CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA 2008 - III

GABRIEL NÚÑEZ

1. Teorema Ergódico Maximal

Teorema 1.1 (Teorema Ergódico Maximal (Versión Baby)). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $T : X \longrightarrow X$ preserva μ, $f \in L^1(\mu)$.*
Sea $E = \{x \in X : \sup_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{n} f \circ T^j(x) > 0\}$.
Entonces

$$\int_E f \, d\mu \geq 0$$

Proof. Sea $f_n(x) := max\{f(x), f(x) + f(T(x)), \ldots, \sum_{j=0}^{n} f(T^j(x))\}$,
$E_n := \{x / f_n(x) > 0\}$, como $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ es suficiente probar que $\int_{E_n} f \, d\mu \geq 0$, pues $\int_E f \, d\mu \geq \int_{E_n} f \, d\mu \geq 0$.
Entonces veamos que $\int_{E_n} f \, d\mu \geq 0$, $\forall n \geq 0$
Observemos que $f_n(x) \geq \sum_{j=0}^{m} f(T^j(x))$, con $0 \leq m \leq n$. Entonces:

$$f_n(T(x)) + f(x) \geq \sum_{j=1}^{m+1} f(T^j(x)) + f(x) = \sum_{j=0}^{m+1} f(T^j(x)), \quad \textit{con} \quad 0 \leq m < n$$

$$\left.\begin{array}{r} \textit{Luego} \quad f_n(T(x)) + f(x) \geq \max_{0 \leq m \leq n} \sum_{j=0}^{m+1} f(T^j(x)) \\ \textit{Por otro lado cuando} \quad f_n(T(x)) \geq 0 \Rightarrow f_n(T(x)) + f(x) \geq f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f_n(T(x)) + f(x) \geq f_n(x) \tag{1.1}$$

Entonces usando la inecuación (1.1) tenemos que:

$$\int_{E_n} f \, d\mu = \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T < 0\}} f \, d\mu + \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T \geq 0\}} f \, d\mu$$

$$\geq \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T < 0\}} f \, d\mu + \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T \geq 0\}} f_n \, d\mu - \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T \geq 0\}} (f_n \circ T) \, d\mu$$

Por lo que obtenemos la inecuación:

$$\int_{E_n} f \, d\mu \geq \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T < 0\}} f \, d\mu + \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T \geq 0\}} f_n \, d\mu - \int_{E_n \bigcap \{f_n \circ T \geq 0\}} (f_n \circ T) \, d\mu \tag{1.2}$$

Lemma 1.2. *Si* $f_n(x) \geq 0$ *y* $f_n(T(x)) < 0$ *entonces* $f_n = f(x)$ *y* $f(x) > 0$

Proof.
$f_n(T(x)) < 0$ es equivalente a:

$$\sum_{j=1}^{n+1} f(T^j(x)) = \sum_{j=0}^{m} f(T^{j+1}(x)) \leq f_n(T(x)) < 0, \quad \forall \quad 0 \leq m < n$$

De aquí tenemos que:

$$\sum_{j=0}^{m} f(T^{j+1}(x)) < 0, \quad \forall \quad 0 \leq m < n$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{m+1} f(T^j(x)) < 0, \quad \forall \quad 0 \leq m < n$$

y por lo tanto implica que:

$$\sum_{j=1}^{m} f(T^j(x)) < 0, \quad \forall \quad 1 \leq m \leq n \tag{1.3}$$

Ademas por definición de f_n si $f_n(x) \geq 0$ tenemos que $\exists \quad 0 \leq m \leq n$ tal que:

$$\sum_{j=0}^{m} f(T^j(x)) \geq 0 \tag{1.4}$$

Por lo tanto usando (1.3) y (1.4) obtenemos que $f(x) \geq 0$ y usando la definición de f_n obtenemos que

$$f_n = f(x)$$

y claramente vale:

