

Isometrías lineales

Operadores ortogonales y unitarios

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

21 de octubre de 2010

isometría

definición (isometría)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ t.l. isometría si

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ t.l. isometría si

isometría

definición (isometría)

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ t.l. isometría si
- T preserva producto interno:

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ t.l. isometría si
- T preserva producto interno:
-

$$\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

proposición (clase pasada)

proposición

- $T : V \rightarrow W$ t.l.

proposición (clase pasada)

proposición

- $T : V \rightarrow W$ t.l.
- T isometría

proposición (clase pasada)

proposición

- $T : V \rightarrow W$ t.l.
- T isometría
- $\Leftrightarrow$

$$\|Tv\| = \|v\|$$

observación

- T isometría

observación

- T isometría

- $\Rightarrow$

$$d(Tv_1, Tv_2) = \|Tv_2 - Tv_1\|$$

observación

● T isometría

● $\Rightarrow$

$$d(Tv_1, Tv_2) = \|Tv_2 - Tv_1\| = \|v_2 - v_1\|$$

observación

● T isometría

● $\Rightarrow$

$$d(Tv_1, Tv_2) = \|Tv_2 - Tv_1\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_1, v_2)$$

observación

- T isometría

- $\Rightarrow$

$$d(Tv_1, Tv_2) = \|Tv_2 - Tv_1\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_1, v_2)$$

- $\Rightarrow T$ preserva distancia (métrica)

observación

- T isometría

- $\Rightarrow$

$$d(Tv_1, Tv_2) = \|Tv_2 - Tv_1\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_1, v_2)$$

- $\Rightarrow T$ preserva distancia (métrica)

- de allí viene el nombre isometría

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ isometría

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow W$ isometría
- $\Rightarrow T$ inyectiva

- T isometría

demostración

- T isometría
- $\|Tv\| = \|v\| = 0$

demostración

- T isometría
- $\|Tv\| = \|v\| = 0$
- $\Leftrightarrow v = \vec{0}$

demostración

- T isometría
- $\|Tv\| = \|v\| = 0$
- $\Leftrightarrow v = \vec{0}$
- $\Rightarrow T$ inyectiva

demostración

- T isometría
- $\|Tv\| = \|v\| = 0$
- $\Leftrightarrow v = \vec{0}$
- $\Rightarrow T$ inyectiva $\square$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

ejemplo

ejemplo

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
- $T(x, y) = (x, y, 0)$

ejemplo

ejemplo

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
- $T(x, y) = (x, y, 0)$
- $\|T(x, y)\| = \|(x, y, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ejemplo

ejemplo

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
- $T(x, y) = (x, y, 0)$
- $\|T(x, y)\| = \|(x, y, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$
- $\Rightarrow T$ isometría

ejemplo

ejemplo

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
- $T(x, y) = (x, y, 0)$
- $\|T(x, y)\| = \|(x, y, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$
- $\Rightarrow T$ isometría
- observar que T es inyectiva

ejemplo

ejemplo

- Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
- $T(x, y) = (x, y, 0)$
- $\|T(x, y)\| = \|(x, y, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$
- $\Rightarrow T$ isometría
- observar que T es inyectiva
- pero T no es sobreyectiva

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow W$ isometría

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow W$ isometría
-

$$T \text{ sobreyectiva} \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

demostración

● $\Rightarrow$) T isometría $\Rightarrow$ inyectiva

demostración

- $\Rightarrow$) T isometría $\Rightarrow$ inyectiva
- hipótesis $\Rightarrow$ sobreyectiva

demostración

- $\Rightarrow$) T isometría $\Rightarrow$ inyectiva
- hipótesis $\Rightarrow$ sobreyectiva
- T isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$

demostración

- $\Rightarrow$) T isometría $\Rightarrow$ inyectiva
- hipótesis $\Rightarrow$ sobreyectiva
- T isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$
- $\Leftrightarrow$) $\dim V = \dim W$

