2$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle$
- por otro lado:

$$\langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

- ahora, por ser T autoadjunto $\langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle$
- $\Rightarrow \lambda\|v\|^2 = \overline{\lambda}\|v\|^2$
- como $v \neq \vec{0}$, $\lambda = \overline{\lambda}$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$
- por otro lado:

$$\langle v, Tv \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle v, v \rangle$$

- ahora, por ser T autoadjunto $\langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle$
- $\Rightarrow \lambda \|v\|^2 = \overline{\lambda} \|v\|^2$
- como $v \neq \vec{0}$, $\lambda = \overline{\lambda}$
- $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

demostración

- λ vap de T
- $\Rightarrow Tv = \lambda v$ con $v \neq \vec{0}$ vep
- $\Rightarrow \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle$
- por otro lado:

$$\langle v, Tv\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

- ahora, por ser T autoadjunto $\langle Tv, v\rangle = \langle v, Tv\rangle$
- $\Rightarrow \lambda\|v\|^2 = \overline{\lambda}\|v\|^2$
- como $v \neq \vec{0}$, $\lambda = \overline{\lambda}$
- $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ $\square$

corolario

corolario

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz hermítica

corolario

corolario

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz hermítica
- $\Rightarrow$ todos los vap de A son reales

teorema

teorema

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica

teorema

teorema

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica
- $\Rightarrow$ todos los vap de A son reales

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(R)$ matriz simétrica

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(R)$ matriz simétrica
- $\Rightarrow \overline{A}^t = A^t = A$

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(R)$ matriz simétrica
- $\Rightarrow \overline{A}^t = A^t = A$
- $\Rightarrow A$ matriz hermítica

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(R)$ matriz simétrica
- $\Rightarrow \overline{A}^t = A^t = A$
- $\Rightarrow A$ matriz hermítica
- $\Rightarrow$ todas las raíces características de A son reales

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(R)$ matriz simétrica
- $\Rightarrow \overline{A}^t = A^t = A$
- $\Rightarrow A$ matriz hermítica
- $\Rightarrow$ todas las raíces características de A son reales $\square$

corolario

corolario

- V e.v. real de dimensión finita

corolario

corolario

- V e.v. real de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ autoadjunto

corolario

corolario

- V e.v. real de dimensión finita
- $T : V \to V$ autoadjunto
- $\Rightarrow$ todos los vap de T son reales