Multiplicidad aritmética y geométrica
Teorema de Gershgorin

GAL2

IMERL

19 de agosto de 2010

multiplicidad algebraica y geométrica

definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

multiplicidad algebraica y geométrica

definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

- $T : V \to V$ t.l.

multiplicidad algebraica y geométrica

definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

- $T : V \to V$ t.l.
- λ_0 vap de T

multiplicidad algebraica y geométrica

definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

- $T : V \to V$ t.l.
- λ_0 vap de T
- multiplicidad algebraica de λ_0:

multiplicidad algebraica y geométrica

definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

- $T : V \to V$ t.l.
- λ_0 vap de T
- multiplicidad algebraica de λ_0:

$$m.a.(\lambda_0) = \text{multiplicidad de } \lambda_0 \text{ como raíz característica}$$

multiplicidad algebraica y geométrica

definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

- $T : V \to V$ t.l.
- λ_0 vap de T
- multiplicidad algebraica de λ_0:

$$m.a.(\lambda_0) = \text{multiplicidad de } \lambda_0 \text{ como raíz característica}$$

- multiplicidad geométrica de λ_0:

multiplicidad algebraica y geométrica

definición (multiplicidad algebraica y geométrica)

- $T : V \to V$ t.l.
- λ_0 vap de T
- multiplicidad algebraica de λ_0:

$$m.a.(\lambda_0) = \text{multiplicidad de } \lambda_0 \text{ como raíz característica}$$

- multiplicidad geométrica de λ_0:

$$m.g.(\lambda_0) = \dim S_{\lambda_0}$$

ejemplo

ejemplo

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $m.a.(-5) = 2$ y $m.a.(1) = 3$

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $m.a.(-5) = 2$ y $m.a.(1) = 3$
- $m.g.(-5) = 2$ y $m.g.(1) = 1$

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $m.a.(-5) = 2$ y $m.a.(1) = 3$
- $m.g.(-5) = 2$ y $m.g.(1) = 1$
- $\Rightarrow \dim S_{-5} = 2$ y $\dim S_1 = 1$

ejemplo

ejemplo

- $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ dado por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $m.a.(-5) = 2$ y $m.a.(1) = 3$
- $m.g.(-5) = 2$ y $m.g.(1) = 1$
- $\Rightarrow \dim S_{-5} = 2$ y $\dim S_1 = 1$
- $\Rightarrow T$ no es diagonalizable

multiplicidad algebraica y $\geq$ geométrica

teorema (*m.a.* $\geq$ *m.g.*)

multiplicidad algebraica y $\geq$ geométrica

teorema ($m.a. \geq m.g.$)

- $T : V \to V$ t.l.

multiplicidad algebraica y $\geq$ geométrica

teorema ($m.a. \geq m.g.$)

- $T : V \to V$ t.l.
- λ_0 vap de T

multiplicidad algebraica y $\geq$ geométrica

teorema ($m.a. \geq m.g.$)

- $T : V \to V$ t.l.
- λ_0 vap de T
- $\Rightarrow$

$$m.a.(\lambda_0) \geq m.g.(\lambda_0)$$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$,

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{(n-k)}(\mathbb{K})$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{(n-k)}(\mathbb{K})$

- $\Rightarrow \chi_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda I)$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{(n-k)}(\mathbb{K})$

- $\Rightarrow \chi_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda I)$
- $\Rightarrow$ multiplicidad de λ_0 como raíz $\geq k$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{(n-k)}(\mathbb{K})$

- $\Rightarrow \chi_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda I)$
- $\Rightarrow$ multiplicidad de λ_0 como raíz $\geq k$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_0) \geq m.g.(\lambda_0)$

demostración

- $m.g.(\lambda_0) = k$
- $\Rightarrow \dim(S_{\lambda_0}) = k$
- sea $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_k\}$ base de S_{λ_0}
- completamos $\mathcal{B}_0$ hasta $\mathcal{B}$ base de V

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 I & B \\ \mathbb{O} & C \end{pmatrix}$$

  donde $I \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$, $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{(n-k)}(\mathbb{K})$
- $\Rightarrow \chi_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda I)$
- $\Rightarrow$ multiplicidad de λ_0 como raíz $\geq k$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_0) \geq m.g.(\lambda_0)\square$

condición necesaria y suficiente para diagonalizabilidad

teorema (cond. necesaria y suficiente para diagonalizabilidad)

condición necesaria y suficiente para diagonalizabilidad

teorema (cond. necesaria y suficiente para diagonalizabilidad)

- $T : V \to V$ t.l.

condición necesaria y suficiente para diagonalizabilidad

teorema (cond. necesaria y suficiente para diagonalizabilidad)

- $T : V \to V$ t.l.
- T diagonalizable $\Longleftrightarrow$

condición necesaria y suficiente para diagonalizabilidad

teorema (cond. necesaria y suficiente para diagonalizabilidad)

- $T : V \to V$ t.l.
- T diagonalizable $\Longleftrightarrow$
  - χ_T tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$

condición necesaria y suficiente para diagonalizabilidad

teorema (cond. necesaria y suficiente para diagonalizabilidad)