demostración

- $\Rightarrow$) T isometría $\Rightarrow$ inyectiva
- hipótesis $\Rightarrow$ sobreyectiva
- T isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$
- $\Leftrightarrow$) $\dim V = \dim W$
- T isometría $\Rightarrow T$ inyectiva

demostración

- $\Rightarrow$) T isometría $\Rightarrow$ inyectiva
- hipótesis $\Rightarrow$ sobreyectiva
- T isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$
- $\Leftrightarrow$) $\dim V = \dim W$
- T isometría $\Rightarrow T$ inyectiva
- $\Rightarrow$ sobreyectiva

demostración

- $\Rightarrow$) T isometría $\Rightarrow$ inyectiva
- hipótesis $\Rightarrow$ sobreyectiva
- T isomorfismo $\Rightarrow \dim V = \dim W$
- $\Leftrightarrow$) $\dim V = \dim W$
- T isometría $\Rightarrow T$ inyectiva
- $\Rightarrow$ sobreyectiva $\square$

corolario

corolario

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita

corolario

corolario

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ isometría

corolario

corolario

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- $T : V \rightarrow V$ isometría
- $\Rightarrow T$ isomorfismo

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- son equivalentes:

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- son equivalentes:
 - 1 ● T isometría sobreyectiva

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- son equivalentes:
 - 1 T isometría sobreyectiva
 - 2 T lleva cualquier base ortonormal de V en una base ortonormal de W

proposición

proposición

- V, W e.v. sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita
- son equivalentes:
 - 1 T isometría sobreyectiva
 - 2 T lleva cualquier base ortonormal de V en una base ortonormal de W
 - 3 T lleva una base ortonormal de V en una base ortonormal de W

demostración

- $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2} \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortonormal

demostración

- **1** $\Rightarrow$ **2** $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortonormal
- $\Rightarrow T(\mathcal{B}) = \{Tw_1, \dots, Tw_n\}$ base (T isomorfismo)

demostración

- $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2} \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortonormal
- $\Rightarrow T(\mathcal{B}) = \{Tw_1, \dots, Tw_n\}$ base (T isomorfismo)
- ahora $\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

demostración

- **1** $\Rightarrow$ **2** $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortonormal
- $\Rightarrow T(\mathcal{B}) = \{Tw_1, \dots, Tw_n\}$ base (T isomorfismo)
- ahora $\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$
- $\Rightarrow T(\mathcal{B})$ base ortonormal.

demostración

- ① $\Rightarrow$ ② $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortonormal
- $\Rightarrow T(\mathcal{B}) = \{Tw_1, \dots, Tw_n\}$ base (T isomorfismo)
- ahora $\langle Tw_i, Tw_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$
- $\Rightarrow T(\mathcal{B})$ base ortonormal.
- ② $\Rightarrow$ ③ OBVIO

demostración

- $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ $\mathcal{B}_0$ base ortonormal / $T(\mathcal{B}_0)$ base ortonormal

demostración

- $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ $\mathcal{B}_0$ base ortonormal / $T(\mathcal{B}_0)$ base ortonormal
- $\langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{ij}$

demostración

- $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ $\mathcal{B}_0$ base ortonormal / $T(\mathcal{B}_0)$ base ortonormal
- $\langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

demostración

- $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ $\mathcal{B}_0$ base ortonormal / $T(\mathcal{B}_0)$ base ortonormal
- $\langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$
- $\Rightarrow T$ preserva el producto interno en una base

demostración

- $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ $\mathcal{B}_0$ base ortonormal / $T(\mathcal{B}_0)$ base ortonormal
- $\langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$
- $\Rightarrow T$ preserva el producto interno en una base
- $+ T$ lineal $\Rightarrow T$ isometría

demostración

- $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ $\mathcal{B}_0$ base ortonormal / $T(\mathcal{B}_0)$ base ortonormal
- $\langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$
- $\Rightarrow T$ preserva el producto interno en una base
- $+ T$ lineal $\Rightarrow T$ isometría
- por otro lado, T lleva base en base $\Rightarrow T$ isomorfismo

demostración

- $\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$ $\mathcal{B}_0$ base ortonormal / $T(\mathcal{B}_0)$ base ortonormal
- $\langle Te_i, Te_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$
- $\Rightarrow T$ preserva el producto interno en una base
- $+ T$ lineal $\Rightarrow T$ isometría
- por otro lado, T lleva base en base $\Rightarrow T$ isomorfismo $\square$

operador ortogonal

definición (operador ortogonal)

