Formas cuadráticas

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

4 de noviembre de 2010

forma cuadrática

definición (forma cuadrática)

- $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ si

forma cuadrática

definición (forma cuadrática)

- $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ si
  1. B polinomio

forma cuadrática

definición (forma cuadrática)

- $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ si
  1. B polinomio
  2. todos los monomios de B tienen grado 2

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$
- $B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{2}x_1x_2 - \frac{1}{5}x_1x_4$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$
- $B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{2}x_1 x_2 - \frac{1}{5}x_1 x_4$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$
- $B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{2}x_1x_2 - \frac{1}{5}x_1x_4$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$
- $B(x, y) = 2x^2 + x + y$

ejemplos

ejemplos

- $B(x,y,z) = x^2 + y^2 + zx$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$
- $B(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt{2}x_1x_2 - \frac{1}{5}x_1x_4$ forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$
- $B(x,y) = 2x^2 + x + y$ NO es forma cuadrática

expresión matricial

proposición

- B forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$

expresión matricial

proposición

- B forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$
- $\Rightarrow B(x) = x^t A x$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica

expresión matricial

proposición

- B forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$
- $\Rightarrow B(x) = x^t A x$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica

expresión matricial

proposición

- B forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$
- $\Rightarrow B(x) = x^t A x$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow B(x) = x^t A x$ forma cuadrática

demostración

ejercicio

ejemplo 1

ejemplo 1

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica

ejemplo 1

ejemplo 1

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica
- $B(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica
- $B(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $B(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica
- $B(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $B(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$
- $B(x,y) = 2x^2 + xy + yx + y^2$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica
- $B(x,y) = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $B(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix}$
- $B(x,y) = 2x^2 + xy + yx + y^2 = 2x^2 + 2xy + y^2$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica
- $B(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $B(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}$
- $B(x, y) = 2x^2 + xy + yx + y^2 = 2x^2 + 2xy + y^2$ forma cuadrática

ejemplo 2

ejemplo 2

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$
- $\Rightarrow A = \left(\quad \right)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & \frac{1}{2} \\ & 1 & \\ \frac{1}{2} & & 0 \end{pmatrix}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + zx$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

cambio de variables

proposición

- $B(x) = x^t A x$ forma cuadrática

cambio de variables

proposición

- $B(x) = x^t A x$ forma cuadrática
- $\Rightarrow \exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que

cambio de variables

proposición

- $B(x) = x^t Ax$ forma cuadrática
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que
- con el cambio de variable $x = Px'$, la forma cuadrática queda

cambio de variables

proposición

- $B(x) = x^t Ax$ forma cuadrática
- $\Rightarrow \exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que
- con el cambio de variable $x = Px'$, la forma cuadrática queda
- $$B(Px') = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$$

cambio de variables

proposición

- $B(x) = x^t A x$ forma cuadrática
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que
- con el cambio de variable $x = Px'$, la forma cuadrática queda
- $$B(Px') = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$$
- donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vap de A

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow P^tAP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow P^tAP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ llamamos x' tal que $x = Px'$, entonces

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow P^tAP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ llamamos x' tal que $x = Px'$, entonces
- $B(Px') = x^tAx$

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow P^tAP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ llamamos x' tal que $x = Px'$, entonces
- $B(Px') = x^tAx = (Px')^tA(Px')$

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow P^tAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ llamamos x' tal que $x = Px'$, entonces
- $B(Px') = x^tAx = (Px')^tA(Px') = x'^tP^tAPx'$

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow P^tAP = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ llamamos x' tal que $x = Px'$, entonces
- $B(Px') = x^tAx = (Px')^tA(Px') = x'^tP^tAPx'$
- $B(Px') = x'^t\,\text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x'$

demostración

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica
- $\Rightarrow \exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal ($P^{-1} = P^t$) tal que
- $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow P^tAP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $\Rightarrow$ llamamos x' tal que $x = Px'$, entonces
- $B(Px') = x^tAx = (Px')^tA(Px') = x'^tP^tAPx'$
- $B(Px') = x'^t\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x'$ $\square$

ejemplo

ejemplo

- $B(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$

ejemplo

ejemplo

- $B(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ejemplo

ejemplo

- $B(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- vap A: $\det(A - \lambda I) = 0$

ejemplo

ejemplo

- $B(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- vap A: $\det(A - \lambda I) = 0$
- $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$

ejemplo

ejemplo

- $B(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- vap A: $\det(A - \lambda I) = 0$
- $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$
- para algún cambio de variables $(x,y,z) = P(x', y', z')$ queda

ejemplo

ejemplo

- $B(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- vap A: $\det(A - \lambda I) = 0$
- $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$
- para algún cambio de variables $(x, y, z) = P(x', y', z')$ queda
- $B(P(x', y', z')) = -x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2$

