Diagonalización

GAL2

IMERL

12 de agosto de 2010

transformación lineal diagonalizable

definición (transformación lineal diagonalizable)

transformación lineal diagonalizable

definición (transformación lineal diagonalizable)

- $T : V \to V$ operador lineal diagonalizable

transformación lineal diagonalizable

definición (transformación lineal diagonalizable)

- $T : V \to V$ operador lineal diagonalizable
- si $\exists \mathcal{B}$ base tal que

transformación lineal diagonalizable

definición (transformación lineal diagonalizable)

- $T : V \to V$ operador lineal diagonalizable
- si $\exists \mathcal{B}$ base tal que
- $A =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$ es una matriz diagonal

matriz diagonalizable

definición (matriz diagonalizable)

matriz diagonalizable

definición (matriz diagonalizable)

- A matriz diagonalizable

matriz diagonalizable

definición (matriz diagonalizable)

- A matriz diagonalizable
- si A semejante a matriz diagonal

observación

- A matriz diagonalizable $\Leftrightarrow$

observación

- A matriz diagonalizable $\Leftrightarrow$
- T_A transformación lineal diagonalizable, donde

observación

- A matriz diagonalizable $\Leftrightarrow$
- T_A transformación lineal diagonalizable, donde
- $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es tal que $T_A\vec{x} = A\vec{x}$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
- $$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
- $$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

? T diagonalizable?

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
- $$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

? T diagonalizable?

- SI

diagonalización y vep

teorema (diagonalización y vep)

diagonalización y vep

teorema (diagonalización y vep)

- $T : V \to V$ es diagonalizable $\Longleftrightarrow$

diagonalización y vep

teorema (diagonalización y vep)

- $T : V \to V$ es diagonalizable $\iff$
- $\exists\, \mathcal{B}$ base de vectores propios de T

diagonalización y vep

teorema (diagonalización y vep)

- $T : V \to V$ es diagonalizable $\Longleftrightarrow$
- $\exists\, \mathcal{B}$ base de vectores propios de T
- tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ diagonal

diagonalización y vap

corolario (diagonalización y vap)

diagonalización y vap

corolario (diagonalización y vap)

- $T : V \to V$ t.l. diagonalizable $\Longrightarrow$

diagonalización y vap

corolario (diagonalización y vap)

- $T : V \to V$ t.l. diagonalizable $\Longrightarrow$
- la forma diagonal

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

diagonalización y vap

corolario (diagonalización y vap)

- $T : V \to V$ t.l. diagonalizable $\Longrightarrow$
- la forma diagonal

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

- es única a menos de permutaciones de los λ_i (vap de T)

observación

- T diagonalizable $\Longrightarrow$

observación

- T diagonalizable $\Longrightarrow$
- las n raíces características de T están en $\mathbb{K}$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo

- $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- no es diagonalizable en $\mathbb{R}$

condición suficiente para A diagonalizable

teorema (condición suficiente para diagonalizabilidad)

condición suficiente para A diagonalizable

teorema (condición suficiente para diagonalizabilidad)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

condición suficiente para A diagonalizable

teorema (condición suficiente para diagonalizabilidad)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- A tiene n vap distintos: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

condición suficiente para A diagonalizable

teorema (condición suficiente para diagonalizabilidad)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- A tiene n vap distintos: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$
- $\Longrightarrow A$ diagonalizable

demostración

proposición (vep l.i.)

demostración

proposición (vep l.i.)

- $T : V \to V$ t.l.

demostración

proposición (vep l.i.)

- $T : V \to V$ t.l.
- v_i vep asociados a λ_i, $i = 1, \ldots, k$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$

demostración

proposición (vep l.i.)

- $T : V \to V$ t.l.
- v_i vep asociados a λ_i, $i = 1, \ldots, k$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$
- $\Longrightarrow \{v_1, \ldots, v_k\}$ l.i.

demostración

proposición (vep l.i.)

demostración

proposición (vep l.i.)

- $T : V \to V$ t.l.

demostración

proposición (vep l.i.)

- $T : V \to V$ t.l.
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ distintos, $v_i \in S_{\lambda_i} - \{0\}$

demostración

proposición (vep l.i.)

- $T : V \to V$ t.l.
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ distintos, $v_i \in S_{\lambda_i} - \{0\}$
- $\Longrightarrow \{v_1, \ldots, v_k\}$ l.i.

demostración proposición

- por inducción

demostración proposición

- por inducción
- obvio para $k = 1$. Supongo vale para un $k \geq 1$

demostración proposición

- por inducción
- obvio para $k = 1$. Supongo vale para un $k \geq 1$
- planteamos

$$E = a_1 v_1 + \cdots + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

demostración proposición

- por inducción
- obvio para $k = 1$. Supongo vale para un $k \geq 1$
- planteamos

$$E = a_1 v_1 + \cdots + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

- $\Rightarrow T(E) - \lambda_{k+1} E = \vec{0}$

demostración proposición

- por inducción
- obvio para $k = 1$. Supongo vale para un $k \geq 1$
- planteamos

$$E = a_1 v_1 + \cdots + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

- $\Rightarrow T(E) - \lambda_{k+1} E = \vec{0}$
- $\Rightarrow a_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, k$

demostración proposición

- por inducción
- obvio para $k = 1$. Supongo vale para un $k \geq 1$
- planteamos

$$E = a_1 v_1 + \cdots + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

- $\Rightarrow T(E) - \lambda_{k+1} E = \vec{0}$
- $\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$

demostración proposición

- por inducción
- obvio para $k = 1$. Supongo vale para un $k \geq 1$
- planteamos

$$E = a_1 v_1 + \cdots + a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$$