$$f(x) > 0$$

Luego el lema esta demostrado. $\square$

Volviendo a la demostración del Teorema Ergódico Maximal recordemos que nuestro objetivo es probar que $\int\limits_{E_n} f\,d\mu \geq 0$

$$\int\limits_{E_n} f\,d\mu \geq \int\limits_{E_n \bigcap \{f_n\circ T<0\}} f\,d\mu + \int\limits_{E_n \bigcap \{f_n\circ T\geq 0\}} f\,d\mu \geq$$

$$\int\limits_{E_n \bigcap \{f_n\circ T<0\}} f_n\,d\mu + \int\limits_{E_n \bigcap \{f_n\circ T\geq 0\}} (f_n - f_n\circ T)\,d\mu$$

$$= \int\limits_{E_n} f_n\,d\mu - \int\limits_{E_n \bigcap \{f_n\circ T\geq 0\}} (f_n\circ T)\,d\mu = \int\limits_{T^{-1}(E_n)} f_n\circ T\,d\mu - \int\limits_{E_n \bigcap \{f_n\circ T\geq 0\}} f_n\circ T\,d\mu$$

Entonces:

$$\int\limits_{E_n} f\,d\mu \geq \int\limits_{T^{-1}(E_n)} f_n\circ T\,d\mu - \int\limits_{E_n \bigcap \{f_n\circ T\geq 0\}} f_n\circ T\,d\mu \tag{1.5}$$

Ademas $T^{-1}(E_n) = \{x/(f_n\circ T)(x) \geq 0\} \supseteq E_n \bigcap \{f_n\circ T \geq 0\}$ de aqui usando la ecuación (1.5) obtenemos que

$$\int\limits_{E_n} f\,d\mu \geq 0$$

entonces

$$\int\limits_{E} f\,d\mu \geq 0$$

□

Veamos ahora una version mas general del Teorema Ergódico Maximal.

Teorema 1.3 (Teorema Ergódico Maximal). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $T : X \longrightarrow X$ preserva μ, dada $f \in L^1(\mu)$.*
Definimos $f^*(x) := \sup\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} (f\circ T^j)(x)$.

Entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ vale que:

$$\int\limits_{\{f^*>\alpha\}} f\,d\mu \geq \alpha\mu(\{f^* > \alpha\})$$

Proof. Sea $E_\alpha = \{f^* > \alpha\} = \{f^* - \alpha > 0\}$, entonces:

$$E_\alpha = \{x : \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) - \alpha > 0\}$$

Sea $g := f - \alpha \Rightarrow$

$$E_\alpha = \{x : \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) > 0\}$$

Llamemos

$$E = \{x : \sup_{n\geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) > 0\}$$

Entonces vale que $E_\alpha = E$ y por lo tanto obtenemos que:

$$\int_{E_\alpha} g\, d\mu = \int_E g\, d\mu \tag{1.6}$$

Por el Teorema Ergódico Maximal (Versión Baby) tenemos que

$$\int_E g\, d\mu \geq 0 \tag{1.7}$$

De la definición de g y de las ecuaciones (1.6) y (1.7) se prueba que $\int_{E_\alpha} f - \alpha\, d\mu \geq 0 \Rightarrow \int_{E_\alpha} f\, d\mu \geq \int_{E_\alpha} \alpha\, d\mu$. Esto ultimo implica que:

$$\int_{\{f^*>\alpha\}} f\, d\mu \geq \alpha\mu(\{f^* > \alpha\})$$

□

Corolario 1.4. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, $T : X \longrightarrow X$ preserva μ, $f \in L^1(\mu)$. Sea A conjunto tal que $A = T^{-1}(A)$ y $A \subseteq \{x/f^*(x) > \alpha\}$. Entonces*

$$\int_A f\, d\mu \geq \alpha\mu(A)$$

Proof.