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)
- $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)
- $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+3y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = 0$

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)
- $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+3y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2z, -2z, z)$

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)
- $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+3y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow (2z, -2z, z)$
- con norma 1 elegimos vep$(-1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)
- $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+3y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2z, -2z, z)$
- con norma 1 elegimos vep$(-1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
- de la misma forma conseguimos vep(2) y vep(5)

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)
- $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+3y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2z, -2z, z)$
- con norma 1 elegimos vep$(-1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
- de la misma forma conseguimos vep(2) y vep(5)
- $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

ejemplo

ejemplo

- $\Rightarrow P = (vep(-1), vep(2), vep(5))$
- (todos con norma 1)
- $(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+3y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2z, -2z, z)$
- con norma 1 elegimos vep$(-1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
- de la misma forma conseguimos vep(2) y vep(5)
- $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
- el cambio $(x, y, z) = P(x', y', z')$ es el que buscamos

estudio de los signos

	$\exists v_0 \neq 0$ $B(v_0) = 0$	el resto
definida positiva	no	$v \neq 0 \Rightarrow B(v) > 0$
semidefinida positiva	si	$B(v) \geq 0$
definida negativa	no	$v \neq 0 \Rightarrow B(v) < 0$
semidefinida negativa	si	$B(v) \leq 0$
indefinida	si	hay $B(v) > 0$ y $B(w) < 0$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y) = xy$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y) = xy$ indefinida

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y) = xy$ indefinida
- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y) = xy$ indefinida
- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida positiva

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y) = xy$ indefinida
- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida positiva
- $B(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2$

ejemplos

ejemplos

- $B(x, y) = xy$ indefinida
- $B(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ definida positiva
- $B(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2$ semidefinida positiva

teorema

teorema

- $B = x^t A x$ forma cuadrática con A simétrica

teorema

teorema

- $B = x^t Ax$ forma cuadrática con A simétrica
- Entonces:

teorema

teorema

- $B = x^t A x$ forma cuadrática con A simétrica
- Entonces:
  1. B def. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $+$

teorema

teorema

- $B = x^t A x$ forma cuadrática con A simétrica
- Entonces:
  1. B def. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $+$
  2. B semidef. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son ≥ 0 y 0

teorema

teorema

- $B = x^t A x$ forma cuadrática con A simétrica
- Entonces:
  1. B def. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $+$
  2. B semidef. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son ≥ 0 y 0
  3. B def. neg. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $-$

teorema

teorema

- $B = x^t A x$ forma cuadrática con A simétrica
- Entonces:
  1. B def. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $+$
  2. B semidef. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son ≥ 0 y 0
  3. B def. neg. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $-$
  4. B semidef. neg. $\Leftrightarrow$ todos los vap son ≤ 0 y 0

teorema

teorema

- $B = x^t A x$ forma cuadrática con A simétrica
- Entonces:
  1. B def. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $+$
  2. B semidef. pos. $\Leftrightarrow$ todos los vap son ≥ 0 y 0
  3. B def. neg. $\Leftrightarrow$ todos los vap son $-$
  4. B semidef. neg. $\Leftrightarrow$ todos los vap son ≤ 0 y 0
  5. B indefinida $\Leftrightarrow$ hay vap $+$ y $-$

demostración

- supongo todos los vap son ≥ 0 y alguno es 0

demostración

- supongo todos los vap son ≥ 0 y alguno es 0
- $\Rightarrow B(Px') = \sum \lambda_i x_i'^2 \geq 0$

demostración

- supongo todos los vap son ≥ 0 y alguno es 0
- $\Rightarrow B(Px') = \sum \lambda_i x_i'^2 \geq 0$
- además hay un vap 0 $\rightarrow$ existe vep asociado $v \neq 0$

demostración

- supongo todos los vap son ≥ 0 y alguno es 0
- $\Rightarrow B(Px') = \sum \lambda_i x_i'^2 \geq 0$
- además hay un vap 0 $\rightarrow$ existe vep asociado $v \neq 0$
- $\Rightarrow B(v) = v^t A v = 0$

demostración

- supongo todos los vap son ≥ 0 y alguno es 0
- $\Rightarrow B(Px') = \sum \lambda_i x_i'^2 \geq 0$
- además hay un vap 0 $\rightarrow$ existe vep asociado $v \neq 0$
- $\Rightarrow B(v) = v^t A v = 0$
- $\Rightarrow B$ semidefinida positiva

