

Forma canónica de Jordan. Ejemplos 2×2 y 3×3

GAL2

IMERL

26 de agosto de 2010

forma canónica de Jordan

repaso (forma canónica de Jordan)

forma canónica de Jordan

repaso (forma canónica de Jordan)

- $T : V \rightarrow V$ t.l. con $\dim V = n$

forma canónica de Jordan

repaso (forma canónica de Jordan)

- $T : V \rightarrow V$ t.l. con $\dim V = n$
- supongamos que $\chi_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_k}$

forma canónica de Jordan

repaso (forma canónica de Jordan)

- $T : V \rightarrow V$ t.l. con $\dim V = n$
- supongamos que $\chi_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_k}$
- $\Rightarrow$ existe $\mathcal{B}$ base de V tal que

forma canónica de Jordan

repaso (forma canónica de Jordan)

- $T : V \rightarrow V$ t.l. con $\dim V = n$
- supongamos que $\chi_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_k}$
- $\Rightarrow$ existe $\mathcal{B}$ base de V tal que
-

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

forma canónica de Jordan

repaso (forma canónica de Jordan)

- $T : V \rightarrow V$ t.l. con $\dim V = n$
- supongamos que $\chi_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_k}$
- $\Rightarrow$ existe $\mathcal{B}$ base de V tal que
-

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{J(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{J(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

- donde $J(\lambda_i) \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ bloque de Jordan

bloque de Jordan

repaso (bloque de Jordan)

bloque de Jordan

repaso (bloque de Jordan)

- un bloque de Jordan de vap λ es

bloque de Jordan

repaso (bloque de Jordan)

- un bloque de Jordan de vap λ es



$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} sJ_{k_1}(\lambda) & & & \\ & sJ_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & sJ_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix}$$

bloque de Jordan

repaso (bloque de Jordan)

- un bloque de Jordan de vap λ es



$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} sJ_{k_1}(\lambda) & & & \\ & sJ_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & sJ_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix}$$

- con $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p$

repaso (sub-bloque de Jordan)

- sub-bloque de Jordan asociado al vap λ de tamaño k :

repaso (sub-bloque de Jordan)

- sub-bloque de Jordan asociado al vap λ de tamaño k :



$$sJ_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \dots & & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & & 0 \\ & 0 & 1 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\lambda)$$

ejemplo 1

raíces reales distintas



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ejemplo 1

raíces reales distintas



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

● $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 =$

ejemplo 1

raíces reales distintas



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

● $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$

ejemplo 1

raíces reales distintas

●

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$
- $\text{vap} \rightarrow 2, 3$

ejemplo 1

raíces reales distintas



$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$

- $\text{vap} \rightarrow 2, 3$

- $\Rightarrow$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ejemplo 1

base de Jordan

- para buscar base de Jordan, en este caso alcanza con encontrar los vep

ejemplo 1

base de Jordan

- para buscar base de Jordan, en este caso alcanza con encontrar los vep
- vep asociado a $2 \rightarrow (1, -1)$

ejemplo 1

base de Jordan

- para buscar base de Jordan, en este caso alcanza con encontrar los vep
- vep asociado a 2 $\rightarrow (1, -1)$
- vep asociado a 3 $\rightarrow (2, -3)$

ejemplo 1

base de Jordan

- para buscar base de Jordan, en este caso alcanza con encontrar los vep
- vep asociado a 2 $\rightarrow (1, -1)$
- vep asociado a 3 $\rightarrow (2, -3)$
- $\Rightarrow$ matriz cambio de base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

ejemplo 1

base de Jordan

- para buscar base de Jordan, en este caso alcanza con encontrar los vep
- vep asociado a 2 $\rightarrow (1, -1)$
- vep asociado a 3 $\rightarrow (2, -3)$
- $\Rightarrow$ matriz cambio de base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

