

Teorema espectral para operadores autoadjuntos

Isometrías lineales

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

19 de octubre de 2010

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

ortogonalidad

proposición (ortogonalidad de subespacios propios)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto

ortogonalidad

proposición (ortogonalidad de subespacios propios)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vap distintos

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vap distintos
- $\Rightarrow S_{\lambda_1} \perp S_{\lambda_2}$

ortogonalidad

proposición (ortogonalidad de subespacios propios)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vap distintos
- $\Rightarrow S_{\lambda_1} \perp S_{\lambda_2}$
- es decir

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \forall v_i \in S_{\lambda_i}$$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- porque, al ser T autoadjunto, los vap son reales (clase pasada)

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- porque, al ser T autoadjunto, los vap son reales (clase pasada)
- $\Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- porque, al ser T autoadjunto, los vap son reales (clase pasada)
- $\Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- porque, al ser T autoadjunto, los vap son reales (clase pasada)
- $\Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

demostración

- tomemos $v_1 \in S_{\lambda_1}$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}$
- $\Rightarrow \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle$
- ahora $\langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle$ (por T autoadjunto)
- pero $\langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- porque, al ser T autoadjunto, los vap son reales (clase pasada)
- $\Rightarrow \lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \square$

lema

lema (subespacios invariantes)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno, dim. finita

lema

lema (subespacios invariantes)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno, dim. finita
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto

lema

lema (subespacios invariantes)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno, dim. finita
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto
- S s.e.v. invariante: $T(S) \subset S$

lema

lema (subespacios invariantes)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno, dim. finita
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto
- S s.e.v. invariante: $T(S) \subset S$
- $\Rightarrow S^\perp$ s.e.v. invariante: $T(S^\perp) \subset S^\perp$

demostración

- tomemos $w \in S^\perp$

demostración

- tomemos $w \in S^\perp$
- $\Rightarrow \langle w, s \rangle = 0 \ \forall s \in S$

demostración

- tomemos $w \in S^\perp$
- $\Rightarrow \langle w, s \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- $\Rightarrow \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$

demostración

- tomemos $w \in S^\perp$
- $\Rightarrow \langle w, s \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- $\Rightarrow \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- porque $T(s) \in S$

demostración

- tomemos $w \in S^\perp$
- $\Rightarrow \langle w, s \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- $\Rightarrow \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- porque $T(s) \in S$
- $\Rightarrow \langle T(w), s \rangle = \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$

demostración

- tomemos $w \in S^\perp$
- $\Rightarrow \langle w, s \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- $\Rightarrow \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- porque $T(s) \in S$
- $\Rightarrow \langle T(w), s \rangle = \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- $\Rightarrow T(w) \in S^\perp$

demostración

- tomemos $w \in S^\perp$
- $\Rightarrow \langle w, s \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- $\Rightarrow \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- porque $T(s) \in S$
- $\Rightarrow \langle T(w), s \rangle = \langle w, T(s) \rangle = 0 \ \forall s \in S$
- $\Rightarrow T(w) \in S^\perp \quad \square$

teorema espectral para operadores autoadjuntos

teorema espectral para operadores autoadjuntos

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita

teorema espectral para operadores autoadjuntos

teorema espectral para operadores autoadjuntos

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto

teorema espectral para operadores autoadjuntos

teorema espectral para operadores autoadjuntos

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto
- $\Rightarrow$ existe base ortonormal formada por vep

teorema espectral para operadores autoadjuntos

teorema espectral para operadores autoadjuntos

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ operador autoadjunto
- $\Rightarrow$ existe base ortonormal formada por vep
- en particular, T es diagonalizable

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido
- 4 si $n > 1$, suponemos que el teorema es válido para todo espacio de dimensión $n - 1$ y probaremos que vale para V espacio de dimensión n