- $T : V \to V$ t.l.
- T diagonalizable $\iff$
  - χ_T tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$
  - $m.a.(\lambda_i) = m.g.(\lambda_i)$ para todo vap de T

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$
$$m.a.(\lambda_1) \quad + \cdots + \quad m.a.(\lambda_k) \quad = \quad n$$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} m.a.(\lambda_1) & + \cdots + & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \\ m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & & \end{array}$$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} m.a.(\lambda_1) & + \cdots + & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \vee\!\mid & \vee\!\mid & \vee\!\mid & & \\ m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & \leq & n \end{array}$$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} m.a.(\lambda_1) & + \cdots + & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \vee\!| & \vee\!| & \vee\!| & & \\ m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & \leq & n \end{array}$$

- si $m.g.(\lambda_i) < m.a.(\lambda_i)$ para algún $i = 1, \ldots, k$ entonces

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} m.a.(\lambda_1) & + \cdots + & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \vee\!| & \vee\!| & \vee\!| & & \\ m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & \leq & n \end{array}$$

- si $m.g.(\lambda_i) < m.a.(\lambda_i)$ para algún $i = 1, \ldots, k$ entonces
- $$m.g.(\lambda_1) \quad + \cdots + \quad m.g.(\lambda_k) \quad < \quad n$$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} m.a.(\lambda_1) & + \cdots + & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| \\ m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & \leq & n \end{array}$$

- si $m.g.(\lambda_i) < m.a.(\lambda_i)$ para algún $i = 1, \ldots, k$ entonces
-

$$\begin{array}{ccccc} m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & < & n \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\ \dim(S_{\lambda_1}) & + \cdots + & \dim(S_{\lambda_k}) & < & n \end{array}$$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} m.a.(\lambda_1) & + \cdots + & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \vee\mid & \vee\mid & \vee\mid & & \\ m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & \leq & n \end{array}$$

- si $m.g.(\lambda_i) < m.a.(\lambda_i)$ para algún $i = 1, \ldots, k$ entonces
-

$$\begin{array}{ccccc} m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & < & n \\ \| & \| & \| & & \| \\ \dim(S_{\lambda_1}) & + \cdots + & \dim(S_{\lambda_k}) & < & n \\ & \| & & & \| \\ \dim(S_{\lambda_1} & \oplus \cdots \oplus & S_{\lambda_k}) & < & n \end{array}$$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} m.a.(\lambda_1) & +\cdots+ & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \vee| & \vee| & \vee| & & \\ m.g.(\lambda_1) & +\cdots+ & m.g.(\lambda_k) & \leq & n \end{array}$$

- si $m.g.(\lambda_i) < m.a.(\lambda_i)$ para algún $i = 1, \ldots, k$ entonces
-

$$\begin{array}{ccccc} m.g.(\lambda_1) & +\cdots+ & m.g.(\lambda_k) & < & n \\ \| & \| & \| & & \| \\ \dim(S_{\lambda_1}) & +\cdots+ & \dim(S_{\lambda_k}) & < & n \\ & \| & & & \| \\ \dim(S_{\lambda_1} & \oplus\cdots\oplus & S_{\lambda_k}) & < & n \end{array}$$

- $\Rightarrow S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k} \neq V$

demostración

- $\Rightarrow$) supongamos T diagonalizable ($\dim V = n$)
- $\Rightarrow$ todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} m.a.(\lambda_1) & +\cdots+ & m.a.(\lambda_k) & = & n \\ \vee\!| & \vee\!| & \vee\!| & & \\ m.g.(\lambda_1) & +\cdots+ & m.g.(\lambda_k) & \leq & n \end{array}$$

- si $m.g.(\lambda_i) < m.a.(\lambda_i)$ para algún $i = 1, \ldots, k$ entonces
-

$$\begin{array}{ccccc} m.g.(\lambda_1) & +\cdots+ & m.g.(\lambda_k) & < & n \\ \| & \| & \| & & \| \\ \dim(S_{\lambda_1}) & +\cdots+ & \dim(S_{\lambda_k}) & < & n \\ & \| & & & \| \\ \dim(S_{\lambda_1} & \oplus\cdots\oplus & S_{\lambda_k}) & < & n \end{array}$$

- $\Rightarrow S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k} \neq V \square$

demostración

- $\Leftarrow$) todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$

demostración

- $\Leftarrow$) todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_1) + \cdots + m.a.(\lambda_k) = n$

demostración

- $\Leftarrow$) todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_1) + \cdots + m.a.(\lambda_k) = n$
- (H2) $\Rightarrow$

$$m.g.(\lambda_1) \quad + \cdots + \quad m.g.(\lambda_k) \quad = \quad n$$

demostración

- $\Leftarrow$) todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_1) + \cdots + m.a.(\lambda_k) = n$
- (H2) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & = & n \\ \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel \\ \dim(S_{\lambda_1}) & + \cdots + & \dim(S_{\lambda_k}) & = & n \end{array}$$

