

CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA 2008 - IV

1. DEFINICIÓN DE ERGODICIDAD

DEFINICIÓN 1.1. *Definición oficial.*

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de probabilidad. $T : X \rightarrow X$ automorfismo.

T se dice ergódico si $\forall A \in \mathcal{A}$ tal que $T^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

1.1. Definiciones equivalentes.

DEFINICIÓN 1.2. T se dice ergódica si $\forall A \in \mathcal{A}$ tal que

$T(A) \subset A \Rightarrow \mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Dem. Si T cumple la definición equivalente 1 entonces T es ergódica ya que $T(A) \subset A$ implica $A \subset T^{-1}(A)$.

Por otro lado si T es ergódica entonces considero

$$A_n = T^{-n}(A) \text{ para } n \geq 0.$$

Se tiene que:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (i) & \mu(A_n) = \mu(A) \text{ por ser } \mu \text{ } T\text{-invariante.} \\ (ii) & \{A_n\} \text{ creciente.} \end{aligned}$$

Así que:

$$B = \bigcup_{n \geq 0} A_n \Rightarrow \mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

Además

$$T^{-1}(B) = T^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = T^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} T^n(A)\right) = \bigcup_{n \geq 0} T^n(A) = \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset B$$

Como $A \subset T^{-1}(A)$ entonces $\mu(B) = 0$ o $\mu(B) = 1 \Rightarrow \mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

□

DEFINICIÓN 1.3. T se dice ergódica si $\forall A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} T^n(A)\right) = 1$$

Dem. Voy a probar esta definición sii la definición equivalente 1. Si T es ergódica y A es tal que $\mu(A) > 0$, considero

$$B = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A).$$

Como

$$B \subset T^{-1}(B) \Rightarrow \mu(B) = 0 \text{ o } \mu(B) = 1.$$

Al ser μ T invariante y la unión creciente se tiene $\mu(A) = 1$ o $\mu(A) = 0$ pero esto último contradice hipótesis, así que $\mu(B) = 1$

Ahora sea T que cumple con la definición equivalente 2 voy a mostrar que es ergódica. Sea $A \subset T^{-1}(A)$ entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) > 0$, si pasa lo segundo entonces

$$1 = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-n}(A)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A) = \mu(A)$$

Así que T es ergódica. □

DEFINICIÓN 1.4. T se dice ergódica si

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) = \text{constante c.t.x} \quad \forall f \in \mathcal{L}^1.$$

Dem.

($\Rightarrow$)

$$\tilde{f} \text{ constante c.t.x} \Rightarrow \int f d\mu = \tilde{f}(x)$$

Defino

$$A = \{x : \tilde{f}(x) > \int f d\mu\}$$

$$B = \{x : \tilde{f}(x) < \int f d\mu\}$$

Son T invariantes luego si $\mu(A) = 1$ entonces

$$\int \tilde{f} > \int f \text{ absurdo, contradice Birhoff.}$$

Así que $\mu(A) = 0$. Análogamente para B

($\Leftarrow$)

Sea $A \setminus T^{-1}(A) = A$ se tiene que

$$\chi_A(x) = \chi_{T^{-1}(A)}(x) = \chi_{T^{-n}(A)}(x)$$

Luego,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A \circ T^i(x) = \chi_A(T^{-1}(x))$$

Luego

$$\chi_A(x) = \tilde{\chi}_A = \int \chi_A = \mu(A)$$

Por lo tanto $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

□

DEFINICIÓN 1.5. T es ergódico si

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \text{constante c.t.x} \quad \forall f \in \mathcal{D} \subset \mathcal{L}^1$$

donde $\mathcal{D}$ es un denso.

Dem.

Es claro que si T es ergódica entonces cumple esto.