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido
- 4 si $n > 1$, suponemos que el teorema es válido para todo espacio de dimensión $n - 1$ y probaremos que vale para V espacio de dimensión n
- 5 tomemos $S = [w_1]$ (subespacio invariante)

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido
- 4 si $n > 1$, suponemos que el teorema es válido para todo espacio de dimensión $n - 1$ y probaremos que vale para V espacio de dimensión n
- 5 tomemos $S = [w_1]$ (subespacio invariante)
- 6 por lema anterior $T : S^\perp \rightarrow S^\perp$ bien definido y autoadjunto

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido
- 4 si $n > 1$, suponemos que el teorema es válido para todo espacio de dimensión $n - 1$ y probaremos que vale para V espacio de dimensión n
- 5 tomemos $S = [w_1]$ (subespacio invariante)
- 6 por lema anterior $T : S^\perp \rightarrow S^\perp$ bien definido y autoadjunto
- 7 ahora $\dim S^\perp = \dim V - \dim S = n - 1$

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido
- 4 si $n > 1$, suponemos que el teorema es válido para todo espacio de dimensión $n - 1$ y probaremos que vale para V espacio de dimensión n
- 5 tomemos $S = [w_1]$ (subespacio invariante)
- 6 por lema anterior $T : S^\perp \rightarrow S^\perp$ bien definido y autoadjunto
- 7 ahora $\dim S^\perp = \dim V - \dim S = n - 1$
- 8 por hipótesis de inducción tiene base ortonormal de vep $\{w_2, \dots, w_n\}$

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido
- 4 si $n > 1$, suponemos que el teorema es válido para todo espacio de dimensión $n - 1$ y probaremos que vale para V espacio de dimensión n
- 5 tomemos $S = [w_1]$ (subespacio invariante)
- 6 por lema anterior $T : S^\perp \rightarrow S^\perp$ bien definido y autoadjunto
- 7 ahora $\dim S^\perp = \dim V - \dim S = n - 1$
- 8 por hipótesis de inducción tiene base ortonormal de vep $\{w_2, \dots, w_n\}$
- 9 como $V = S \oplus S^\perp$, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ base ortonormal de V

demostración

Por inducción sobre $n = \dim V$

- 1 como todas las raíces características están en $\mathbb{R}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
vap
- 2 tomamos w_1 vep asociado a λ_1 de norma 1.
- 3 si $n = 1$, entonces la prueba ha concluido
- 4 si $n > 1$, suponemos que el teorema es válido para todo espacio de dimensión $n - 1$ y probaremos que vale para V espacio de dimensión n
- 5 tomemos $S = [w_1]$ (subespacio invariante)
- 6 por lema anterior $T : S^\perp \rightarrow S^\perp$ bien definido y autoadjunto
- 7 ahora $\dim S^\perp = \dim V - \dim S = n - 1$
- 8 por hipótesis de inducción tiene base ortonormal de vep $\{w_2, \dots, w_n\}$
- 9 como $V = S \oplus S^\perp$, $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ base ortonormal de V



teorema (recíproco)

teorema (recíproco)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita

teorema (recíproco)

teorema (recíproco)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal tal que

teorema (recíproco)

teorema (recíproco)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal tal que
 - ① todos los vap son $\mathbb{R}$

teorema (recíproco)

teorema (recíproco)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal tal que
 - 1 todos los vap son $\mathbb{R}$
 - 2 existe base ortonormal de vep

teorema (recíproco)

teorema (recíproco)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal tal que
 - 1 todos los vap son $\mathbb{R}$
 - 2 existe base ortonormal de vep
- $\Rightarrow T$ es autoadjunto

demostración

- sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal de vep de T

demostración

- sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal de vep de T
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ los vap (contados con multiplicidad)

demostración

- sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal de vep de T
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ los vap (contados con multiplicidad)
- $\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

demostración

- sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal de vep de T
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ los vap (contados con multiplicidad)
- $\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ hay una base ortonormal donde la matriz asociada es hermítica

demostración

- sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal de vep de T
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ los vap (contados con multiplicidad)
- $\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ hay una base ortonormal donde la matriz asociada es hermítica
- T autoadjunto

demostración

- sea $\mathcal{B}$ la base ortonormal de vep de T
- $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ los vap (contados con multiplicidad)
- $\Rightarrow {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ hay una base ortonormal donde la matriz asociada es hermítica
- T autoadjunto $\square$

matriz ortogonal

definición

definición (matriz ortogonal)

definición

definición (matriz ortogonal)

