CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA 2008 - 2

JANA RODRIGUEZ HERTZ

1. Teorema de Recurrencia de Poincaré

Tomemos el ejemplo de la clase pasada, supongamos que deseamos estimar la cantidad de peces de una laguna. A tal efecto, echamos una red en un lugar determinado de la laguna, A, y sacamos por ejemplo 1000 peces, que pintaremos de un color, esta vez no tóxico (recordar el Ejemplo 1), y volveremos a echar al agua. Esperaremos un tiempo razonable para que naden libremente, volvemos a echar la red en el lugar A y sacamos 1000 peces. La idea del algoritmo de estimación era contar cuántos peces de color se encontraban ahora en A, y de acuerdo a ese porcentaje, interpolar el porcentaje total de peces en la laguna, deduciendo el número de peces. Por ejemplo, si en A encontramos 10 peces, o sea el 1% de la muestra, eso nos estaría diciendo que 1000 eran aproximadamente el 1% de los peces de la laguna, que serían entonces aproximadamente 100.000. Buenísimo, ahora, qué nos asegura que algún pez vuelva a caer en la red?, y si

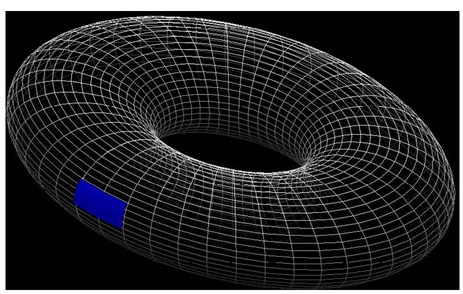

Figure 1. Echamos la red en la zona A (en azul)

ningún pez volviera a pasar nunca por A? En ese caso, nuestro algoritmo estaría mal, ya que nos estaría diciendo que los 1000 peces coloreados de la muestra es son el 0% de los peces del lago! Veamos si podemos contestar a las preguntas vuelve algún pez coloreado a caer en la red?, cuántos vuelven? cuántas veces vuelven?

Teorema 1.1 (Teorema de Recurrencia de Poincaré (baby version)). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y T un automorfismo. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces μ-ctp de A vuelve a A.*

Antes de entrar en la prueba, notemos que es fácil ver que si A es de medida positiva, siempre hay un pez que vuelve a caer en A. En efecto, si todas las pre-imagenes de A fueran disjuntas de A, entonces lo serían entre sí, luego, la medida de su unión sería la suma de sus medidas. Pero todas miden lo mismo que A. Eso implicaría que A tenía medida cero.

Proof. El conjunto de A^0 de los puntos que nunca vuelven a A, es el conjunto de puntos $x \in A$ para los que no existe $n > 0$ tal que $T^n(x) \in A$, es decir

$$A^0 = A \setminus \bigcup_{n>0} T^{-n}(A) \tag{1.1}$$

Como es fácil de ver, $A^0 \in \mathcal{A}$. El TRP quedaría probado viendo que A^0 tiene μ-medida 0. Para eso, veamos que la familia de pre-imágenes $T^{-n}(A^0)$ es disjunta 2 a 2. En efecto,

$$A^0 \cap T^{-k}(A^0) \subset A^0 \cap T^{-k}(A) = \emptyset$$

de la misma forma,

$$T^{-n}(A^0) \cap T^{-m}(A^0) \subset T^{-n}(A^0 \cap T^{-m+n}(A)) = \emptyset$$

Pero

$$\mu(\bigcup_{n>0} T^{-n}(A^0)) = \sum_{n>0} \mu(T^{-n}(A^0)) = \sum_{n>0} \mu(A^0) \leq 1$$

o sea que $\mu(A^0) = 0$, lo que prueba el enunciado. $\square$

A continuación, la versión más conocida del TRP:

Teorema 1.2 (Teorema de Recurrencia de Poincaré). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, y T un automorfismo. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces μ-ctp de A vuelve infinitas veces a A. Es decir, si*

$$\widetilde{A} = \{x \in A : T^n(x) \in A \text{ para } \infty\, n > 0\} \quad \text{entonces} \quad \mu(A \setminus \widetilde{A}) = 0$$

Proof. Es fácil ver que

$$A \setminus \widetilde{A} = \bigcup_{N>0} [A \setminus \bigcup_{n \geq N} T^{-n}(A)] := \bigcup_{N>0} A_N$$