- tenemos $AP = PJ$

ejemplos 2 y 3

raíz doble

- supongamos que A tiene polinomio característico

ejemplos 2 y 3

raíz doble

- supongamos que A tiene polinomio característico
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^2$

ejemplos 2 y 3

raíz doble

- supongamos que A tiene polinomio característico
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^2$
- $\Rightarrow$ hay 2 opciones:

ejemplos 2 y 3

raíz doble

- supongamos que A tiene polinomio característico
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^2$
- $\Rightarrow$ hay 2 opciones:
- - 1 A diagonalizable

ejemplos 2 y 3

raíz doble

- supongamos que A tiene polinomio característico
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^2$
- $\Rightarrow$ hay 2 opciones:
- - 1 A diagonalizable
 - 2 A no diagonalizable

ejemplo 2

raíz doble - A diagonalizable

proposición

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tal que

ejemplo 2

raíz doble - A diagonalizable

proposición

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tal que
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^2$ y

ejemplo 2

raíz doble - A diagonalizable

proposición

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tal que
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^2$ y
- A diagonalizable

ejemplo 2

raíz doble - A diagonalizable

proposición

- $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ tal que
- $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^2$ y
- A diagonalizable
- $\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

demostración

- λ_0 raíz doble, A diagonalizable

ejemplo 2

demostración

- λ_0 raíz doble, A diagonalizable
- $\Rightarrow AP = PJ$ con $J = \lambda_0 I$

ejemplo 2

demostración

- λ_0 raíz doble, A diagonalizable
- $\Rightarrow AP = PJ$ con $J = \lambda_0 I$
- $\Rightarrow$

$$A = PJP^{-1}$$

ejemplo 2

demostración

- λ_0 raíz doble, A diagonalizable
- $\Rightarrow AP = PJ$ con $J = \lambda_0 I$
- $\Rightarrow$

$$A = PJP^{-1} = \lambda_0 PP^{-1}$$

ejemplo 2

demostración

- λ_0 raíz doble, A diagonalizable
- $\Rightarrow AP = PJ$ con $J = \lambda_0 I$
- $\Rightarrow$

$$A = PJP^{-1} = \lambda_0 PP^{-1} = \lambda_0 I$$

raíz característica doble

ejemplo 2

demostración

- λ_0 raíz doble, A diagonalizable
- $\Rightarrow AP = PJ$ con $J = \lambda_0 I$
- $\Rightarrow$

$$A = PJP^{-1} = \lambda_0 PP^{-1} = \lambda_0 I$$

- $\Rightarrow A$ diagonal (no sólo diagonalizable)

raíz característica doble

ejemplo 2

demostración

- λ_0 raíz doble, A diagonalizable
- $\Rightarrow AP = PJ$ con $J = \lambda_0 I$
- $\Rightarrow$

$$A = PJP^{-1} = \lambda_0 PP^{-1} = \lambda_0 I$$

- $\Rightarrow A$ diagonal (no sólo diagonalizable) $\square$

ejemplo 3

raíz doble - A no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

raíz característica doble

ejemplo 3

raíz doble - A no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = (2 - \lambda)^2$

raíz característica doble

ejemplo 3

raíz doble - A no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = (2 - \lambda)^2$
- como A no es diagonal, y tiene raíz doble, ya sabemos que no es diagonalizable

ejemplo 3

raíz doble - A no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = (2 - \lambda)^2$
- como A no es diagonal, y tiene raíz doble, ya sabemos que no es diagonalizable
- $\Rightarrow$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A no diag - buscando base de Jordan

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $AP = PJ$

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

raíz característica doble

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2) = (2v_1 + v_2, 2v_2)$

raíz característica doble

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2) = (2v_1 + v_2, 2v_2)$
- $\Rightarrow \begin{cases} Av_1 &= 2v_1 + v_2 \\ Av_2 &= v_2 \end{cases}$

raíz característica doble

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $AP = PJ$

- $A(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $(Av_1, Av_2) = (2v_1 + v_2, 2v_2)$

- $\Rightarrow \begin{cases} Av_1 &= 2v_1 + v_2 \\ Av_2 &= v_2 \end{cases} \rightarrow (A - 2I)v_2 = 0$

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $AP = PJ$

- $A(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $(Av_1, Av_2) = (2v_1 + v_2, 2v_2)$

- $\Rightarrow \begin{cases} Av_1 = 2v_1 + v_2 & \rightarrow (A - 2I)v_1 = v_2 \\ Av_2 = v_2 & \rightarrow (A - 2I)v_2 = 0 \end{cases}$

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $(A - 2I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $(A - 2I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$
- $\Rightarrow v_2 = (-1, 1)$

