

Producto interno y norma

Jana Rodriguez Hertz
GAL2

IMERL

31 de agosto de 2010

producto interno

definición (producto interno)

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

se llama producto interno en V

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

se llama producto interno en V

- si cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

se llama producto interno en V

- si cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:
 - 1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

se llama producto interno en V

- si cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:
 - 1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
 - 2 $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

se llama producto interno en V

- si cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:
 - 1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
 - 2 $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
 - 3 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

se llama **producto interno** en V

- si cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:
 - 1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
 - 2 $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
 - 3 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
 - 4 $\langle u, u \rangle \geq 0$ ($\in \mathbb{R}$)

producto interno

definición (producto interno)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

se llama **producto interno** en V

- si cumple las siguientes propiedades para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

- 1 $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

- 2 $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

- 3 $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$

- 4 $\langle u, u \rangle \geq 0 \ (\in \mathbb{R})$

- 5 $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

observaciones

propiedades inmediatas

$\langle, \rangle$ producto interno sobre $\mathbb{K}$, entonces

observaciones

propiedades inmediatas

$\langle, \rangle$ producto interno sobre $\mathbb{K}$, entonces

1 $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

observaciones

propiedades inmediatas

$\langle, \rangle$ producto interno sobre $\mathbb{K}$, entonces

$$1 \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$2 \quad \langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$$

observaciones

propiedades inmediatas

$\langle, \rangle$ producto interno sobre $\mathbb{K}$, entonces

$$① \quad \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$② \quad \langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle$$

$$③ \quad \langle \vec{0}, u \rangle = \langle u, \vec{0} \rangle = 0$$

ejemplo 1

producto usual de $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ el producto interno dado por:

ejemplo 1

producto usual de $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ el producto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

ejemplo 1

producto usual de $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ el producto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

se llama producto usual en $\mathbb{R}^n$

ejemplo 1

producto usual de $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ el producto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

se llama producto usual en $\mathbb{R}^n$

- verificar que es un producto interno

ejemplo 2

producto usual en $\mathbb{C}^n$

$V = \mathbb{C}^n$ el producto interno dado por:

ejemplo 2

producto usual en $\mathbb{C}^n$

$V = \mathbb{C}^n$ el producto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}$$

ejemplo 2

producto usual en $\mathbb{C}^n$

$V = \mathbb{C}^n$ el producto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}$$

se llama producto usual en $\mathbb{C}^n$

ejemplo 3

producto interno de funciones reales

$V = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ un producto interno en V es

ejemplo 3

producto interno de funciones reales

$V = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ un producto interno en V es

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

ejemplo 4

producto interno de funciones complejas

$V = C_{\mathbb{C}}[0, 1]$ un producto interno en V es

ejemplo 4

producto interno de funciones complejas

$V = C_{\mathbb{C}}[0, 1]$ un producto interno en V es

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

norma

definición (norma)

norma

definición (norma)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$

norma

definición (norma)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$$

se llama **norma** en V si para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ vale:

norma

definición (norma)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$$

se llama **norma** en V si para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ vale:

- 1 $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$

norma

definición (norma)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$$

se llama **norma** en V si para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ vale:

- 1 $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- 2 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$

norma

definición (norma)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$$

se llama **norma** en V si para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ vale:

- 1 $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- 2 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$
- 3 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdad triangular)

norma

definición (norma)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$
- una función

$$\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$$

se llama **norma** en V si para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ vale:

- 1 $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
 - 2 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$
 - 3 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (desigualdad triangular)
- cuando V tiene una norma, V se llama **espacio normado**

ejemplo 1

normas ℓ^p en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

ejemplo 1

normas ℓ^p en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

ejemplo 1

normas ℓ^p en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

ejemplo 1

normas ℓ^p en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

- cuando $p = 2$, se llama norma usual en $\mathbb{R}^n$

ejemplo 1

normas ℓ^p en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

- cuando $p = 2$, se llama **norma usual** en $\mathbb{R}^n$
- cuando $p \neq 2$ la desigualdad triangular no es sencilla de probar

ejemplo 1

normas ℓ^p en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

- cuando $p = 2$, se llama **norma usual** en $\mathbb{R}^n$
- cuando $p \neq 2$ la desigualdad triangular no es sencilla de probar
- también define norma en $V = \mathbb{C}^n$

ejemplo 2

norma ℓ^∞ en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

ejemplo 2

norma ℓ^∞ en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_\infty = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}$$

ejemplo 2

norma ℓ^∞ en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_\infty = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

ejemplo 2

norma ℓ^∞ en $\mathbb{R}^n$

$V = \mathbb{R}^n$ la función:

$$\|u\|_\infty = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$

- también define norma en $\mathbb{C}^n$

ejemplo 3

norma $L^p[a, b]$

en $V = C_{\mathbb{R}}[a, b]$ o $V = C_{\mathbb{C}}[a, b]$ tenemos las normas:

ejemplo 3

norma $L^p[a, b]$

en $V = C_{\mathbb{R}}[a, b]$ o $V = C_{\mathbb{C}}[a, b]$ tenemos las normas:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

ejemplo 3

norma $L^p[a, b]$

en $V = C_{\mathbb{R}}[a, b]$ o $V = C_{\mathbb{C}}[a, b]$ tenemos las normas:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