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matriz ortogonal

definición

definición (matriz ortogonal)

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matriz ortogonal
- si

$$P^{-1} = P^t$$

matriz ortogonal

proposición

proposición

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal

proposición

proposición

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal
- $\Leftrightarrow$ las columnas de P forman base ortonormal con producto usual

demostración

$$\bullet P = (P_1, \dots, P_n)$$

matriz ortogonal

demostración

- $P = (P_1, \dots, P_n)$



$$P^t \cdot P =$$

	P_1	...	P_j	...	P_n
P_1	a_{11}				a_{1n}
$\vdots$					
P_i			a_{ij}		
$\vdots$					
P_n	a_{n1}				a_{nn}

matriz ortogonal

demostración

- $P = (P_1, \dots, P_n)$



$$P^t \cdot P =$$

	P_1	...	P_j	...	P_n
P_1	a_{11}				a_{1n}
$\vdots$					
P_i			a_{ij}		
$\vdots$					
P_n	a_{n1}				a_{nn}

- $\Rightarrow \langle P_i, P_j \rangle = a_{ij}$

demostración

- $P = (P_1, \dots, P_n)$



$$P^t \cdot P =$$

	P_1	...	P_j	...	P_n
P_1	a_{11}				a_{1n}
$\vdots$					
P_i			a_{ij}		
$\vdots$					
P_n	a_{n1}				a_{nn}

- $\Rightarrow \langle P_i, P_j \rangle = a_{ij}$

- $P^t \cdot P = I \Leftrightarrow a_{ij} = \delta_{ij}$

matriz ortogonal

demostración

- $P = (P_1, \dots, P_n)$



$$P^t.P =$$

	P_1	$\dots$	P_j	$\dots$	P_n
P_1	a_{11}				a_{1n}
$\vdots$					
P_i			a_{ij}		
$\vdots$					
P_n	a_{n1}				a_{nn}

- $\Rightarrow \langle P_i, P_j \rangle = a_{ij}$

- $P^t.P = I \Leftrightarrow a_{ij} = \delta_{ij}$

- $\Leftrightarrow$ columnas de P son ortonormales.

demostración

- $P = (P_1, \dots, P_n)$



$$P^t \cdot P =$$

	P_1	$\dots$	P_j	$\dots$	P_n
P_1	a_{11}				a_{1n}
$\vdots$					
P_i			a_{ij}		
$\vdots$					
P_n	a_{n1}				a_{nn}

- $\Rightarrow \langle P_i, P_j \rangle = a_{ij}$

- $P^t \cdot P = I \Leftrightarrow a_{ij} = \delta_{ij}$

- $\Leftrightarrow$ columnas de P son ortonormales. $\square$

teorema espectral para matrices simétricas

teorema espectral para matrices simétricas

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica real

teorema espectral para matrices simétricas

teorema espectral para matrices simétricas

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica real
- $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal real tal que

teorema espectral para matrices simétricas

teorema espectral para matrices simétricas

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica real
- $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal real tal que
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow {}_C(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow {}_C(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)
- $\Rightarrow T$ autoadjunta

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow {}_C(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)
- $\Rightarrow T$ autoadjunta
- $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep tal que