- $\Rightarrow T(E) - \lambda_{k+1} E = \vec{0}$
- $\Rightarrow a_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, k$
- $\Rightarrow a_{k+1} v_{k+1} = \vec{0}$
- $\Rightarrow a_{k+1} = 0 \; \square$

observación

observación/ejemplo (la condición no es necesaria)

observación

observación/ejemplo (la condición no es necesaria)

- A diagonalizable $\not\Longrightarrow$ los valores propios son $\neq$

observación

observación/ejemplo (la condición no es necesaria)

- A diagonalizable $\not\Longrightarrow$ los valores propios son $\neq$
- ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo 1

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo 1

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
- determinar si A es diagonalizable

ejemplo

ejemplo 1

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
- determinar si A es diagonalizable
- se plantea $\chi_A(\lambda) = 0$

ejemplo

ejemplo 1

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
- determinar si A es diagonalizable
- se plantea $\chi_A(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2$ (doble), $\lambda = 7$

ejemplo

ejemplo 1

- $$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
- determinar si A es diagonalizable
- se plantea $\chi_A(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2$ (doble), $\lambda = 7$
- $S_2 = \mathbb{R}(1,0,0) + \mathbb{R}(0,0,1)$ $S_7 = \mathbb{R}(1,-1,1)$

ejemplo

ejemplo 1

- $$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo 1

- $$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
- $$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo 1

- $$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
- $$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
- $$A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\Rightarrow$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(2, 2, 7)$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\Rightarrow$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(2,2,7)$$

- A semejante a matriz diagonal

ejemplo 2

ejemplo 2

- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que

ejemplo 2

ejemplo 2

- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que
- $$c(T)_c = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que
- $$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
- diagonalizar T si es posible

ejemplo 2

ejemplo 2

- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que
- $$c(T)c = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
- diagonalizar T si es posible
- planteamos $\chi_T(\lambda) = 0$

ejemplo 2

ejemplo 2

- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que
- $$c(T)_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
- diagonalizar T si es posible
- planteamos $\chi_T(\lambda) = 0 \to \lambda = 3, 4, 2$

ejemplo 2

ejemplo 2

- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que
- $$c(T)_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
- diagonalizar T si es posible
- planteamos $\chi_T(\lambda) = 0 \to \lambda = 3, 4, 2$
- T es diagonalizable (equivalente a $\mathrm{diag}(3, 4, 2)$)

ejemplo 2

ejemplo 2

- Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la t.l. tal que
- $$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
- diagonalizar T si es posible
- planteamos $\chi_T(\lambda) = 0 \to \lambda = 3, 4, 2$
- T es diagonalizable (equivalente a $\mathrm{diag}(3, 4, 2)$)
- se busca base de vep para diagonalizar

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- $S_3 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $S_3 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$
- $S_4 = \mathbb{R}(0, -1, 1)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $S_3 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$
- $S_4 = \mathbb{R}(0, -1, 1)$
- $S_2 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $S_3 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$
- $S_4 = \mathbb{R}(0, -1, 1)$
- $S_2 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$
- $\Rightarrow$ en la base $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ tenemos

ejemplo 2

ejemplo 2

- $S_3 = \mathbb{R}(-1, 0, 1)$
- $S_4 = \mathbb{R}(0, -1, 1)$
- $S_2 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$
- $\Rightarrow$ en la base $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ tenemos
- $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \text{diag}(3, 4, 2)$

ejemplo 3

ejemplo 3

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- diagonalizar A si es posible

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- diagonalizar A si es posible
- planteamos $\chi_A(\lambda) = 0$

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- diagonalizar A si es posible
- planteamos $\chi_A(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2, 2, 7$

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- diagonalizar A si es posible
- planteamos $\chi_A(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2, 2, 7$
- calculamos S_2, S_7

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
- diagonalizar A si es posible
- planteamos $\chi_A(\lambda) = 0 \to \lambda = 2, 2, 7$
- $S_2 = \mathbb{R}(1, 0, 0)$, $S_7 = \mathbb{R}(1, -1, 1)$

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- diagonalizar A si es posible
- planteamos $\chi_A(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 2, 2, 7$
- $S_2 = \mathbb{R}(1, 0, 0)$, $S_7 = \mathbb{R}(1, -1, 1)$
- no hay 3 vep l.i.

ejemplo 3

ejemplo 3

- dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- diagonalizar A si es posible
- planteamos $\chi_A(\lambda) = 0 \to \lambda = 2, 2, 7$
- $S_2 = \mathbb{R}(1, 0, 0)$, $S_7 = \mathbb{R}(1, -1, 1)$
- no hay 3 vep l.i. $\Rightarrow$ NO es diagonalizable