Voy a mostrar que si $\tilde{f} = \text{cte}$ para un denso entonces pasa $\forall f \in \mathcal{L}^1$. Dada $f \in \mathcal{L}^1$ y ε , sea $g \in \mathcal{D}$ tal que

$$\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/3$$

y n_0 tal que

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) - \int g \right\| < \varepsilon/3 \quad \forall n \geq n_0$$

Entonces

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) - \int f \right\| &\leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) - \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) \right\| \\ &+ \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g \circ T^j(x) - \int g \right\| + \|f - g\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 1.6. T se dice ergódica si $\forall A, B \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Dem. Si T es ergódica entonces usando el teorema de Birkhoff se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \tilde{\chi}_A = \int \chi_A d\mu = \mu(A) \quad \text{c.t.p.}$$

Usando el teorema de convergencia dominada

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mu(A)\mu(B) &= \int_X \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) \chi_B \right) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_X \left(\sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) \chi_B \right) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X \chi_A(T^j(x)) \chi_B d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) \end{aligned}$$

Vamos a probar que si T cumple esta definición entonces T es ergódica. Sea A un conjunto T invariante.

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mu(A)\mu(A^c) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap A^c) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap A^c) = 0 \end{aligned}$$

Así que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A^c) = 0$.

□

DEFINICIÓN 1.7. T es ergódica si

$$\tilde{\chi}_A = \mu(A) \text{ c.t.p.} \quad \forall \quad A \in \mathcal{A}$$

Dem.

$$\tilde{\chi}_A(x) = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A) \text{ c.t.p.}$$

Sea A T invariante entonces, si $\mu(A) > 0$, como $\tilde{\chi}_A = 1 \quad \forall x \in A$ se tiene que $\mu(A) = 1$

□

Recordemos la definición de transitividad y un par de condiciones equivalentes a esta, ya que veremos en breve que ergodicidad implica transitividad.

DEFINICIÓN 1.8. T un mapa continuo en X se dice transitivo si

$$\forall \quad U, V \text{ abiertos no vacíos se tiene } \exists n \geq 1 \text{ tal que } T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$$

PROPOSICIÓN 1.9. Sea X un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ un mapa continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) T es transitivo.
- (ii) Para un residual de X se tiene $\omega(x) = X$
- (iii) Para todo abierto no vacío $U \subset X$ se tiene que el conjunto $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$ es denso.

PROPOSICIÓN 1.10. Sea T un mapa continuo en X un espacio métrico completo, μ una medida T invariante que le asigna medida positiva a los abiertos. Si T es ergódico entonces es transitiva.

Dem. Sea U_0 un abierto no vacío, por hipótesis $\mu(U_0) > 0$, al ser T ergódica, el conjunto $U = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U_0)$ tiene medida 1 y es T invariante. Su complemento tiene medida cero y como μ es positiva en abiertos $\text{int}(U^c) = \emptyset$, así que U es denso.

□

2. TRANSFORMACIONES ÚNICAMENTE ERGÓDICAS Y TRANSFORMACIONES MIXING.

DEFINICIÓN 2.1. Un mapa T se dice únicamente ergódico si $\sharp M_T = 1$, es decir si existe una única medida T -invariante

Un par de condiciones equivalentes a ser únicamente ergódica en el caso de que T sea una transformación continua.

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea T continua en X métrico compacto. Son equivalentes:*

- (i) T únicamente ergódica
- (ii) $\forall f \in \mathcal{C}'$, $x \in X$ existe el límite de Birkhoff y no depende de x .
- (iii) $\forall f \in \mathcal{C}'$ la sucesión de funciones continuas $\{f_n\}$ definidas por:

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

converge uniformemente a una constante.

A continuación se probará que las rotaciones irracionales en S^1 son únicamente ergódicas y por lo tanto ergódicas.