- para $p > 2$, la desigualdad triangular no es sencilla de probar

ejemplo 4

norma $L^\infty[a, b]$

en $V = C_{\mathbb{R}}[a, b]$ o $V = C_{\mathbb{C}}[a, b]$ tenemos también la norma:

ejemplo 4

norma $L^\infty[a, b]$

en $V = C_{\mathbb{R}}[a, b]$ o $V = C_{\mathbb{C}}[a, b]$ tenemos también la norma:

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

observación

observar como puede haber $\neq$ normas en un mismo espacio vectorial

teorema

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle, \rangle$

teorema

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle, \rangle$
- $\Rightarrow V$ espacio normado con norma:

teorema

teorema

- V espacio vectorial con producto interno $\langle, \rangle$
- $\Rightarrow V$ espacio normado con norma:
-

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

producto interno
○○○○○○

norma
○○○○○○●○○

teorema cauchy-schwartz
○○○○○○○○○○

teorema

demostración

más adelante

observación 1

- no siempre se cumple que

observación 1

- no siempre se cumple que
- norma $\rightarrow$ producto interno

observación 1

- no siempre se cumple que
- norma $\rightarrow$ producto interno
- para que eso pase se tiene que cumplir:

observación 1

- no siempre se cumple que
- norma $\rightarrow$ producto interno
- para que eso pase se tiene que cumplir:
-

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

observación 1

- no siempre se cumple que
- norma $\rightarrow$ producto interno
- para que eso pase se tiene que cumplir:
-

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

- regla del paralelogramo

observación 1

- no siempre se cumple que
- norma $\rightarrow$ producto interno
- para que eso pase se tiene que cumplir:
-

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

- regla del paralelogramo
- (dato anecdótico)

observación 2

de los ejemplos 1-4 presentados antes del teorema (ℓ^p y $L^p[a, b]$), sólo

observación 2

de los ejemplos 1-4 presentados antes del teorema (ℓ^p y $L^p[a, b]$), sólo

- $\|\cdot\|_2$ (norma de ℓ^2) y

observación 2

de los ejemplos 1-4 presentados antes del teorema (ℓ^p y $L^p[a, b]$), sólo

- $\|\cdot\|_2$ (norma de ℓ^2) y
- $\|\cdot\|_2$ (norma de $L^2[a, b]$)

observación 2

de los ejemplos 1-4 presentados antes del teorema (ℓ^p y $L^p[a, b]$), sólo

- $\|\cdot\|_2$ (norma de ℓ^2) y
- $\|\cdot\|_2$ (norma de $L^2[a, b]$)

son normas que provienen de un producto interno:

observación 2

de los ejemplos 1-4 presentados antes del teorema (ℓ^p y $L^p[a, b]$), sólo

- $\|\cdot\|_2$ (norma de ℓ^2) y
- $\|\cdot\|_2$ (norma de $L^2[a, b]$)

son normas que provienen de un producto interno:

- $\langle x, y \rangle_2 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$

observación 2

de los ejemplos 1-4 presentados antes del teorema (ℓ^p y $L^p[a, b]$), sólo

- $\|\cdot\|_2$ (norma de ℓ^2) y
- $\|\cdot\|_2$ (norma de $L^2[a, b]$)

son normas que provienen de un producto interno:

- $\langle x, y \rangle_2 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$
- $\langle f, g \rangle_2 = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$

teorema Cauchy-Schwartz

teorema (Cauchy-Schwartz)

teorema Cauchy-Schwartz

teorema (Cauchy-Schwartz)

- $\forall$ e.v. con producto interno $\langle, \rangle$

teorema Cauchy-Schwartz

teorema (Cauchy-Schwartz)

- V e.v. con producto interno $\langle, \rangle$
- $\|\cdot\|$ norma proveniente de $\langle, \rangle$

teorema Cauchy-Schwartz

teorema (Cauchy-Schwartz)

- V e.v. con producto interno $\langle, \rangle$
- $\|\cdot\|$ norma proveniente de $\langle, \rangle$
- para todo $u, v \in V$:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

(desigualdad de Cauchy-Schwartz)

teorema Cauchy-Schwartz

teorema (Cauchy-Schwartz)