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $(A - 2I|v_2) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$
- $\Rightarrow v_2 = (-1, 1)$

raíz característica doble

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $(A - 2I|v_2) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$
- $\Rightarrow v_2 = (-1, 1)$
- $\Rightarrow v_1 = (1, 0)$

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $(A - 2I | v_2) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$
- $\Rightarrow v_2 = (-1, 1)$
- $\Rightarrow v_1 = (1, 0)$
- $A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ejemplo 3

A no diag - buscando base de Jordan

- $(A - 2I | v_2) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$
- $\Rightarrow v_2 = (-1, 1)$
- $\Rightarrow v_1 = (1, 0)$
- $A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- o sea $AP = PJ$

ejemplo 4

las 3 raíces son distintas



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ejemplo 4

las 3 raíces son distintas



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- calculamos $\chi_A(\lambda)$

ejemplo 4

las 3 raíces son distintas



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- calculamos $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$

ejemplo 4

las 3 raíces son distintas



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

● calculamos $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$

 $\Rightarrow$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ejemplo 4

las 3 raíces son distintas



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

● calculamos $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$

● $\Rightarrow$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

● alcanza con encontrar los vep asociados a 1, 2, 3

ejemplo 4

buscando la base de Jordan

- vep asociado a 1

ejemplo 4

buscando la base de Jordan

- vep asociado a 1



$$(A - I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ejemplo 4

buscando la base de Jordan

- vep asociado a 1



$$(A - I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)$ vep asociado a 1

ejemplo 4

buscando la base de Jordan

- vep asociado a 2



$$(A - 2I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)$ vep asociado a 1

ejemplo 4

buscando la base de Jordan

- vep asociado a 2



$$(A - 2I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)$ vep asociado a 1
- $\Rightarrow v_2 = (0, 0, 1)$ vep asociado a 2

ejemplo 4

buscando la base de Jordan

- vep asociado a 3



$$(A - I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)$ vep asociado a 1
- $\Rightarrow v_2 = (0, 0, 1)$ vep asociado a 2

ejemplo 4

buscando la base de Jordan

- vep asociado a 3



$$(A - I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 1, 0)$ vep asociado a 1
- $\Rightarrow v_2 = (0, 0, 1)$ vep asociado a 2
- $\Rightarrow v_3 = (1, -1, 0)$ vep asociado a 3

raíces características distintas

ejemplo 4

conclusión

ejemplo 4

conclusión

- tenemos entonces $AP = PJ$ donde

ejemplo 4

conclusión

- tenemos entonces $AP = PJ$ donde



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

raíces características distintas

ejemplo 4

conclusión

- tenemos entonces $AP = PJ$ donde



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ejemplo 4

conclusión

- tenemos entonces $AP = PJ$ donde



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- verificarlo

dos raíces características iguales

ejemplos 5 y 6

una raíz doble

dos raíces características iguales

ejemplos 5 y 6

una raíz doble

- si $\chi_A = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)^2$

dos raíces características iguales

ejemplos 5 y 6

una raíz doble

- si $\chi_A = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)^2$
- hay 2 posibilidades:

dos raíces características iguales

ejemplos 5 y 6

una raíz doble

- si $\chi_A = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)^2$
- hay 2 posibilidades:
- - 1 $\dim \ker(A - \lambda_2 I) = 2$

dos raíces características iguales

ejemplos 5 y 6

una raíz doble

- si $\chi_A = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)^2$
- hay 2 posibilidades:
-
- 1 $\dim \ker(A - \lambda_2 I) = 2 \rightarrow A$ diagonalizable

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dos raíces características iguales

ejemplos 5 y 6

una raíz doble

- si $\chi_A = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)^2$
- hay 2 posibilidades:
-
- ① $\dim \ker(A - \lambda_2 I) = 2 \rightarrow A$ diagonalizable

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- ② $\dim \ker(A - \lambda_2 I) = 1$

dos raíces características iguales

ejemplos 5 y 6

una raíz doble

- si $\chi_A = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)^2$
- hay 2 posibilidades:
-
- 1 $\dim \ker(A - \lambda_2 I) = 2 \rightarrow A$ diagonalizable

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- 2 $\dim \ker(A - \lambda_2 I) = 1 \rightarrow A$ no diagonalizable

