

Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

28 de octubre de 2010

teorema de clasificación

teorema (clasificación en $\mathbb{R}^2$)

- $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual

teorema de clasificación

teorema (clasificación en $\mathbb{R}^2$)

- $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría

teorema de clasificación

teorema (clasificación en $\mathbb{R}^2$)

- $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Leftrightarrow$

teorema de clasificación

teorema (clasificación en $\mathbb{R}^2$)

- $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Leftrightarrow$
 - 1 ● T rotación de centro $(0, 0)$, o

teorema de clasificación

teorema (clasificación en $\mathbb{R}^2$)

- $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual
- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Leftrightarrow$
 - 1 T rotación de centro $(0, 0)$, o
 - 2 T simetría axial, con eje pasando por $(0, 0)$

demostración

● $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría

demostración

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con A matriz ortogonal

demostración

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con A matriz ortogonal
- $\Rightarrow$ columnas de A forman base ortonormal

demostración

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con A matriz ortogonal
- $\Rightarrow$ columnas de A forman base ortonormal
-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

demostración

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con A matriz ortogonal
- $\Rightarrow$ columnas de A forman base ortonormal
-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \end{cases}$$

demostración

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con A matriz ortogonal
- $\Rightarrow$ columnas de A forman base ortonormal
-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \end{cases}$$

demostración

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con A matriz ortogonal
- $\Rightarrow$ columnas de A forman base ortonormal
-

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \Rightarrow \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

demostración

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (2) \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ (3) \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{array} \right.$$

demostración

- $$\begin{cases} (1) & a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (2) & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ (3) & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$
- (1)
$$\begin{cases} a_{11} = \cos \theta \\ a_{21} = \sin \theta \end{cases}$$

demostración

$$\bullet \begin{cases} (1) & a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (2) & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ (3) & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\bullet (1) \quad \begin{cases} a_{11} = \cos \theta \\ a_{21} = \sin \theta \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} a_{12} = \cos \varphi \\ a_{22} = \sin \varphi \end{cases}$$

demostración

- $$\begin{cases} (1) & a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (2) & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ (3) & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$
- (1)
$$\begin{cases} a_{11} = \cos \theta \\ a_{21} = \sin \theta \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} a_{12} = \cos \varphi \\ a_{22} = \sin \varphi \end{cases}$$
- (3) $\Rightarrow \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0$

demostración

- $$\begin{cases} (1) & a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (2) & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ (3) & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$
- $$(1) \quad \begin{cases} a_{11} = \cos \theta \\ a_{21} = \sin \theta \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} a_{12} = \cos \varphi \\ a_{22} = \sin \varphi \end{cases}$$
- $$(3) \Rightarrow \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0$$
- $$\Rightarrow \cos(\theta - \varphi) = 0$$

demostración

- $$\begin{cases} (1) & a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (2) & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ (3) & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$
- $$(1) \quad \begin{cases} a_{11} = \cos \theta \\ a_{21} = \sin \theta \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} a_{12} = \cos \varphi \\ a_{22} = \sin \varphi \end{cases}$$
- $$(3) \Rightarrow \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0$$
- $$\Rightarrow \cos(\theta - \varphi) = 0 \Rightarrow \theta - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

demostración

$$\bullet \begin{cases} (1) & a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (2) & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ (3) & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\bullet (1) \quad \begin{cases} a_{11} = \cos \theta \\ a_{21} = \sin \theta \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} a_{12} = \cos \varphi \\ a_{22} = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\bullet (3) \Rightarrow \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0$$

$$\bullet \Rightarrow \cos(\theta - \varphi) = 0 \Rightarrow \theta - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta \mp \frac{\pi}{2}) \\ \sin \theta & \sin(\theta \mp \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

demostración

● caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin \theta & \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

demostración

● caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

demostración

- caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ

demostración

- caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ
- caso $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin \theta & \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

demostración

- caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ
- caso $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

demostración

- caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ
- caso $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

demostración

- caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ
- caso $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es la simetría respecto del eje x compuesta con una rotación con centro $(0, 0)$ y ángulo θ

demostración

- caso $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es una rotación de centro $(0, 0)$ y ángulo θ
- caso $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow A$ es la simetría respecto del eje x compuesta con una rotación con centro $(0, 0)$ y ángulo θ
- $\Rightarrow A$ simetría respecto de la recta que pasa por el origen y forma ángulo θ con el eje x

demostración

- para concluir tenemos que probar $\Leftarrow$):