demostración

- $\Leftarrow$) todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_1) + \cdots + m.a.(\lambda_k) = n$
- (H2) $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{ccccccc}
m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & = & n \\
\parallel & \parallel & \parallel & & \parallel \\
\dim(S_{\lambda_1}) & + \cdots + & \dim(S_{\lambda_k}) & = & n \\
 & \parallel & & & \parallel \\
\dim(S_{\lambda_1} & \oplus \cdots \oplus & S_{\lambda_k}) & = & n
\end{array}
$$

demostración

- $\Leftarrow$) todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_1) + \cdots + m.a.(\lambda_k) = n$
- (H2) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc}
m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & = & n \\
\shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\
\dim(S_{\lambda_1}) & + \cdots + & \dim(S_{\lambda_k}) & = & n \\
 & \shortparallel & & & \shortparallel \\
\dim(S_{\lambda_1} & \oplus \cdots \oplus & S_{\lambda_k}) & = & n
\end{array}$$

- $\Rightarrow S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k} = V$

demostración

- $\Leftarrow$) todas las raíces de $\chi_T(\lambda)$ están en $\mathbb{K}$
- $\Rightarrow m.a.(\lambda_1) + \cdots + m.a.(\lambda_k) = n$
- (H2) $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{ccccc}
m.g.(\lambda_1) & + \cdots + & m.g.(\lambda_k) & = & n \\
\| & \| & \| & & \| \\
\dim(S_{\lambda_1}) & + \cdots + & \dim(S_{\lambda_k}) & = & n \\
& \| & & & \| \\
\dim(S_{\lambda_1} & \oplus \cdots \oplus & S_{\lambda_k}) & = & n
\end{array}
$$

- $\Rightarrow S_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus S_{\lambda_k} = V$ $\square$

definición previa (radios y círculos)

definición (radios y círculos)

definición previa (radios y círculos)

definición (radios y círculos)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

definición previa (radios y círculos)

definición (radios y círculos)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- radio *i*-ésimo de A

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

definición previa (radios y círculos)

definición (radios y círculos)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- radio i-ésimo de A

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- círculo i-ésimo de A

$$\mathcal{C}_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

teorema de Gershgorin

teorema (Gershgorin)

teorema de Gershgorin

teorema (Gershgorin)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

teorema de Gershgorin

teorema (Gershgorin)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $\Longrightarrow$

teorema de Gershgorin

teorema (Gershgorin)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $\Longrightarrow$
    - $$\{\text{vap de } A\} \subset \bigcup_i \mathcal{C}_i$$

teorema de Gershgorin

teorema (Gershgorin)

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
- $\Longrightarrow$
  - $$\{\text{vap de } A\} \subset \bigcup_i \mathcal{C}_i$$
  - si el conjunto $M = \mathcal{C}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathcal{C}_{i_m}$ es disjunto de todos los círculos i-ésimos restantes, entonces hay exactamente m vap en M (contados con $m.a.$)

demostración

- sin demostración

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, ,

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$,

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$
- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 3$
- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 3$
- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$
- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\}$
- $\Rightarrow$ cada $\mathcal{C}_i$ contiene un vap

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$
- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\}$
- $\Rightarrow$ cada $\mathcal{C}_i$ contiene un vap
- $\Rightarrow$ A es diagonalizable, y

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$
- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\}$
- $\Rightarrow$ cada $\mathcal{C}_i$ contiene un vap
- $\Rightarrow$ A es diagonalizable, y $\{\text{vap de } A\} \subset \mathbb{R}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$$

- $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$
- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\}$
- $\Rightarrow$ cada $\mathcal{C}_i$ contiene un vap
- $\Rightarrow$ A es diagonalizable, y $\{\text{vap de } A\} \subset \mathbb{R}$
- $\{\text{vap de } A\} \subset [8, 12] \cup [22, 28] \cup [29, 35]$

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

ejemplo 2

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 1\}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 1\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 1\}$
- $\mathcal{C}_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 2\}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- a ver qué podemos decir de los vap de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 2\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 1\}$
- $\mathcal{C}_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 2\}$
- sólo podemos decir que $\{\text{vap de } A\} \subset \mathcal{C}_2$

observación

ejemplo 2 - observación

- calculemos los vap a mano:

observación

ejemplo 2 - observación

- calculemos los vap a mano:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 & 0 \\ -1 & (2-\lambda) & 1 & 0 \\ -1 & 0 & (3-\lambda) & 0 \\ -1 & 0 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

observación

ejemplo 2 - observación

- calculemos los vap a mano:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ -1 & (2-\lambda) & 1 \\ -1 & 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix}$$

observación

ejemplo 2 - observación

- calculemos los vap a mano:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ -1 & (2-\lambda) & 1 \\ -1 & 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (3-\lambda) - 1]$

observación

ejemplo 2 - observación

- calculemos los vap a mano:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ -1 & (2-\lambda) & 1 \\ -1 & 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (3-\lambda) - 1]$
- $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8)$

observación

ejemplo 2 - observación

- calculemos los vap a mano:

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ -1 & (2-\lambda) & 1 \\ -1 & 0 & (3-\lambda) \end{vmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (3-\lambda) - 1]$
- $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8)$
- $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^4$