- V e.v. real con producto interno

operador ortogonal

definición (operador ortogonal)

- V e.v. real con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal ortogonal si

operador ortogonal

definición (operador ortogonal)

- V e.v. real con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal ortogonal si
-

$$T^{-1} = T^*$$

operador unitario

definición (operador unitario)

- V e.v. complejo con producto interno

operador unitario

definición (operador unitario)

- V e.v. complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal unitario si

operador unitario

definición (operador unitario)

- V e.v. complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal unitario si
-

$$T^{-1} = T^*$$

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal
-

$$T^{-1} = T^* \iff T \text{ isometría sobreyectiva}$$

demostración

● $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle =$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^*Tv_2 \rangle$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^*Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^*Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^*Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$
- ahora, para todo $v_1, v_2 \in V$:

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$
- ahora, para todo $v_1, v_2 \in V$:
- $\langle v_1, T^* Tv_2 \rangle =$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$
- ahora, para todo $v_1, v_2 \in V$:
- $\langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$
- ahora, para todo $v_1, v_2 \in V$:
- $\langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$
- ahora, para todo $v_1, v_2 \in V$:
- $\langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T^* T = I$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$
- ahora, para todo $v_1, v_2 \in V$:
- $\langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T^* T = I$
- $\Rightarrow T^{-1} = T^*$

demostración

- $\Rightarrow) T^{-1} = T^* \Rightarrow T$ sobreyectiva
- $\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T$ isometría
- $\Leftarrow) T$ isometría sobreyectiva $\Rightarrow \exists T^{-1}$
- ahora, para todo $v_1, v_2 \in V$:
- $\langle v_1, T^* Tv_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow T^* T = I$
- $\Rightarrow T^{-1} = T^* \quad \square$

matrices ortogonales y unitarias

recordar (clase pasada)

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal si $P^{-1} = P^t$

matrices ortogonales y unitarias

recordar (clase pasada)

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal si $P^{-1} = P^t$
- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria si $P^{-1} = \overline{P}^t$

proposición

proposición

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal $\Leftrightarrow$ columnas ortonormales

proposición

proposición

- $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal $\Leftrightarrow$ columnas ortonormales
- $P \in M_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria $\Leftrightarrow$ columnas ortonormales

demostración

- como vimos la clase pasada:

demostración

- como vimos la clase pasada:
- dadas dos matrices A y B

demostración

- como vimos la clase pasada:
- dadas dos matrices A y B
- la entrada ij de la matriz $\overline{AB}$ es

demostración

- como vimos la clase pasada:
- dadas dos matrices A y B
- la entrada ij de la matriz $A\overline{B}$ es
- $(A.\overline{B})_{ij} = \langle A_i, B^j \rangle$ (con el producto usual en $\mathbb{C}^n$)

demostración

- como vimos la clase pasada:
- dadas dos matrices A y B
- la entrada ij de la matriz $A\overline{B}$ es
- $(A.\overline{B})_{ij} = \langle A_i, B^j \rangle$ (con el producto usual en $\mathbb{C}^n$)
- (chequear esto, es como en la clase pasada, ver diagrama clase 16)

demostración

- como vimos la clase pasada:
- dadas dos matrices A y B
- la entrada ij de la matriz $A\overline{B}$ es
- $(A.\overline{B})_{ij} = \langle A_i, B^j \rangle$ (con el producto usual en $\mathbb{C}^n$)
- (chequear esto, es como en la clase pasada, ver diagrama clase 16) $\square$

matrices asociadas a operadores unitarios y ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. real con producto interno

matrices asociadas a operadores unitarios y ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. real con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal

proposición

proposición

- V e.v. real con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal
- $\mathcal{B}$ base ortonormal

proposición

proposición

- V e.v. real con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal
- $\mathcal{B}$ base ortonormal
-

$$T \text{ ortogonal} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \text{ ortogonal}$$

