

Operadores ortogonales y unitarios

Teorema espectral para operadores unitarios

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

26 de octubre de 2010

operador ortogonal

definición (operador ortogonal)

- V e.v. real con producto interno

operador ortogonal

definición (operador ortogonal)

- V e.v. real con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal ortogonal si

operador ortogonal

definición (operador ortogonal)

- V e.v. real con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal ortogonal si
-

$$T^{-1} = T^*$$

operador unitario

definición (operador unitario)

- V e.v. complejo con producto interno

operador unitario

definición (operador unitario)

- V e.v. complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal unitario si

operador unitario

definición (operador unitario)

- V e.v. complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal unitario si
-

$$T^{-1} = T^*$$

proposición (clase pasada)

proposición (clase pasada)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

proposición (clase pasada)

proposición (clase pasada)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal

definición

proposición (clase pasada)

proposición (clase pasada)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal
-

$$T^{-1} = T^* \Leftrightarrow T \text{ isometría}$$

proposición (clase pasada)

proposición (clase pasada)

- $\forall$ e.v. con producto interno

proposición (clase pasada)

proposición (clase pasada)

- V e.v. con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal

proposición (clase pasada)

proposición (clase pasada)

- V e.v. con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal
- $\mathcal{B}$ base ortonormal

proposición (clase pasada)

proposición (clase pasada)

- V e.v. con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador lineal
- $\mathcal{B}$ base ortonormal
-

$$T \text{ ortogonal (unitario)} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \text{ ortogonal (unitaria)}$$

teorema

teorema

teorema

teorema

teorema

teorema

- V e.v. real o complejo con producto interno

teorema

teorema

teorema

- V e.v. real o complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador ortogonal o unitario

teorema

teorema

teorema

- V e.v. real o complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador ortogonal o unitario
- λ vap de T

teorema

teorema

teorema

- V e.v. real o complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador ortogonal o unitario
- λ vap de T
- $\Rightarrow |\lambda| = 1$

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado

teorema

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\|$

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\|$
- T isometría

teorema

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\|$
- T isometría

teorema

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\|$
- T isometría
- λ vap

teorema

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- T isometría
- λ vap

teorema

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- T isometría
- λ vap
- $\|\cdot\|$ norma

teorema

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- T isometría
- λ vap
- $\|\cdot\|$ norma
- $\Rightarrow |\lambda| = 1$ ($v \neq \vec{0}$)

teorema

demostración

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ vap de T
- v vep asociado
- $\Rightarrow \|v\| = \|Tv\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
- T isometría
- λ vap
- $\|\cdot\|$ norma
- $\Rightarrow |\lambda| = 1$ ($v \neq \vec{0}$) $\square$

teorema

corolario

corolario

teorema

corolario

corolario

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal o unitaria

teorema

corolario

corolario

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal o unitaria
- λ raíz característica de χ_A

teorema

corolario

corolario

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz ortogonal o unitaria
- λ raíz característica de χ_A
- $\Rightarrow |\lambda| = 1$

teorema

ejemplo

ejemplo (OJO!!)

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

teorema

ejemplo

ejemplo (OJO!!)

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ matriz ortogonal

teorema

ejemplo

ejemplo (OJO!!)

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ matriz ortogonal (columnas ortonormales)

teorema

ejemplo

ejemplo (OJO!!)

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ matriz ortogonal (columnas ortonormales)
- pero A no diagonalizable

teorema

ejemplo

ejemplo (OJO!!)

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ matriz ortogonal (columnas ortonormales)
- pero A no diagonalizable
- $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ no tiene raíces en $\mathbb{R}$

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- T isometría (=operador unitario u ortogonal)

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- T isometría (=operador unitario u ortogonal)
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vap distintos

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- T isometría (=operador unitario u ortogonal)
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vap distintos
- $\Rightarrow$ subespacios propios son ortogonales:

$$S_{\lambda_1} \perp S_{\lambda_2}$$

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle$
- T isometría

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- ahora $1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2} =$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- ahora $1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = \lambda_2 \overline{\lambda_2} - \lambda_1 \overline{\lambda_2}$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- ahora $1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = \lambda_2 \overline{\lambda_2} - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \overline{\lambda_2}$

subespacios propios ortogonales

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- ahora $1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = \lambda_2 \overline{\lambda_2} - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \overline{\lambda_2} \neq 0$

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- ahora $1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = \lambda_2 \overline{\lambda_2} - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \overline{\lambda_2} \neq 0$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

demostración

- sea v_i vep asociado a λ_i , $i = 1, 2$
- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = \lambda_1 \overline{\lambda_2} \langle v_1, v_2 \rangle$
- $\Rightarrow (1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$
- ahora $1 - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = \lambda_2 \overline{\lambda_2} - \lambda_1 \overline{\lambda_2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \overline{\lambda_2} \neq 0$
- $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad \square$