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow c(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)
- $\Rightarrow T$ autoadjunta
- $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep tal que
- ${}_B(T)_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow {}_C(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)
- $\Rightarrow T$ autoadjunta
- $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep tal que
- ${}_B(T)_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- por teorema de cambio de base, ${}_B(T)_B = {}_B(I)_C \cdot A \cdot {}_C(I)_B$

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow {}_C(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)
- $\Rightarrow T$ autoadjunta
- $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep tal que
- ${}_B(T)_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- por teorema de cambio de base, ${}_B(T)_B = {}_B(I)_C \cdot A \cdot {}_C(I)_B$
- ahora, las columnas de ${}_C(I)_B$ son los vectores de $\mathcal{B}$ (ortonormales)

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow {}_C(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)
- $\Rightarrow T$ autoadjunta
- $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep tal que
- ${}_B(T)_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- por teorema de cambio de base, ${}_B(T)_B = {}_B(I)_C \cdot A \cdot {}_C(I)_B$
- ahora, las columnas de ${}_C(I)_B$ son los vectores de $\mathcal{B}$ (ortonormales)
- $\Rightarrow P = {}_C(I)_B$ matriz ortogonal

demostración

- Consideremos $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $Tx = Ax$
- $\Rightarrow {}_C(T)_C = A$ con C canónica (ortonormal)
- $\Rightarrow T$ autoadjunta
- $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep tal que
- ${}_B(T)_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- por teorema de cambio de base, ${}_B(T)_B = {}_B(I)_C \cdot A \cdot {}_C(I)_B$
- ahora, las columnas de ${}_C(I)_B$ son los vectores de $\mathcal{B}$ (ortonormales)
- $\Rightarrow P = {}_C(I)_B$ matriz ortogonal $\square$

matriz unitaria

definición (matriz unitaria)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria

matriz unitaria

definición (matriz unitaria)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria
- si

$$P^{-1} = \overline{P}^t$$

teorema espectral para matrices hermíticas

teorema espectral para matrices hermíticas

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz hermítica

teorema espectral para matrices hermíticas

teorema espectral para matrices hermíticas

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz hermítica
- $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria tal que

teorema espectral para matrices hermíticas

teorema espectral para matrices hermíticas

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz hermítica
- $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria tal que
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

demostración

ejercicio

isometría lineal

definición (isometría)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

isometría lineal

definición (isometría)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ t.l. es una isometría

isometría lineal

definición (isometría)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ t.l. es una isometría
- si T preserva producto interno:

isometría lineal

definición (isometría)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ t.l. es una isometría
- si T preserva producto interno:
-

$$\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

proposición

proposición

- $T : V \rightarrow W$ isometría lineal

proposición

proposición

- $T : V \rightarrow W$ isometría lineal
- $\Leftrightarrow T$ preserva la norma:

proposición

proposición

- $T : V \rightarrow W$ isometría lineal
- $\Leftrightarrow T$ preserva la norma:
-

$$\|Tv\| = \|v\|$$

definición

demostración $\Rightarrow$)

- T isometría lineal

demostración $\Rightarrow$)

- T isometría lineal
- $\Rightarrow \|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle$

demostración $\Rightarrow$)

- T isometría lineal
- $\Rightarrow \|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle$

demostración $\Rightarrow$)

- T isometría lineal
- $\Rightarrow \|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$

definición

demostración $\Rightarrow$)

- T isometría lineal
- $\Rightarrow \|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$
- $\square$

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2$

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2$
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2$
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$
- de la misma manera, para el vector $T(v_1 + v_2)$ tenemos:

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2$
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$
- de la misma manera, para el vector $T(v_1 + v_2)$ tenemos:
- $\langle T(v_1 + v_2), T(v_1 + v_2) \rangle = \|Tv_1\|^2 + 2\Re\langle Tv_1, Tv_2 \rangle + \|Tv_2\|^2$