Veamos primero cuando $\alpha = 0$

Veamos que:

$$A = \{x/(f\chi_A)^* > 0\} \tag{1.8}$$

($\supset$) Sea $x \in \{x/(f\chi_A)^* > 0\}$ entonces:

$$\sup_{n\geq 0} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\chi_A \circ T^j(x) > 0$$

Entonces $T^{j_0}(x) \in A$ para algun $j_0 \Rightarrow T^{j_0-1}(x) \in T^{-1}(A) = A$ y de esta forma obtenemos que $x \in A$

($\subset$) Sea $x \in A \Rightarrow \chi_A(x) = 1$ y por hipotesis tenemos que $f^*(x) > 0$ entonces $(f\chi_A)^*(x) > 0$

Luego queda probado (1.8) y por el T.E.M. vale la tesis.

Ahora si $\alpha \neq 0$ sea $g = f - \alpha$ entonces

$$\{x/\sup_{n\geq 0} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) > \alpha\} = \{x/\sup_{n\geq 0} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) > 0\}$$

Entonces:

$$0 \leq \int_A g\, d\mu = \int_A (f-\alpha)\, d\mu \Rightarrow \int_A f\, d\mu \geq \int_A \alpha\, d\mu$$

Entonces:

$$\int_A f\, d\mu \geq \alpha\mu(A)$$

$\square$

Ejercicio 1. *μ es T-invariante si y solo si $\forall f \in L^1(\mu)$ vale que:*

$$\int_X f \circ T\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

Proof.
($\Longleftarrow$)

$$\mu(T^{-1}(A)) = \int_X \chi_{T^{-1}(A)}\, d\mu = \int_X \chi_A \circ T\, d\mu = \int_X \chi_A\, d\mu = \mu(A)$$

.
Entonces μ es T-invariante.
($\Rightarrow$) Sea μ T-invariante, $f \in L^1(\mu) \Rightarrow \exists\{f_n\}$ funciones simples tales que:

$$\{f_n\} \nearrow f \quad y \quad \int_X f\, d\mu = lim \int_X f_n\, d\mu$$

Si la propiedad vale para funciones simples tenemos que:

$$\int_X f \circ T \, d\mu = lim \int_X f_n \circ T \, d\mu = lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Luego si vale para funciones simples se obtiene lo deseado, veamos que efectivamente vale para funciones simples.

Sea $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ una funcion simple con A_k medible. Entonces:

$\int_X \varphi \circ T \, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(T(x)) \, d\mu$, como $\chi_{A_k} \circ T = \chi_{T^{-1}(A_k)}$ tenemos que:

$\int_X \varphi \circ T \, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{T^{-1}(A_k)} \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X \chi_{T-1(A_k)} \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(T^{-1}(A_k))$

Como μ es T-invariante tenemos que:

$$\int_X \varphi \circ T \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X \chi_{A_k} \, d\mu = \int_X \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k} \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu.$$

Entonces:

$$\int_X \varphi \circ T \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu$$

□

2. Teorema Ergódico de Birkhoff

Teorema 2.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad,*
$T : X \longrightarrow X$ preserva μ, $f \in L^1(\mu)$. Entonces:

$\tilde{f}(x) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j \; \exists ct x \in X$

Ademas $\tilde{f} \in L^1(\mu)$, $\int_X \tilde{f} \, d\mu = \int_X f \, d\mu$, $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$

Si $f \in L^p(\mu) \Rightarrow \tilde{f} \in L^p(\mu)$ *y* $\| \tilde{f} \|_p \leq \| f \|_p$

Proof. Sean

$$f^+(x) := limsup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

y

$$f^-(x) := liminf \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

La idea es probar que el conjunto de puntos tales que $f^+(x) > \alpha > \beta > f^-(x)$,