Ahora,

$$A_N \subset A^0 \cup [T^{-1}(A)]^0 \cup \cdots \cup [T^{-N+1}(A)]^0,$$

donde B^0 denota, para cada conjunto B, la construcción de la ecuación (1.1). Por lo tanto,

$$\mu(A \setminus \widetilde{A}) \leq \sum_{N>0} \mu(A_N) \leq \sum_{N>0} \sum_{k=0}^{N-1} \mu([T^{-k}(A)]^0) = 0$$

$\square$

Notemos que no hay hipótesis topológicas sobre el conjunto X, sólo se exige que μ sea una medida de probabilidad. La versión topológica del TRP, en cambio, sí requiere condiciones sobre el conjunto X. Esta versión se encarga de los puntos cuyas órbitas vuelven a pasar arbitrariamente cerca de sí mismos. Diremos que un punto $x \in X$ es ***recurrente*** si

$$\liminf d(T^n(x), x) = 0$$

Ejercicio 7 mostrar que en las rotaciones del toro, *todos* los puntos son recurrentes.

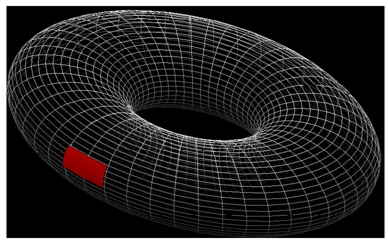

FIGURE 2. En rojo, un montón de puntos recurrentes

TEOREMA 1.3 (Teorema de Recurrencia de Poincaré (versión topológica)). *Sea X un espacio métrico separable, μ una probabilidad sobre los borelianos de X y T un automorfismo. Entonces μ-ctp es recurrente.*

Proof. Consideremos una base numerable de abiertos U_n. Llamemos U_n^0 a los conjuntos construidos como en la ecuación (1.1). Entonces, tenemos $\mu(\bigcup_n U_n^0) = 0$. Veamos ahora que si x está en $X \setminus \bigcup_n U_n^0$, entonces x es recurrente. Dado $\varepsilon > 0$, existe n tal que $U_n \subset B_\varepsilon(x)$. Como $x \notin U_n^0$, existe $k > 0$ tal que $T^k(x) \in U_n \subset B_\varepsilon(x)$, es decir $\liminf d(T^k(x), x) = 0$ $\square$

Ejercicio 8[KH](Boshernitzan) Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ una transformación que preserva la medida de Lebesgue. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\inf n.|T^n(x) - x| \leq 1 \qquad ctx \in [0,1].$$

2. COMPLEMENTO

A continuación, otra versión del TRP, sacado de la página de Terence Tao [T]. Notar que no se usa que la medida sea de probabilidad, aunque la conclusión es, según como se mire, un poco más débil

TEOREMA 2.1 (TRP). *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de probabilidad. T automorfismo. Entonces, para todo $A \in \mathcal{A}$*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}(A)) \geq \mu(A)^2$$

En particular, si A es de medida positiva, entonces $A \cap T^{-n}(A) \neq \emptyset$ para infinitos n.

Proof. Como la medida es T-invariante, tenemos para cada N

$$\int_X \sum_{n=1}^{N} 1_{T^n(A)} d\mu = N\mu(A)$$

donde 1_A es la función característica de A (que vale 1 si $x \in A$, 0 caso contrario). De la desigualdad de Cauchy-Schwarz en L^2 obtenemos

$$\left| \int_X 1_X. \left(\sum_{n=1}^{N} 1_{T^n(A)} \right) d\mu \right| \leq \left(\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} 1_{T^n(A)} \right)^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

lo que implica

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{N} 1_{T^n(A)} \right)^2 d\mu \geq N^2 \mu(A)^2$$

De aquí obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \mu(A \cap T^{n-m}(A)) \geq N^2 \mu(A)^2$$

Para N y k suficientemente grandes tenemos que

$$\mu(A)^2 \leq \frac{1}{N^2} \left(\sum_{|} n - m| \leq k\mu(A \cap T^{n-m}(A)) + \sum_{|} n - m| \geq k\mu(A \cap T^{n-m}(A)) \right)$$

Cuando $N \to \infty$, tomando k fijo, suficientemente grande, el primer sumando queda algo del orden de N, es decir, algo que tiende a ∞ como N, con lo cual desaparece cuando se toma el límite superior de toda la expresión. □

References

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **54**

[M] R. Mañé, *Teoria ergódica*, Projeto Euclides, **14**, IMPA, Rio de Janeiro (1983)

[T] Página de Terry Tao: `http://terrytao.wordpress.com/category/teaching/254a-ergodic-theory/`