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2$
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$
- de la misma manera, para el vector $T(v_1 + v_2)$ tenemos:
- $\langle T(v_1 + v_2), T(v_1 + v_2) \rangle = \|Tv_1\|^2 + 2\Re\langle Tv_1, Tv_2 \rangle + \|Tv_2\|^2$
- como T preserva norma, tenemos que la última línea es igual a

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2$
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$
- de la misma manera, para el vector $T(v_1 + v_2)$ tenemos:
- $\langle T(v_1 + v_2), T(v_1 + v_2) \rangle = \|Tv_1\|^2 + 2\Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) + \|Tv_2\|^2$
- como T preserva norma, tenemos que la última línea es igual a
- $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) + \|v_2\|^2$

demostración $\Leftarrow$)

- supongamos T preserva norma y consideremos:
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle + \|v_2\|^2$
- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$
- de la misma manera, para el vector $T(v_1 + v_2)$ tenemos:
- $\langle T(v_1 + v_2), T(v_1 + v_2) \rangle = \|Tv_1\|^2 + 2\Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) + \|Tv_2\|^2$
- como T preserva norma, tenemos que la última línea es igual a
- $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) + \|v_2\|^2$
- comparemos

demostración $\Leftarrow$)

- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$

- $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) + \|v_2\|^2$

- comparemos

- $\Rightarrow \Re(\langle v_1, v_2 \rangle) = \Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle)$

demostración $\Leftarrow$)

- $\langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle v_1, v_2 \rangle) + \|v_2\|^2$

- $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + 2\Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) + \|v_2\|^2$

- comparemos

- $\Rightarrow \Re(\langle v_1, v_2 \rangle) = \Re(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle)$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esto termina la prueba.

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:



$$\Im(\langle v_1, v_2 \rangle) = \Re(-i\langle v_1, v_2 \rangle)$$

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:



$$\begin{aligned}\Im(\langle v_1, v_2 \rangle) &= \Re(-i\langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= \Re(\langle -iv_1, v_2 \rangle)\end{aligned}$$

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:



$$\begin{aligned}\Im(\langle v_1, v_2 \rangle) &= \Re(-i\langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= \Re(\langle -iv_1, v_2 \rangle) \\ &= \Re(\langle T(-iv_1), T(v_2) \rangle)\end{aligned}$$

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:



$$\begin{aligned}
 \Im(\langle v_1, v_2 \rangle) &= \Re(-i\langle v_1, v_2 \rangle) \\
 &= \Re(\langle -iv_1, v_2 \rangle) \\
 &= \Re(\langle T(-iv_1), T(v_2) \rangle) \\
 &= \Re(-i\langle Tv_1, Tv_2 \rangle)
 \end{aligned}$$

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:



$$\begin{aligned}\Im(\langle v_1, v_2 \rangle) &= \Re(-i\langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= \Re(\langle -iv_1, v_2 \rangle) \\ &= \Re(\langle T(-iv_1), T(v_2) \rangle) \\ &= \Re(-i\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) \\ &= \Im(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle)\end{aligned}$$

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:



$$\begin{aligned}
 \Im(\langle v_1, v_2 \rangle) &= \Re(-i\langle v_1, v_2 \rangle) \\
 &= \Re(\langle -iv_1, v_2 \rangle) \\
 &= \Re(\langle T(-iv_1), T(v_2) \rangle) \\
 &= \Re(-i\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) \\
 &= \Im(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle)
 \end{aligned}$$

- $\Rightarrow \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

demostración $\Leftarrow$)

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces:



$$\begin{aligned}\Im(\langle v_1, v_2 \rangle) &= \Re(-i\langle v_1, v_2 \rangle) \\ &= \Re(\langle -iv_1, v_2 \rangle) \\ &= \Re(\langle T(-iv_1), T(v_2) \rangle) \\ &= \Re(-i\langle Tv_1, Tv_2 \rangle) \\ &= \Im(\langle Tv_1, Tv_2 \rangle)\end{aligned}$$

- $\Rightarrow \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \square$