PROPOSICIÓN 2.3. *Las rotaciones irracionales en S^1 son únicamente ergódicas.*

Dem. Dada $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. T una rotación irracional en S^1 . Como f es continua usando Birkhoff existe $x_1 \in S^1 : \exists f(\tilde{x}_1)$. Se mostrará que f_n , definida por

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$$

converge uniformemente a $\tilde{f}(x_1)$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea el δ de continuidad de f correspondiente a $\varepsilon/3$. Como la órbita de x es densa para el futuro entonces $\exists M > 0$ tal que $\|T^M(x) - x_1\| < \delta$. Para todo $j \leq 0$ se tiene $\|T^{M+j}(x) - T^j x_1\| < \delta$. Usando continuidad de f se tiene, para $n \geq 1$:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^{M+j}(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x_1) \right| < \varepsilon/3.$$

Sea n_0 tal que para $n \geq n_0$ se cumpla que:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x_1) - \tilde{f}(x_1) \right| < \varepsilon/3$$

Sea n_1 tal que se cumpla para todo $n \geq n_1$:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^{M+j}(x) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \right| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{M-1} \|f\|_0 + \sum_{j=n}^{n+M-1} \|f\|_0 \right) \leq \frac{2M\|f\|_0}{n} < \varepsilon/3.$$

Tomando N el máximo entre n_0 y n_1 usando desigualdad triangular, se tiene para todo $n \geq 0$ que:

$$|f_n - \tilde{f}(x_1)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto T es únicamente ergódica.

□

DEFINICIÓN 2.4. Una $T : X \rightarrow X$ medible, μ -invariante, se dice *mixing* si $\forall A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

PROPOSICIÓN 2.5. Si $T : X \rightarrow X$ es medible, preserva μ y es *mixing* entonces T es *ergódica*.

Dem. Dado $A \in \mathcal{A}$ un conjunto T -invariante. entonces

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu(E \cap E^c) = \mu(T^{-n}(E) \cap E^c) \quad \forall n > 0$$

Luego

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-n}(E) \cap E^c) = \mu(E)\mu(E^c) = \mu(E)(1 - \mu(E))$$

Así que o $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$ □

El recíproco no es cierto, se demostrará más adelante que las rotaciones irracionales no son *mixing*.

DEFINICIÓN 2.6. Sea $T : X \rightarrow X$ medible Borel en un espacio topológico X se dice *topológicamente mixing* si $\forall U, V$ abiertos no vacíos, existe n_0 tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$

A continuación mostraremos la siguiente propiedad que vincula las transformaciones *mixing* y las que son topológicamente *mixing*.

PROPOSICIÓN 2.7. Sea $T : X \rightarrow X$ medible Borel y preserva μ , T *mixing* y μ positiva sobre abiertos entonces T es topológicamente *mixing*.

Dem. Dados U, V abiertos no vacíos, como T es *mixing* se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(T^{-n}(U) \cap V) = \mu(U)\mu(V) > 0.$$

Esto implica que para valores suficientemente grandes de n se cumple que $\mu(T^{-n}(U) \cap V) > 0$ y por lo tanto $T^{-n}(U) \cap V$ no es vacío. □

Por último y usando esta proposición mostraremos que las rotaciones irracionales no son *mixing*.

Sea $T : S^1 \rightarrow S^1$ $T(z) = e^{2\pi i \alpha} z$ donde α es un número irracional en $(0, 1)$. Como la medida de Lebesgue es positiva sobre abiertos bastaría chequear que T no es topológicamente *mixing*. Sea U un intervalo abierto de S^1 de longitud ε tal que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$. Sea $V = e^{2i\epsilon} U$. Basta ver que si $T^{n_0}(V) \cap U \neq \emptyset$ entonces $T^{n_0+1}(V) \cap U = \emptyset$. Si esto no fuera así la longitud de $T^{n_0+1}(V) \cup U \cup T^{n_0}(V)$ sería menor que $3\varepsilon < 2\pi \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$ pero contendría dos puntos x_0 y $T(x_0)$ que distan $2\pi \min\{\alpha, 1 - \alpha\}$, lo cual es absurdo.

REFERENCES

- [KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **54**
- [M] R. Mañé, *Teoria ergódica*, Projeto Euclides, **14**, IMPA, Rio de Janeiro (1983)
- [EC] E. Castigeras, *Teoria ergódica*, Notas sobre el curso, IMERL, Montevideo (1997)