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva
- si $\exists$ vap $\lambda < 0$ entonces, tomamos v vep asociado

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva
- si $\exists$ vap $\lambda < 0$ entonces, tomamos v vep asociado
- y tendríamos $B(v) = v^t A v = \lambda \|v\|^2 < 0$ ABS

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva
- si $\exists$ vap $\lambda < 0$ entonces, tomamos v vep asociado
- y tendríamos $B(v) = v^t A v = \lambda \|v\|^2 < 0$ ABS
- si todos los vap fueran $+$, entonces con cambio de variables $x = Px'$

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva
- si $\exists$ vap $\lambda < 0$ entonces, tomamos v vep asociado
- y tendríamos $B(v) = v^t A v = \lambda \|v\|^2 < 0$ ABS
- si todos los vap fueran $+$, entonces con cambio de variables $x = Px'$
- $B(Px') = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2 > 0$

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva
- si $\exists$ vap $\lambda < 0$ entonces, tomamos v vep asociado
- y tendríamos $B(v) = v^t A v = \lambda \|v\|^2 < 0$ ABS
- si todos los vap fueran $+$, entonces con cambio de variables $x = Px'$
- $B(Px') = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2 > 0$
- para todo $x' \neq 0$, también para todo $x = Px' \neq 0$

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva
- si $\exists$ vap $\lambda < 0$ entonces, tomamos v vep asociado
- y tendríamos $B(v) = v^t A v = \lambda \|v\|^2 < 0$ ABS
- si todos los vap fueran $+$, entonces con cambio de variables $x = Px'$
- $B(Px') = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2 > 0$
- para todo $x' \neq 0$, también para todo $x = Px' \neq 0$
- no sería semidefinida positiva

demostración

- $B(v) = v^t A v$ semidefinida positiva
- si $\exists$ vap $\lambda < 0$ entonces, tomamos v vep asociado
- y tendríamos $B(v) = v^t A v = \lambda \|v\|^2 < 0$ ABS
- si todos los vap fueran $+$, entonces con cambio de variables $x = Px'$
- $B(Px') = \lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2 > 0$
- para todo $x' \neq 0$, también para todo $x = Px' \neq 0$
- no sería semidefinida positiva
- los otros items salen análogamente $\square$

ejemplo

ejemplo

- $B(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$

ejemplo

ejemplo

- $B(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ejemplo

ejemplo

- $B(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- vap $\rightarrow$ -1,2,5

ejemplo

ejemplo

- $B(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 4yz$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- vap $\rightarrow$ -1,2,5
- indefinida (índice 2=número de vap +)

contar cambios de signo

regla de Descartes

- $P(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0$

contar cambios de signo

regla de Descartes

- $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$
- polinomio con todas las raíces $\mathbb{R}$

contar cambios de signo

regla de Descartes

- $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$
- polinomio con todas las raíces $\mathbb{R}$
- entonces

$$\#\{\text{raíces positivas}\} = \#\{\text{cambios de signo de}*\}$$

contar cambios de signo

regla de Descartes

- $P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0$
- polinomio con todas las raíces $\mathbb{R}$
- entonces

$$\#\{\text{raíces positivas}\} = \#\{\text{cambios de signo de} *\}$$

- * $a_n\ a_{n-1}\ \ldots\ a_0$

ejemplo

Clasificar la forma
$B(x, y, z) = 9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz$

ejemplo

Clasificar la forma
$B(x,y,z) = 9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz$

- $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

ejemplo

Clasificar la forma
$B(x, y, z) = 9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz$

- $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
- $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 92\lambda$

ejemplo

Clasificar la forma
$B(x,y,z) = 9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz$

- $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
- $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 92\lambda$
- 2 cambios de signo $\rightarrow$ 2 raíces positivas

ejemplo

Clasificar la forma
$B(x, y, z) = 9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz$

- $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
- $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 92\lambda$
- 2 cambios de signo $\rightarrow$ 2 raíces positivas
- una raíz es cero

ejemplo

Clasificar la forma
$B(x, y, z) = 9x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 6xy - 10xz - 6yz$

- $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -5 \\ 3 & 9 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
- $\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 92\lambda$
- 2 cambios de signo $\rightarrow$ 2 raíces positivas
- una raíz es cero
- $\Rightarrow$ semidefinida positiva