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

raíz doble - A diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

raíz doble - A diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2$$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

raíz doble - A diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)(1 + \lambda)^2$
- calculamos $\dim \ker(A + I)$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

raíz doble - A diagonalizable

- buscamos J :

$$(A + I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

raíz doble - A diagonalizable

- buscamos J :

$$(A + I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow \dim \ker(A + I) = 2$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

raíz doble - A diagonalizable

- buscamos J :

$$(A + I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow \dim \ker(A + I) = 2$

- $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

raíz doble - A diagonalizable

- buscamos J :

$$(A + I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow \dim \ker(A + I) = 2$

- $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- vep asociados a -1 : $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

una raíz doble - A diagonalizable

- buscamos vep asociado a 1:

dos raíces características iguales

ejemplo 5

una raíz doble - A diagonalizable

- buscamos vep asociado a 1:



$$(A - I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

una raíz doble - A diagonalizable

- buscamos vep asociado a 1:



$$(A - I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

- vep asociado a 1: $v_1 = (1, 0, 2)$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

una raíz doble - A diagonalizable

- buscamos vep asociado a 1:



$$(A - I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

- vep asociado a 1: $v_1 = (1, 0, 2)$
- vep asociados a -1 : $v_2 = (-1, 1, 0)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$

dos raíces características iguales

ejemplo 5

una raíz doble - A diagonalizable

- buscamos vep asociado a 1:



$$(A - I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

- vep asociado a 1: $v_1 = (1, 0, 2)$
- vep asociados a -1 : $v_2 = (-1, 1, 0)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$

- $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2(7 - \lambda)$$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2(7 - \lambda)$
- para ver cómo es J hay que calcular $\dim \ker(A - 2I)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos J , para eso planteamos:

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos J , para eso planteamos:



$$(A - 2I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos J , para eso planteamos:



$$(A - 2I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow \dim \ker(A - 2I) = 1$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos J , para eso planteamos:



$$(A - 2I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow \dim \ker(A - 2I) = 1$
- ya que estamos, vep asociado a 2: $w = (1, 0, 0)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos J , para eso planteamos:



$$(A - 2I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow \dim \ker(A - 2I) = 1$
- ya que estamos, vep asociado a 2: $w = (1, 0, 0)$

- $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos que $AP = PJ$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos que $AP = PJ$
- es decir

$$A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos que $AP = PJ$
- es decir

$$A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow (Av_1, Av_2, Av_3) = (2v_1 + v_2, v_2, 7v_3)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos que $AP = PJ$
- es decir

$$A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow (Av_1, Av_2, Av_3) = (2v_1 + v_2, v_2, 7v_3)$
- $\Rightarrow v_2$ vep asociado a 2 $\rightarrow v_2 = (1, 0, 0)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos que $AP = PJ$
- es decir

$$A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow (Av_1, Av_2, Av_3) = (2v_1 + v_2, v_2, 7v_3)$
- $\Rightarrow v_2$ vep asociado a 2 $\rightarrow v_2 = (1, 0, 0)$
- $\Rightarrow (A - 2I)v_1 = v_2$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos que $AP = PJ$
- es decir

$$A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- $\Rightarrow (Av_1, Av_2, Av_3) = (2v_1 + v_2, v_2, 7v_3)$
- $\Rightarrow v_2$ vep asociado a 2 $\rightarrow v_2 = (1, 0, 0)$
- $\Rightarrow (A - 2I)v_1 = v_2$
- $\Rightarrow v_3$ vep asociado a 7

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos v_1 :

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos v_1 :



$$(A - 2I | v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos v_1 :



$$(A - 2I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 0, 1)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos v_1 :



$$(A - 2I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 0, 1)$

- $v_2 = (1, 0, 0)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos v_3 :



$$(A - 7I|\vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 0, 1)$

- $v_2 = (1, 0, 0)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos v_3 :



$$(A - 7I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 0, 1)$
- $v_2 = (1, 0, 0)$
- $\Rightarrow v_3 = (1, -1, 1)$

dos raíces características iguales

ejemplo 6

raíz doble - A no diagonalizable

- buscamos v_3 :



$$(A - 7I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow v_1 = (0, 0, 1)$

- $v_2 = (1, 0, 0)$

- $\Rightarrow v_3 = (1, -1, 1)$

- $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:
 - 1 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 3$