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tiene medida cero.
Para esto definimos los conjuntos:

$$E_\alpha^+(f) := \{x/f^+(x) > \alpha\}$$
$$E_\beta^-(f) := \{x/f^-(x) < \beta\}$$

y

$$A_{\alpha\beta} := E_\alpha^+(f) \bigcap E_\beta^-(f)$$

Entonces si probamos que $\mu(A_{\alpha\beta}) = 0$ tenemos que $\tilde{f}(x) \exists ctx \in X$.
Sea $x \in A_{\alpha\beta} \Rightarrow liminf f \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) < \beta \Rightarrow limsup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} -f \circ T^j(x) > -\beta \Rightarrow$
por el corolario anterior tenemos que $\int_{A_{\alpha\beta}} -f \, d\mu \geq -\beta\mu(A_{\alpha\beta})$, lo que implica que:

$$\int_{A_{\alpha\beta}} f \, d\mu \leq \beta\mu(A_{\alpha\beta}) \tag{2.9}$$

y tambien usando el corolario se prueba que:

$$\int_{A_{\alpha\beta}} f \, d\mu \geq \alpha\mu(A_{\alpha\beta}) \tag{2.10}$$

Entonces de (2.9) y (2.10) obtenemos que:

$$\alpha\mu(A_{\alpha\beta}) \leq \beta\mu(A_{\alpha\beta}) \tag{2.11}$$

Pero ademas sabemos que $\alpha > \beta$ entonces:

$$\mu(A_{\alpha\beta}) = 0 \tag{2.12}$$

Ahora sea $\{\alpha_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión densa, veamos que $\mu(\{x/f^+(x) > f^-(x)\}) = 0$.

$$\{x/f^+(x) > f^-(x)\} \subseteq \bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} \{x/f^+(x) > \alpha_n > \alpha_m > f^-(x)\} = \bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} A_{\alpha_n\alpha_m}$$

Entonces se obtiene que:

$$\{x/f^+(x) > f^-(x)\} \subseteq \bigcup_{\alpha_n > \alpha_m} A_{\alpha_n\alpha_m}$$

luego usando la ecuación (2.12):

$$\mu(\{x/f^+(x) > f^-(x)\}) \leq \sum \mu(A_{\alpha_n\alpha m}) = 0$$

Por lo tanto $\exists \quad \tilde{f}(x) \quad ctx \in X$

Veamos que si $f \in L^p(\mu) \Rightarrow \tilde{f} \in L^p(\mu)$

$\| \tilde{f} \|_p^p = \int\limits_X |\tilde{f}(x)|^p d\mu \leq \int\limits_X \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} |f \circ T^j(x)|^p d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \int\limits_X |f \circ T^j(x)|^p d\mu$

Por el ejercicio anterior como μ es T^j - invariante tenemos que este último límite es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \int\limits_X |f(x)|^p d\mu$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \int\limits_X |f(x)|^p d\mu = \int\limits_X |f(x)|^p d\mu = \| f \|_p^p$
$\Rightarrow \| \tilde{f} \|_p^p \leq \| f \|_p^p$
Entonces:

$$\| \tilde{f} \|_p \leq \| f \|_p \tag{2.13}$$

Como $f \in L^p(\mu) \Rightarrow \| f \|_p < \infty$ y por (2.13) tenemos que: $\| \tilde{f} \|_p < \infty$ lo que implica que:

$$\tilde{f} \in L^p(\mu)$$

De aqui como por hipotesis sabemos que $f \in L^1(\mu)$ y lo ultimo que probamos implica que

$$\tilde{f} \in L^1(\mu)$$

Veamos que $\tilde{f} \circ T(x) = \tilde{f}(x)$

$$\tilde{f} \circ T(x) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(T(x))) = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(T^j(x)) =$$

$$= lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) - \frac{1}{n} f(x) = \tilde{f}(x)$$

Entonces:

$$\tilde{f} \circ T(x) = \tilde{f}(x)$$

Veamos por último que $\int\limits_X \tilde{f}\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$

$\int\limits_X \tilde{f}\, d\mu = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \int\limits_X f \circ T^j\, d\mu = lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n-1} \int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu.$

Entonces:

$$\int\limits_X \tilde{f}\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$$

$\square$

References

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **54**

[M] R. Mañé, *Teoria ergódica*, Projeto Euclides, **14**, IMPA, Rio de Janeiro (1983)