- V e.v. con producto interno $\langle, \rangle$
- $\|\cdot\|$ norma proveniente de $\langle, \rangle$
- para todo $u, v \in V$:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

(desigualdad de Cauchy-Schwartz)

- la igualdad vale $\Leftrightarrow u \parallel v$

demostración

Primero vamos a tratar el caso V e.v. sobre $\mathbb{R}$

demostración

Primero vamos a tratar el caso V e.v. sobre $\mathbb{R}$

- estructura de la prueba:

demostración

Primero vamos a tratar el caso V e.v. sobre $\mathbb{R}$

- estructura de la prueba:
- $\forall u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$: $\|v - tu\|^2 \geq 0$ (genialidad de C-S)

demostración

Primero vamos a tratar el caso V e.v. sobre $\mathbb{R}$

- estructura de la prueba:
- $\forall u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$: $\|v - tu\|^2 \geq 0$ (genialidad de C-S)
- $\|v - tu\|^2$ polinomio en t de grado 2 siempre no-negativo

demostración

Primero vamos a tratar el caso V e.v. sobre $\mathbb{R}$

- estructura de la prueba:
- $\forall u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$: $\|v - tu\|^2 \geq 0$ (genialidad de C-S)
- $\|v - tu\|^2$ polinomio en t de grado 2 siempre no-negativo
- $\Rightarrow \Delta(\|v - tu\|) \leq 0$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz)

demostración

$$\bullet \forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

$$\|v - tu\|^2 = \langle v - tu, v - tu \rangle$$

demostración

$$\bullet \forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2\end{aligned}$$

demostración

$$\bullet \forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

demostración

- $\forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo

demostración

- $\forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo
- $\Rightarrow$ el discriminante $\Delta \leq 0$, donde

demostración

- $\forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo
- $\Rightarrow$ el discriminante $\Delta \leq 0$, donde
- $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$

demostración

- $\forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo
- $\Rightarrow$ el discriminante $\Delta \leq 0$, donde
- $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desig. Cauchy-Schwartz)

demostración

- $\forall u, v \in V \text{ y } t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo
- $\Rightarrow$ el discriminante $\Delta \leq 0$, donde
- $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desig. Cauchy-Schwartz)
- además $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow$

demostración

- $\forall u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo
- $\Rightarrow$ el discriminante $\Delta \leq 0$, donde
- $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desig. Cauchy-Schwartz)
- además $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow$
- $\|v - tu\| = 0$ para algún $t \in \mathbb{R}$

demostración

- $\forall u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo
- $\Rightarrow$ el discriminante $\Delta \leq 0$, donde
- $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desig. Cauchy-Schwartz)
- además $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow$
- $\|v - tu\| = 0$ para algún $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \| v$

demostración

- $\forall u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|v - tu\|^2 &= \langle v - tu, v - tu \rangle \\ &= \|v\|^2 - 2t\langle u, v \rangle + t^2\|u\|^2 \geq 0\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ es un polinomio real de grado 2 que es siempre no-negativo
- $\Rightarrow$ el discriminante $\Delta \leq 0$, donde
- $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (desig. Cauchy-Schwartz)
- además $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow$
- $\|v - tu\| = 0$ para algún $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u \| v \square$

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V \text{ y } \alpha \in \mathbb{C}: \|v - \alpha u\|^2 \geq 0$

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$: $\|v - \alpha u\|^2 \geq 0$
- o sea

$$\|v - \alpha u\|^2 = \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle$$

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$: $\|v - \alpha u\|^2 \geq 0$
- o sea

$$\begin{aligned} \|v - \alpha u\|^2 &= \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle \\ &= \|v\|^2 - \alpha \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\alpha|^2 \|u\|^2 \end{aligned}$$

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$: $\|v - \alpha u\|^2 \geq 0$
- o sea

$$\begin{aligned}
 \|v - \alpha u\|^2 &= \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle \\
 &= \|v\|^2 - \alpha \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\alpha|^2 \|u\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - 2\Re(\alpha \langle u, v \rangle) + |\alpha|^2 \|u\|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$: $\|v - \alpha u\|^2 \geq 0$
- o sea

$$\begin{aligned}
 \|v - \alpha u\|^2 &= \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle \\
 &= \|v\|^2 - \alpha \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\alpha|^2 \|u\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - 2\Re(\alpha \langle u, v \rangle) + |\alpha|^2 \|u\|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- tomamos $\alpha = t \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}$ con $t \in \mathbb{R}$

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$: $\|v - \alpha u\|^2 \geq 0$
- o sea

$$\begin{aligned}
 \|v - \alpha u\|^2 &= \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle \\
 &= \|v\|^2 - \alpha \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\alpha|^2 \|u\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - 2\Re(\alpha \langle u, v \rangle) + |\alpha|^2 \|u\|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- tomamos $\alpha = t \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}$ con $t \in \mathbb{R}$
- entonces queda:

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V \text{ y } \alpha \in \mathbb{C}: \|v - \alpha u\|^2 \geq 0$
- o sea

$$\begin{aligned}
 \|v - \alpha u\|^2 &= \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle \\
 &= \|v\|^2 - \alpha \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\alpha|^2 \|u\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - 2\Re(\alpha \langle u, v \rangle) + |\alpha|^2 \|u\|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- tomamos $\alpha = t \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}$ con $t \in \mathbb{R}$
- entonces queda:
- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$

demostración

Caso general $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tratamos de copiar el caso $\mathbb{R}$

- $\forall u, v \in V \text{ y } \alpha \in \mathbb{C}: \|v - \alpha u\|^2 \geq 0$
- o sea

$$\begin{aligned}
 \|v - \alpha u\|^2 &= \langle v - \alpha u, v - \alpha u \rangle \\
 &= \|v\|^2 - \alpha \langle u, v \rangle - \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + |\alpha|^2 \|u\|^2 \\
 &= \|v\|^2 - 2\Re(\alpha \langle u, v \rangle) + |\alpha|^2 \|u\|^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- tomamos $\alpha = t \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{|\langle u, v \rangle|}$ con $t \in \mathbb{R}$
- entonces queda:
- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2 \|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)

demostración

- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)

demostración

- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)
- $\Rightarrow \Delta \leq 0$

demostración

- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)
- $\Rightarrow \Delta \leq 0$
- donde $\Delta = 4|\langle u, v \rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ (discriminante)

demostración

- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)
- $\Rightarrow \Delta \leq 0$
- donde $\Delta = 4|\langle u, v \rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ (discriminante)
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

demostración

- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)
- $\Rightarrow \Delta \leq 0$
- donde $\Delta = 4|\langle u, v \rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ (discriminante)
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$
- y $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow \|v - \alpha u\| = 0$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$

demostración

- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)
- $\Rightarrow \Delta \leq 0$
- donde $\Delta = 4|\langle u, v \rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ (discriminante)
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$
- y $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow \|v - \alpha u\| = 0$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$
 $\Leftrightarrow u \|v$

demostración

- $\|v\|^2 - 2t|\langle u, v \rangle| + t^2\|u\|^2 \geq 0$
- (polinomio de grado 2 siempre no-negativo)
- $\Rightarrow \Delta \leq 0$
- donde $\Delta = 4|\langle u, v \rangle|^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ (discriminante)
- $\Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$
- y $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \|v\| \Leftrightarrow \|v - \alpha u\| = 0$ para algún $\alpha \in \mathbb{C}$
 $\Leftrightarrow u \|v\| \quad \square$

observación 1

- V e.v. sobre $\mathbb{R}$

observación 1

- V e.v. sobre $\mathbb{R}$
- $v, w \in V \setminus \{\vec{0}\}$

observación 1

- V e.v. sobre $\mathbb{R}$
- $v, w \in V \setminus \{\vec{0}\}$
- $\Rightarrow$

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \in [-1, 1]$$

observación 1

- V e.v. sobre $\mathbb{R}$
- $v, w \in V \setminus \{\vec{0}\}$
- $\Rightarrow$

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \in [-1, 1]$$

- se define: $\cos \angle(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$

observación 2

desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada al producto usual
en $\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

observación 2

desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada al producto usual
en $\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$$

la igualdad vale sii $\vec{x} \parallel \vec{y}$

observación 3

desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada al producto que genera $\|\cdot\|_2$ en $L^2[0, 1] \Rightarrow$

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt \int_0^1 g^2(t) dt$$

observación 3

desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada al producto que genera $\|\cdot\|_2$ en $L^2[0, 1] \Rightarrow$

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t) dt \int_0^1 g^2(t) dt$$

la igualdad vale sii $f(t) = \alpha g(t)$ para todo $t \in [0, 1]$

corolario de Cauchy-Schwartz

corolario (desigualdad triangular)

- $\forall$ e.v. sobre $\mathbb{K}$

corolario de Cauchy-Schwartz

corolario (desigualdad triangular)

- V e.v. sobre $\mathbb{K}$

- $\Rightarrow$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

demostración

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle$$

demostración

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\Re\langle v, w \rangle + \|w\|^2\end{aligned}$$

demostración

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\Re\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \quad (\Re(z) \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

demostración

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\Re\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 & (\Re(z) \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}) \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 & (\text{desig. C-S})
\end{aligned}$$

demostración

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\Re\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 & (\Re(z) \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}) \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 & \text{(desig. C-S)} \\
&\leq (\|v\| + \|w\|)^2
\end{aligned}$$

□