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ isometría

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ isometría
- S s.e.v. invariante: $T(S) \subset S$

subespacios propios ortogonales

proposición

proposición

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$ con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ isometría
- S s.e.v. invariante: $T(S) \subset S$
- $\Rightarrow S^\perp$ s.e.v. invariante:

$$T(S^\perp) \subset S^\perp$$

subespacios propios ortogonales

demostración

- S s.e.v. invariante

subespacios propios ortogonales

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido

subespacios propios ortogonales

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido
- T isometría $\Rightarrow T|_S$ biyectiva

subespacios propios ortogonales

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido
- T isometría $\Rightarrow T|_S$ biyectiva
- $T(S) = S$

subespacios propios ortogonales

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido
- T isometría $\Rightarrow T|_S$ biyectiva
- $T(S) = S$
- sea $w \in S^\perp$, queremos ver que $Tw \in S^\perp$. consideremos $s \in S$

subespacios propios ortogonales

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido
- T isometría $\Rightarrow T|_S$ biyectiva
- $T(S) = S$
- sea $w \in S^\perp$, queremos ver que $Tw \in S^\perp$. consideremos $s \in S$
- $\langle Tw, s \rangle = \langle Tw, Ts' \rangle$
- $\exists s' \in S$ tal que $\uparrow$

subespacios propios ortogonales

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido
- T isometría $\Rightarrow T|_S$ biyectiva
- $T(S) = S$
- sea $w \in S^\perp$, queremos ver que $Tw \in S^\perp$. consideremos $s \in S$
- $\langle Tw, s \rangle = \langle Tw, Ts' \rangle = \langle w, s' \rangle$
- T isometría

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido
- T isometría $\Rightarrow T|_S$ biyectiva
- $T(S) = S$
- sea $w \in S^\perp$, queremos ver que $Tw \in S^\perp$. consideremos $s \in S$
- $\langle Tw, s \rangle = \langle Tw, Ts' \rangle = \langle w, s' \rangle = 0$
- porque $w \in S^\perp$

demostración

- S s.e.v. invariante
- $\Rightarrow T : S \rightarrow S$ bien definido
- T isometría $\Rightarrow T|_S$ biyectiva
- $T(S) = S$
- sea $w \in S^\perp$, queremos ver que $Tw \in S^\perp$. consideremos $s \in S$
- $\langle Tw, s \rangle = \langle Tw, Ts' \rangle = \langle w, s' \rangle = 0$
- porque $w \in S^\perp$ $\square$

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

- $\forall$ e.v. complejo con producto interno

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

- V e.v. complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador unitario

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

- V e.v. complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador unitario
- $\Rightarrow$ hay una base ortonormal de vep de T

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para operadores unitarios

- V e.v. complejo con producto interno
- $T : V \rightarrow V$ operador unitario
- $\Rightarrow$ hay una base ortonormal de vep de T
- en particular, T diagonalizable

teorema espectral para operadores unitarios

demostración

- por inducción sobre $\dim V$

teorema espectral para operadores unitarios

demostración

- por inducción sobre $\dim V$
- exactamente igual que en el caso T autoadjunto

teorema espectral para operadores unitarios

observación

observación

teorema espectral para operadores unitarios

observación

observación

- En el caso T operador ortogonal, la prueba NO funciona

teorema espectral para operadores unitarios

observación

observación

- En el caso T operador ortogonal, la prueba NO funciona
- Qué falla?

teorema espectral para operadores unitarios

observación

observación

- En el caso T operador ortogonal, la prueba NO funciona
- Qué falla?
- que no todos los vap están en $\mathbb{R}$

teorema espectral para operadores unitarios

proposición (recíproca)

proposición (recíproca)

teorema espectral para operadores unitarios

proposición (recíproca)

proposición (recíproca)

- $\forall$ e.v. complejo

teorema espectral para operadores unitarios

proposición (recíproca)

proposición (recíproca)

- V e.v. complejo
- $T : V \rightarrow V$ operador

teorema espectral para operadores unitarios

proposición (recíproca)

proposición (recíproca)

- V e.v. complejo
- $T : V \rightarrow V$ operador
- si $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep de T

teorema espectral para operadores unitarios

proposición (recíproca)

proposición (recíproca)

- V e.v. complejo
- $T : V \rightarrow V$ operador
- si $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep de T
- y vap de T tienen módulo 1

teorema espectral para operadores unitarios

proposición (recíproca)

proposición (recíproca)

- V e.v. complejo
- $T : V \rightarrow V$ operador
- si $\exists \mathcal{B}$ base ortonormal de vep de T
- y vap de T tienen módulo 1
- entonces T unitario

demostración

- tenemos

$$A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con $|\lambda_i| = 1$ para todo i

demostración

- tenemos

$$A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con $|\lambda_i| = 1$ para todo i