demostración

- para concluir tenemos que probar $\Leftarrow$):
- Si A rotación o simetría axial, entonces A isometría

demostración

- para concluir tenemos que probar $\Leftarrow$):
- Si A rotación o simetría axial, entonces A isometría
- (ejercicio)

demostración

- para concluir tenemos que probar $\Leftarrow$):
- Si A rotación o simetría axial, entonces A isometría
- (ejercicio) $\square$

observación

observación

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría

observación

observación

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- si T rotación, entonces $\det T = \det A = 1$

observación

observación

- $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometría
- si T rotación, entonces $\det T = \det A = 1$
- si T simetría axial, entonces $\det T = \det A = -1$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169}$

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$
- $\Rightarrow \det T = -1$

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$
- $\Rightarrow \det T = -1 \Rightarrow T$ simetría axial

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$
- $\Rightarrow \det T = -1 \Rightarrow T$ simetría axial
- eje: son los (x, y) tales que $T(x, y) = (x, y)$

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$
- $\Rightarrow \det T = -1 \Rightarrow T$ simetría axial
- eje: son los (x, y) tales que $T(x, y) = (x, y) \rightarrow S_1$

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$
- $\Rightarrow \det T = -1 \Rightarrow T$ simetría axial
- eje: son los (x, y) tales que $T(x, y) = (x, y) \rightarrow S_1$
- $\ker(T - I) = \{(x, y) : -\frac{1}{13}x - \frac{5}{13}y = 0\}$

ejemplo

ejemplo



$$T(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- T isometría (columnas forman base ortonormal)
- $\chi_T(\lambda) = (\frac{12}{13} - \lambda)(-\frac{12}{13} - \lambda) - \frac{25}{169} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$
- $\Rightarrow \det T = -1 \Rightarrow T$ simetría axial
- eje: son los (x, y) tales que $T(x, y) = (x, y) \rightarrow S_1$
- $\ker(T - I) = \{(x, y) : -\frac{1}{13}x - \frac{5}{13}y = 0\} = [(-5, 1)]$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometría

isometrías de $\mathbb{R}^3$

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con columnas de A formando base ortonormal

isometrías de $\mathbb{R}^3$

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con columnas de A formando base ortonormal
- $\chi_T(\lambda)$ tiene al menos una raíz real

isometrías de $\mathbb{R}^3$

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con columnas de A formando base ortonormal
- $\chi_T(\lambda)$ tiene al menos una raíz real
- $\Rightarrow \lambda_0 = 1$ o $\lambda_0 = -1$ raíz de χ_T

isometrías de $\mathbb{R}^3$

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con columnas de A formando base ortonormal
- $\chi_T(\lambda)$ tiene al menos una raíz real
- $\Rightarrow \lambda_0 = 1$ o $\lambda_0 = -1$ raíz de χ_T
- sea u vep asociado a λ_0 con $\|u\| = 1$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con columnas de A formando base ortonormal
- $\chi_T(\lambda)$ tiene al menos una raíz real
- $\Rightarrow \lambda_0 = 1$ o $\lambda_0 = -1$ raíz de χ_T
- sea u vep asociado a λ_0 con $\|u\| = 1$
- tomemos $\{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $[u]^\perp$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ isometría
- $\Rightarrow Tx = Ax$ con columnas de A formando base ortonormal
- $\chi_T(\lambda)$ tiene al menos una raíz real
- $\Rightarrow \lambda_0 = 1$ o $\lambda_0 = -1$ raíz de χ_T
- sea u vep asociado a λ_0 con $\|u\| = 1$
- tomemos $\{v_1, v_2\}$ base ortonormal de $[u]^\perp$
- $\Rightarrow \mathcal{B} = \{u, v_1, v_2\}$ base ortonormal

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$

• $\Rightarrow$ primera fila vector unitario

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$

• $\Rightarrow$ primera fila vector unitario

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$



$\Rightarrow$ primera fila vector unitario



$\Rightarrow [v_1, v_2]$ s.e.v. invariante y la matriz asociada a T en el s.e.v. es