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

- columna j : $A^j = \begin{pmatrix} \langle Tv_j, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv_j, v_n \rangle \end{pmatrix}$

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

- columna j : $A^j = \begin{pmatrix} \langle Tv_j, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv_j, v_n \rangle \end{pmatrix}$

- ahora

$$\langle A^j, A^k \rangle_{\mathbb{R}} = \langle Tv_j, v_1 \rangle \langle Tv_k, v_1 \rangle + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle \langle Tv_k, v_n \rangle$$

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

- columna j : $A^j = \begin{pmatrix} \langle Tv_j, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv_j, v_n \rangle \end{pmatrix}$

- ahora

$$\begin{aligned} \langle A^j, A^k \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle Tv_j, v_1 \rangle \langle Tv_k, v_1 \rangle + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle \langle Tv_k, v_n \rangle \\ &= \langle \langle Tv_j, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle v_n, \langle Tv_k, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_k, v_n \rangle v_n \rangle \end{aligned}$$

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

- columna j : $A^j = \begin{pmatrix} \langle Tv_j, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv_j, v_n \rangle \end{pmatrix}$

- ahora

$$\begin{aligned} \langle A^j, A^k \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle Tv_j, v_1 \rangle \langle Tv_k, v_1 \rangle + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle \langle Tv_k, v_n \rangle \\ &= \langle \langle Tv_j, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle v_n, \langle Tv_k, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_k, v_n \rangle v_n \rangle \\ &= \langle Tv_j, Tv_k \rangle \end{aligned}$$

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

- columna j : $A^j = \begin{pmatrix} \langle Tv_j, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv_j, v_n \rangle \end{pmatrix}$

- ahora

$$\begin{aligned} \langle A^j, A^k \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle Tv_j, v_1 \rangle \langle Tv_k, v_1 \rangle + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle \langle Tv_k, v_n \rangle \\ &= \langle \langle Tv_j, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle v_n, \langle Tv_k, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_k, v_n \rangle v_n \rangle \\ &= \langle Tv_j, Tv_k \rangle \end{aligned}$$

- entonces $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ ortogonal $\Leftrightarrow T(\mathcal{B})$ ortogonal

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

- columna j : $A^j = \begin{pmatrix} \langle Tv_j, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv_j, v_n \rangle \end{pmatrix}$

- ahora

$$\begin{aligned} \langle A^j, A^k \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle Tv_j, v_1 \rangle \langle Tv_k, v_1 \rangle + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle \langle Tv_k, v_n \rangle \\ &= \langle \langle Tv_j, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle v_n, \langle Tv_k, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_k, v_n \rangle v_n \rangle \\ &= \langle Tv_j, Tv_k \rangle \end{aligned}$$

- entonces $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ ortogonal $\Leftrightarrow T(\mathcal{B})$ ortogonal $\Leftrightarrow T$ ortogonal

demostración

- recordemos que $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = (\langle Tv_j, v_i \rangle)_{ij}$

- columna j : $A^j = \begin{pmatrix} \langle Tv_j, v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Tv_j, v_n \rangle \end{pmatrix}$

- ahora

$$\begin{aligned} \langle A^j, A^k \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle Tv_j, v_1 \rangle \langle Tv_k, v_1 \rangle + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle \langle Tv_k, v_n \rangle \\ &= \langle \langle Tv_j, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_j, v_n \rangle v_n, \langle Tv_k, v_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle Tv_k, v_n \rangle v_n \rangle \\ &= \langle Tv_j, Tv_k \rangle \end{aligned}$$

- entonces $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ ortogonal $\Leftrightarrow T(\mathcal{B})$ ortogonal $\Leftrightarrow T$ ortogonal $\square$