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:
 - 1 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 3 \Rightarrow A$ diagonal

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:
 - 1 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 3 \Rightarrow A$ diagonal (ejercicio)

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:
 - 1 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 3 \Rightarrow A$ diagonal (ejercicio)
 - 2 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 2$

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:
 - ① $\dim \ker(A - \lambda_0) = 3 \Rightarrow A$ diagonal (ejercicio)
 - ② $\dim \ker(A - \lambda_0) = 2 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ (ejemplo 7)

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:
 - ① $\dim \ker(A - \lambda_0) = 3 \Rightarrow A$ diagonal (ejercicio)
 - ② $\dim \ker(A - \lambda_0) = 2 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ (ejemplo 7)
 - ③ $\dim \ker(A - \lambda_0) = 1$

ejemplos 7 y 8

raíz triple

- supongamos $\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^3$
- tenemos 3 opciones:
 - 1 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 3 \Rightarrow A$ diagonal (ejercicio)
 - 2 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 2 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ (ejemplo 7)
 - 3 $\dim \ker(A - \lambda_0) = 2 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ (ejemplo 8)

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- buscamos vap $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda) + (3 - \lambda)$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- buscamos vap $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda) + (3 - \lambda)$
 $= (3 - \lambda)[(4 - \lambda)(2 - \lambda) + 1]$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- buscamos vap $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda) + (3 - \lambda)$
 $= (3 - \lambda)[(4 - \lambda)(2 - \lambda) + 1]$
 $= (3 - \lambda)^3$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- buscamos vap $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda) + (3 - \lambda)$
 $= (3 - \lambda)[(4 - \lambda)(2 - \lambda) + 1]$
 $= (3 - \lambda)^3$
- calculamos $m.g.(3) = \dim \ker(A - 3I)$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- buscamos vap $\chi_A(\lambda) = (3 - \lambda)(4 - \lambda)(2 - \lambda) + (3 - \lambda)$
 $= (3 - \lambda)[(4 - \lambda)(2 - \lambda) + 1]$
 $= (3 - \lambda)^3$
- calculamos $m.g.(3) = \dim \ker(A - 3I) = \#$ sub-bloques

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow y = z, x$ cualquiera

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow y = z, x \text{ cualquiera} \Rightarrow \text{hay 2 bloques}$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow y = z, x \text{ cualquiera} \Rightarrow \text{hay 2 bloques}$
- de paso $v = (1, 0, 0)$ y $w = (0, 1, 1)$ vep asociados 3

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$

- $A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (3v_1, 3v_2 + v_3, 3v_3)$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (3v_1, 3v_2 + v_3, 3v_3)$
- $\Rightarrow v_1$ y v_3 vep asoc a 3

raíz característica triple

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (3v_1, 3v_2 + v_3, 3v_3)$
- $\Rightarrow v_1$ y v_3 vep asoc a 3 $\rightarrow v_1 = (1, 0, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (3v_1, 3v_2 + v_3, 3v_3)$
- $\Rightarrow v_1$ y v_3 vep asoc a 3 $\rightarrow v_1 = (1, 0, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$
- $\Rightarrow (A - 3I)v_2 = v_3$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (3v_1, 3v_2 + v_3, 3v_3)$
- $\Rightarrow v_1$ y v_3 vep asoc a 3 $\rightarrow v_1 = (1, 0, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$
- $\Rightarrow (A - 3I)v_2 = v_3$
- $(A - 3I|v_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$
- $A(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (3v_1, 3v_2 + v_3, 3v_3)$
- $\Rightarrow v_1$ y v_3 vep asoc a 3 $\rightarrow v_1 = (1, 0, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$
- $\Rightarrow (A - 3I)v_2 = v_3$
- $(A - 3I|v_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$
- $\Rightarrow v_2 = (0, 1, 0)$