- $\Rightarrow$

$$\langle A^j, A^k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ |\lambda_j| & \text{si } j = k \end{cases}$$

demostración

- tenemos

$$A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con $|\lambda_i| = 1$ para todo i

- $\Rightarrow$

$$\langle A^j, A^k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ |\lambda_j| & \text{si } j = k \end{cases}$$

- como $|\lambda_j| = 1$, las columnas son ortonormales

demostración

- tenemos

$$A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con $|\lambda_i| = 1$ para todo i

- $\Rightarrow$

$$\langle A^j, A^k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ |\lambda_j| & \text{si } j = k \end{cases}$$

- como $|\lambda_j| = 1$, las columnas son ortonormales
- $\Rightarrow A$ matriz unitaria

demostración

- tenemos

$$A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con $|\lambda_i| = 1$ para todo i

- $\Rightarrow$

$$\langle A^j, A^k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ |\lambda_j| & \text{si } j = k \end{cases}$$

- como $|\lambda_j| = 1$, las columnas son ortonormales
- $\Rightarrow A$ matriz unitaria
- T operador unitario

demostración

- tenemos

$$A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

con $|\lambda_i| = 1$ para todo i

- $\Rightarrow$

$$\langle A^j, A^k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ |\lambda_j| & \text{si } j = k \end{cases}$$

- como $|\lambda_j| = 1$, las columnas son ortonormales
- $\Rightarrow A$ matriz unitaria
- T operador unitario $\square$

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para matrices unitarias

teorema espectral para matrices unitarias

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para matrices unitarias

teorema espectral para matrices unitarias

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para matrices unitarias

teorema espectral para matrices unitarias

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria
- $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria tal que

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para matrices unitarias

teorema espectral para matrices unitarias

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria
- $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria tal que
- $P^{-1}.A.P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

teorema espectral para operadores unitarios

teorema espectral para matrices unitarias

teorema espectral para matrices unitarias

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria
- $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz unitaria tal que
- $P^{-1}.A.P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- con $|\lambda_i| = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$

teorema espectral para operadores unitarios

demostración

ejercicio

resumen

operador	e.v.	definición	matriz asociada en base ortonormal	vap

resumen

operador	e.v.	definición	matriz asociada en base ortonormal	vap
autoadjunto	$\mathbb{R}$	$T = T^*$	simétrica: $A = A^t$	$\mathbb{R}$

resumen

operador	e.v.	definición	matriz asociada en base ortonormal	vap
autoadjunto	$\mathbb{R}$	$T = T^*$	simétrica: $A = A^t$	$\mathbb{R}$
autoadjunto	$\mathbb{C}$	$T = T^*$	hermítica: $A = \overline{A}^t$	$\mathbb{R}$

resumen

operador	e.v.	definición	matriz asociada en base ortonormal	vap
autoadjunto	$\mathbb{R}$	$T = T^*$	simétrica: $A = A^t$	$\mathbb{R}$
autoadjunto	$\mathbb{C}$	$T = T^*$	hermítica: $A = \overline{A}^t$	$\mathbb{R}$
isometría	$\mathbb{R}$	$T^{-1} = T^*$	ortogonal: $A^{-1} = A^t$	$\lambda = \pm 1$

resumen

operador	e.v.	definición	matriz asociada en base ortonormal	vap
autoadjunto	$\mathbb{R}$	$T = T^*$	simétrica: $A = A^t$	$\mathbb{R}$
autoadjunto	$\mathbb{C}$	$T = T^*$	hermítica: $A = \overline{A}^t$	$\mathbb{R}$
isometría	$\mathbb{R}$	$T^{-1} = T^*$	ortogonal: $A^{-1} = A^t$	$\lambda = \pm 1$
isometría	$\mathbb{R}$	$T^{-1} = T^*$	unitaria: $A^{-1} = \overline{A}^t$	$ \lambda = 1$

resumen

operador	e.v.	definición	matriz asociada en base ortonormal	vap
autoadjunto	$\mathbb{R}$	$T = T^*$	simétrica: $A = A^t$	$\mathbb{R}$
autoadjunto	$\mathbb{C}$	$T = T^*$	hermítica: $A = \overline{A}^t$	$\mathbb{R}$
isometría	$\mathbb{R}$	$T^{-1} = T^*$	ortogonal: $A^{-1} = A^t$	$\lambda = \pm 1$
isometría	$\mathbb{R}$	$T^{-1} = T^*$	unitaria: $A^{-1} = \overline{A}^t$	$ \lambda = 1$

salvo en el caso isometría real (operador ortogonal), T es diagonalizable por una base ortonormal