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$



$\Rightarrow$ primera fila vector unitario



$\Rightarrow [v_1, v_2]$ s.e.v. invariante y la matriz asociada a T en el s.e.v. es



$$E = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$



$\Rightarrow$ primera fila vector unitario



$\Rightarrow [v_1, v_2]$ s.e.v. invariante y la matriz asociada a T en el s.e.v. es



$$E = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$



T en este s.e.v. también es una isometría

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$



$\Rightarrow$ primera fila vector unitario



$\Rightarrow [v_1, v_2]$ s.e.v. invariante y la matriz asociada a T en el s.e.v. es



$$E = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$



T en este s.e.v. también es una isometría



E es una isometría de $\mathbb{R}^2$

isometrías de $\mathbb{R}^3$ 

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \quad \text{matriz ortogonal}$$



$\Rightarrow$ primera fila vector unitario



$\Rightarrow [v_1, v_2]$ s.e.v. invariante y la matriz asociada a T en el s.e.v. es



$$E = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$



T en este s.e.v. también es una isometría



E es una isometría de $\mathbb{R}^2$



hay 4 casos:

isometrías de $\mathbb{R}^3$

$$(I) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(II) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(III) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(IV) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$
(III) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(IV) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

- caso (II) matriz semejante a $\text{diag}(1, 1, -1)$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$
(III) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(IV) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

- caso (II) matriz semejante a $\text{diag}(1, 1, -1)$
- $\Rightarrow$ simetría respecto del plano S_1

isometrías de $\mathbb{R}^3$

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$
(III) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(IV) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

- caso (II) matriz semejante a $\text{diag}(1, 1, -1)$
- $\Rightarrow$ simetría respecto del plano S_1
- caso (IV) matriz semejante a $\text{diag}(-1, 1, -1)$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(II) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$
(III) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	(IV) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

- caso (II) matriz semejante a $\text{diag}(1, 1, -1)$
- $\Rightarrow$ simetría respecto del plano S_1
- caso (IV) matriz semejante a $\text{diag}(-1, 1, -1)$
- simetría que deja fijo el eje $[v_1]$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

matriz asociada	$\det T$	$\text{tr} (T)$	Acción

isometrías de $\mathbb{R}^3$

matriz asociada	$\det T$	$\text{tr}(T)$	Acción
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	1	$1 + 2 \cos \theta$	rotación θ alrededor eje u

isometrías de $\mathbb{R}^3$

matriz asociada	$\det T$	$\text{tr}(T)$	Acción
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	1	$1 + 2 \cos \theta$	rotación θ alrededor eje u
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	1	simetría respecto del plano S_1

isometrías de $\mathbb{R}^3$

matriz asociada	$\det T$	$\text{tr}(T)$	Acción
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	1	$1 + 2 \cos \theta$	rotación θ alrededor eje u
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	1	simetría respecto del plano S_1
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	-1	$-1 + 2 \cos \theta$	rotación alr. $[u]$ seguido de simetría resp. $[u]^\perp$

isometrías de $\mathbb{R}^3$

matriz asociada	$\det T$	$\text{tr}(T)$	Acción
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	1	$1 + 2 \cos \theta$	rotación θ alrededor eje u
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	-1	1	simetría respecto del plano S_1
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	-1	$-1 + 2 \cos \theta$	rotación θ alrededor eje u seguido de simetría respecto $[u]^\perp$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	-1	simetría axial

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$
- T isometría:

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$
- T isometría: $\{(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}), (0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})\}$ ortonormal

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$
- T isometría: $\{(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}), (0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})\}$ ortonormal
- $c(T)_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ matriz asociada en la base canónica

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$
- T isometría: $\{(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}), (0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})\}$ ortonormal
- $c(T)_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ matriz asociada en la base canónica
- $\det T = -1, \operatorname{tr} T = 1$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$
- T isometría: $\{(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}), (0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})\}$ ortonormal
- $c(T)_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ matriz asociada en la base canónica
- $\det T = -1$, $\text{tr } T = 1 \Rightarrow T$ simetría resp. plano S_1

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$
- T isometría: $\{(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}), (0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})\}$ ortonormal
- $c(T)_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ matriz asociada en la base canónica
- $\det T = -1$, $\text{tr } T = 1 \Rightarrow T$ simetría resp. plano S_1
- $\ker(T - I) = \{(x, y, z) : -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}z = 0\}$

ejemplo

ejemplo

- $T(x, y, z) = (\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z)$
- T isometría: $\{(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}), (0, 1, 0), (-\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})\}$ ortonormal
- $c(T)_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ matriz asociada en la base canónica
- $\det T = -1$, $\text{tr } T = 1 \Rightarrow T$ simetría resp. plano S_1
- $\ker(T - I) = \{(x, y, z) : -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}z = 0\} = [(1, 0, 2)]^\perp$