ejemplo 7

raíz triple - 2 sub-bloques

- como siempre planteamos $AP = PJ$
- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (3v_1, 3v_2 + v_3, 3v_3)$
- $\Rightarrow v_1$ y v_3 vep asoc a 3 $\rightarrow v_1 = (1, 0, 0)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$
- $\Rightarrow (A - 3I)v_2 = v_3$
- $(A - 3I|v_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$
- $\Rightarrow v_2 = (0, 1, 0)$
- $\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2 + 1 + 3(2 - \lambda)$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (2 - \lambda)^2 + 1 + 3(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(13 - 7\lambda + \lambda^2) + 1\end{aligned}$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (2 - \lambda)^2 + 1 + 3(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(13 - 7\lambda + \lambda^2) + 1 \\ &= 27 - 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3\end{aligned}$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (2 - \lambda)^2 + 1 + 3(2 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(13 - 7\lambda + \lambda^2) + 1 \\ &= 27 - 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = (3 - \lambda)^3\end{aligned}$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\chi_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2 + 1 + 3(2 - \lambda)$
 $= (2 - \lambda)(13 - 7\lambda + \lambda^2) + 1$
 $= 27 - 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = (3 - \lambda)^3$
- calculamos $m.g.(3) = \dim \ker(A - 3I) = \#$ de sub-bloques

ejemplo 8

raíz triple- 1 sub-bloque

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

ejemplo 8

raíz triple- 1 sub-bloque

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow y = z, x = 0, (\dim S_3 = 1)$

ejemplo 8

raíz triple- 1 sub-bloque

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow y = z, x = 0, (\dim S_3 = 1)$

- $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ejemplo 8

raíz triple- 1 sub-bloque

- planteamos

$$(A - 3I | \vec{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

- $\Rightarrow y = z, x = 0, (\dim S_3 = 1)$

- $\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- de paso vep asociado a 3: $w = (0, 1, 1)$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $\Rightarrow$

- $(A - 3I)v_1 = v_2$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $\Rightarrow$

- $(A-3I)v_1 = v_2$

- $(A-3I)v_2 = v_3$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

- $(Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $\Rightarrow$

- $(A-3I)v_1 = v_2$
- $(A-3I)v_2 = v_3$
- $(A-3I)v_3 = \vec{0}$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

$$\bullet (Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

 $\bullet \Rightarrow$

$$\bullet (A-3I)v_1 = v_2 \qquad \bullet v_3 = (0, 1, 1)$$

$$\bullet (A-3I)v_2 = v_3$$

$$\bullet (A-3I)v_3 = \vec{0}$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

$$\bullet (Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

• $\Rightarrow$

$$\bullet (A-3I)v_1 = v_2$$

$$\bullet v_3 = (0, 1, 1)$$

$$\bullet (A-3I)v_2 = v_3$$

$$\bullet (A-3I)v_3 = \vec{0}$$

$$\bullet (A-3I|v_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

$$\bullet (Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

• $\Rightarrow$

$$\bullet (A-3I)v_1 = v_2$$

$$\bullet (A-3I)v_2 = v_3$$

$$\bullet (A-3I)v_3 = \vec{0}$$

$$\bullet v_3 = (0, 1, 1)$$

$$\bullet v_2 = (-1, 1, 0)$$

$$\bullet (A-3I|v_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

$$\bullet (Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

• $\Rightarrow$

$$\bullet (A-3I)v_1 = v_2$$

$$\bullet (A-3I)v_2 = v_3$$

$$\bullet (A-3I)v_3 = \vec{0}$$

$$\bullet v_3 = (0, 1, 1)$$

$$\bullet v_2 = (-1, 1, 0)$$

$$\bullet (A-3I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

$$\bullet (Av_1, Av_2, Av_3) = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

• $\Rightarrow$

$$\bullet (A-3I)v_1 = v_2$$

$$\bullet (A-3I)v_2 = v_3$$

$$\bullet (A-3I)v_3 = \vec{0}$$

$$\bullet v_3 = (0, 1, 1)$$

$$\bullet v_2 = (-1, 1, 0)$$

$$\bullet v_1 = (1, 0, 0)$$

$$\bullet (A-3I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

ejemplo 8

raíz triple - 1 sub-bloque

$$\bullet A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

• $\Rightarrow$

$$\bullet (A-3I)v_1 = v_2$$

$$\bullet (A-3I)v_2 = v_3$$

$$\bullet (A-3I)v_3 = \vec{0}$$

$$\bullet v_3 = (0, 1, 1)$$

$$\bullet v_2 = (-1, 1, 0)$$

$$\bullet v_1 = (1, 0, 0)$$

$$\bullet (A-3I|v_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$