CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA 2008 - I

JANA RODRIGUEZ HERTZ

1. Introducción

Para describir mejor el objeto de este curso, voy a usar un ejemplo del libro de A. Paenza [P], con algunas adaptaciones del caso:

Supongamos que deseamos estimar la cantidad de peces de una laguna. A tal efecto, echamos una red en un lugar determinado de la laguna, y pescamos, 1000 peces, que mantendremos vivos. Pintamos esos peces de un color, y los volvemos a echar en la laguna. Esperamos un tiempo razonable para que naden libremente, volvemos a echar la red en el mismo lugar y pescamos nuevamente 1000 peces. Contemos cuántos peces de color hay. Supongamos que hay 10. Esto quiere decir que el 1% de la muestra es de color. Esto querría decir que los 1000 peces de color originales son aproximadamente el 1% de los peces de la laguna, y eso nos permitiría estimar que el total de los peces de la laguna, el 100%, es aproximadamente 100.000. Ingenioso, no?

Ahora, en este razonamiento hay un montón de supuestos, que estudiaremos en la primera parte del curso. Para ello veamos varias formas en que este razonamiento podría fallar en darnos una idea aproximada de cuántos peces hay en la laguna.

Ejemplo 1. *Supongamos que pintamos los peces de amarillo, pero descuidamos un detalle: la pintura es tóxica. La dinámica de los peces nadando en el lago tórico sería como en la animación de la Figura 1 La cantidad de peces de la laguna no*

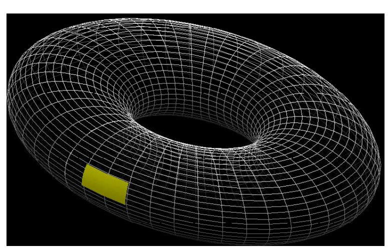


Figure 1. La medida no se conserva

se conserva, y para peor, nuestra muestra ha desaparecido. Esto no nos permitirá *estimar la cantidad de peces con el procedimiento descrito encima. Aquí hay un conjunto cuya medida se achica con la dinámica. Cuando esto ocurra diremos que la medida es* disipativa*.*

A nosotros, por el contrario, nos interesarán las dinámicas *conservativas*, las que conservan una medida, o bien las medidas que son conservadas por una dinámica. Trabajaremos con espacios medibles $(X, \mathcal{A})$, y para la mayoría de los casos podremos suponer X es un espacio métrico compacto (el toro, en el ejemplo). Consideraremos transformaciones $T : X \to X$, y diremos que una tal transformación es ***medible*** cuando las preimágenes de los conjuntos medibles son medibles, es decir cuando $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Cuando en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ actúe una transformación medible $T : X \to X$, diremos que T ***preserva*** la medida μ, si

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

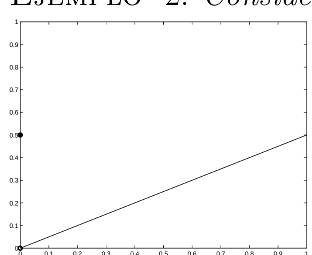
también diremos que μ es ***invariante*** por T, o que T es un ***automorfimo***.

El objeto de la teoría ergódica son las transformaciones que preservan medida, su dinámica, la existencia de cierto tipo de medidas invariantes, propiedades de ciertas medidas condicionales, tipos de recurrencia, entre otros tópicos.

2. Medidas invariantes

Dado que la teoría ergódica se preocupa de las transformaciones que preservan medida, una de las cosas que nos preocuparán es bajo qué condiciones una transformación preserva alguna medida. En lo preferible, querremos descartar aquellas transformaciones que no preserven ninguna medida. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. *Consideremos la siguiente transformación* $T : [0,1] \to [0,1]$

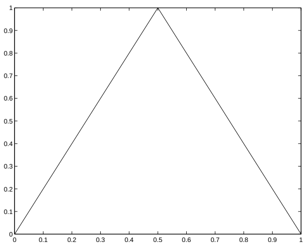


$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0,1] \\ \neq 0 & x = 0 \end{cases}$$

*Esta es una transformación medible en los borelianos del intervalo (***Ejercicio 1***), y no hay ninguna medida T-invariante sobre los borelianos del* $[0,1]$ *(***Ejercicio 2***)*

Por el contrario, tenemos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3. *La famosa transformación* $T : [0,1] \to [0,1]$



$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

conocida como **tent map**, *preserva la medida de Lebesgue (***Ejercicio 3***). Una pista para convencerse de esto (y demostrarlo) es observar que* T *preserva la medida de los intervalos. Luego ver que cualquier transformación que preserva una subálgebra generadora de la* σ*-álgebra del espacio (en nuestro caso, la subálgebra generada por los intervalos), es un automorfismo. Si no sale, ver por ejemplo, la Proposición 2.1 del libro de Mañé* [M]*, aunque no es difícil la demostración.*

El caso es que las condiciones bajo las cuales una transformación admite al menos una medida invariante, son bastante generales.

TEOREMA 2.1 (Krylov-Bogolubov). *Toda transformación continua en un espacio métrico compacto preserva al menos una probabilidad de Borel.*

Se puede encontrar una demostración autocontenida de este teorema en [M, Proposición 8.1], otra en [KH, Theorem 4.1.1].

EJEMPLO 4 (Rotaciones de $\mathbb{S}^1$). *Un ejemplo de transformaciones que preservan la medida de Lebesgue son las rotaciones del círculo. Miremos el círculo* $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$*. Dado un número cualquiera* $\alpha \in [0,1]$*, consideremos la rotación* $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$ *en* $\mathbb{S}^1$*.* **Ejercicio 4:** *mostrar que* R_α *preservan la medida de Lebesgue (es muy fácil!!). Si* $\alpha \in \mathbb{Q}$*, entonces todos los puntos son periódicos (***Ejercicio 5***). Si* $\alpha \notin \mathbb{Q}$*, por el contrario, todas las órbitas son densas. Este es un ejercicio más interesante, lo ponemos como* **Ejercicio 6***.*

References

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **54**

[M] R. Mañé, *Teoria ergódica*, Projeto Euclides, **14**, IMPA, Rio de Janeiro (1983)

[P] A. Paenza, *Matemática ... estás ahi?* Diego Golombek (ed.) (2005) Siglo XXI Editores Argentina S.A.