CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA 2008 - V

GABRIEL NÚÑEZ

1. Introducción

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad, recordemos que $\mathcal{M}_T(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu \quad es \quad T-invariante\}$, $\mathcal{M}_T(X)$ es un espacio métrico compacto con la topología débil estrella y convexo, esto ultimo quiere decir:

$$Si \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X) \Rightarrow \quad t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \in \mathcal{M}_T(X), \forall t \in [0,1]$$

Teorema 1.1 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea L operador lineal, positivo tal que $L(1) = 1$. Entonces:*

$$\exists! \quad \mu \quad / \quad L(f) = \int\limits_X f \, d\mu$$

Esto establece una biyección:

$$[C^0(X)]^*|_{\{medidas \quad positivas, \quad con \quad L(1)=1\}} \longleftrightarrow \mathcal{M}(X)$$

Ejemplo 1. *Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ definido por:*

$$T(x) = \frac{1}{2}x \quad si \quad x > 0 \quad y \quad T(0) = 1$$

Vimos en la primer clase que T no preserva ninguna medida, luego en este caso vale que: $\mathcal{M}_T(X) = \phi$

2. Teorema de descomposición Ergódica

Definición 2.1. *Una medida μ es un punto extremal si $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ entonces $\mu = \mu_1$ o $\mu = \mu_2$.*

Definición 2.2. *Dadas dos medidas μ y ν decimos que ν es absolutamente continua respecto a μ y denotamos por $\nu << \mu$ si*

$$\mu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(A) = 0 \quad \forall A \quad medible$$

Teorema 2.3 (Radom - Nikodym). *Sean μ y ν medidas tales que $\nu << \mu$. Entonces $\exists f \in L^1(\mu)$ tal que:*

$$\nu(A) = \int\limits_A f \, d\mu$$

donde $f := \frac{d\nu}{d\mu}$ *y se le llama derivada de Radom - Nikodym de* ν *respecto a* μ. *Luego tenemos que:*

$$\nu(A) = \int\limits_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$$

Ejercicio 1. *Sean* ν *y* μ *dos medidas T-invariantes y* $\nu << \mu$. *Probar que* $\frac{d\nu}{d\mu} \circ T = \frac{d\nu}{d\mu}$.

Proof. Sabemos que $\nu(A) = \int\limits_A \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$ y ademas:

$$\nu(T^{-1}(A)) = \int\limits_{T^{-1}(A)} \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \int\limits_A \frac{d\nu}{d\mu} \circ T\, d\mu$$

Como ν es T-invariante vale que $\nu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$, entonces:

$$\frac{d\nu}{d\mu} \circ T = \frac{d\nu}{d\mu}$$

□

Teorema 2.4. *Sea* μ *una medida entonces:*
μ *es ergódica* $\Longleftrightarrow$ μ *es un punto extremal de* $\mathcal{M}_T(X)$

Proof. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ para algún $t \in [0,1]$
Si $t = 0$ entonces $\mu = \mu_2$ y por tanto es extremal.
Si $t \neq 0$ entonces $\mu_1 << \mu \Rightarrow \mu_1(A) = \int\limits_A \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu$ donde $\frac{d\mu_1}{d\mu} \in L^1(\mu)$ y ademas es T-invariante es decir:

$$\frac{d\mu_1}{d\mu} \circ T = \frac{d\mu_1}{d\mu}$$

entonces como μ es ergodica tenemos que:

$$\frac{d\mu_1}{d\mu} = cte \quad \mu - ctp$$

Luego:

$$\mu_1(X) = \int\limits_X \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu = \frac{d\mu_1}{d\mu}\mu(X)$$

Como $\mu_1(X) = \mu(X) = 1$ tenemos que

$$\frac{d\mu_1}{d\mu} = 1$$

y por tanto vale que:

$$\mu_1(A) = \int\limits_A d\mu = \mu(A)$$

es decir:

$$\mu = \mu_1 \quad \Rightarrow \quad \mu \quad es \quad extremal$$

.

($\Longleftarrow$) Sea A un conjunto invariante, supongamos que $0 < \mu(A) < 1$. Tomo las medidas restringidas a $A \quad y \quad A^c$ respetivamente:

$$\mu_1(B) = \mu_A(B) = \frac{\mu(B \bigcap A)}{\mu(A)}$$

$$\mu_2(B) = \mu_{A^c}(B) = \frac{\mu(B \bigcap A^c)}{\mu(A^c)}$$

Veamos que $\mu_1 \quad y \quad \mu_2$ son invariantes:

$$\mu_1(T^{-1}(B)) = \frac{\mu(T^{-1}(B) \bigcap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(B) \bigcap T(A))}{\mu(A)} = \frac{\mu(B \bigcap A)}{\mu(A)} = \mu_1(B)$$

La segunda igualdad vale porque μ es T-invariante y la tercer igualdad vale porque A es un conjunto invariante, luego probamos que:

$$\mu_1(T^{-1}(B)) = \mu_1(B)$$

Es decir que μ_1 es T-invariante.
Análogamente se prueba que μ_2 es T-invariante.
Ademas facilmente vale que:

$$\mu = \mu(A)\mu_1 + (1 - \mu(A))\mu_2$$

Entonces μ no es extremal, esto es absurdo. Luego $\mu(A) = 1$ o $\mu(A) = 0$ entonces μ es ergódica. $\square$

Teorema 2.5 (Teorema de Descomposición Ergódica (Version Baby)). *Sea $(X, \mathcal{B})$ espacio métrico compacto, $\mathcal{B}$ la σ - álgebra de Borel. Entonces $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ con X_α T-invariantes y μ_α medidas ergódicas.*
Ademas $\forall \varphi \in L^1(\mu)$, $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ vale que:

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_A \left(\int_{X_\alpha} \varphi \, d\mu_\alpha \right) d\alpha$$

Definición 2.6. *Dadas dos medidas μ y ν decimos que μ y ν son mutuamente singulares sii $\exists A \in \mathcal{A} / \quad \mu(A) = 1 \quad y \quad \nu(A) = 0$ y lo denotaremos mediante: $\mu \perp \nu$*

Teorema 2.7. *Sean $\mu \neq \nu$ ergódicas $\Rightarrow$ $\mu \perp \nu$.*

Proof. Supongamos que $\mu \neq \nu$ ergódicas $\Rightarrow$

$$\int \varphi \, d\mu \neq \int \varphi \, d\nu \tag{2.1}$$

Por el teorema de Birkhoff tenemos que:

$$\exists \quad A_{\varphi}, \quad con \quad \mu(A_{\varphi}) = 1/ \quad \tilde{\varphi}(x) = \int \varphi \, d\mu \tag{2.2}$$

$$\exists \quad A_{\nu}, \quad con \quad \nu(A_{\nu}) = 1/ \quad \tilde{\varphi}(x) = \int \varphi \, d\nu \tag{2.3}$$

Entonces si $\mu(A_{\varphi}) = 1 \Rightarrow$ por (2.1) y (2.2) tenemos que $\nu(A_{\varphi}) = 0$
Luego $\mu \perp \nu$. □

Ejercicio 2. *Sea X conjunto, $\mathcal{A}$ una σ - álgebra, $T : X \longrightarrow X$ medible, $\mu_i \in \mathcal{M}_T(X)$, con $i = 1, \ldots, n$, $\mu_i \neq \mu_j, \quad \forall \quad i \neq j$.*
Entonces $\exists A_i \subseteq X$ disjuntos dos a dos tal que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad y \quad \mu_j(A_i) = \delta_{ij}$$

Definición 2.8. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$, definimos el soporte de medida μ como:*

$$sop(\mu) = \{x \in X : \quad \mu(U_x) > 0, \quad \forall \quad U_x \quad abierto\}$$

Ejercicio 3. *Probar que:*

(1) *$sop(\mu)$ es cerrado*
(2) *$\mu(X - sop(\mu)) = 0$*
(3) *Si $\mu(A) = 1 \Rightarrow A$ es denso en el $sop(\mu)$*
(4) *Si $\mu \neq \nu$ ergódicas entonces: tienen soportes disjutos?*

Definición 2.9. *Sea T:X$\longrightarrow$X función medible, definimos:*

$$\Sigma_0(T) = \{x \in X / \quad \forall f \in C^0(X) \quad \exists \tilde{f}(x)\}$$

Para todo $x \in \Sigma_0(T)$ definimos $L_x : C^0(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante: $L_x(f) = \tilde{f}(x)$, luego por el teorema de representación de Riezt tenemos que:

$$\forall x \in \Sigma_0(T), \quad \exists! \quad \mu_x \in \mathcal{M}_T(X) \quad tal \quad que \quad \int_X f \, d\mu_x = L_x(f)$$

Definimos:

$$\Sigma_1(T) = \{x \in \Sigma_0(T)/ \quad \mu_x \quad es \quad T - invariante\}$$

OBSERVACIÓN 2.10. *Si T es continua entonces $L_x(f) = L_x(f \circ T)$ y ademas* $\Sigma_1(T) = \Sigma_0(T)$

Proof.

$$L_x(f) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) =$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} f(T^j(x)) =$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(T^j(x)) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^{j+1}(x)) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(f\circ T)(T^j(x)) = L_x(f\circ T)$$

Entonces queda probado que:

$$L_x(f) = L_x(f \circ T) \tag{2.4}$$

Sea $x \in \Sigma_0(T)$ por la ecuación (2.4) se tiene que μ_x es T-invariante entonces $x \in \Sigma_1(T)$
Entonces:

$$\Sigma_1(T) = \Sigma_0(T)$$

□

Volviendo a las definiciones sea:

$$\Sigma_2(T) = \{x \in \Sigma_1(T)/ \quad \mu_x \quad es \quad ergodica\}$$

y por último:

$$\Sigma(T) = \{x \in \Sigma_2(T)/ \quad x \in sop(\mu_x)\}$$

EJEMPLO 2 (La condición de continuidad de T en (2.4) es necesaria). *Sea T la función definida en el ejemplo 1, se puede ver que $\mu_x = \delta_0$ y ademas que: $\Sigma_0(T) = [0,1]$, pero como sabemos que T no preserva ninguna medida tenemos que: $\Sigma_1(T) = \phi$*

EJEMPLO 3. *Sea T:[0,1]⟶[0,1] definido por: $T(x) = \frac{1}{2}(x + x^2)$. Veamos que $\mu_x = \delta_0$ si $x \in [0,1)$ y $\mu_1 = \delta_1$*

$$\int_X f\, d\mu_1 = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(1)) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(1) = f(1)$$

Entonces:

$$\int_X f\, d\mu_1 = f(1)$$

Luego

$$\mu_1 = \delta_1$$

$$\int_X f\, d\mu_x = lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) = f(0)$$

Entonces:

$$\mu_x = \delta_0$$

Ademas $\forall x \quad \exists \quad L_x(f)$ *y como* T *es continua tenemos que:*

$$\Sigma_0(T) = \Sigma_1(T) = [0,1]$$

Queda como ejercicio ver que μ_x *y* μ_1 *son extremales y por lo tanto son ergódicas. Entonces:*

$$\Sigma_2(T) = [0,1]$$

Ademas como 0 y 1 son los únicos puntos que estan en el soporte tenemos que:

$$\Sigma(T) = \{0,1\}$$

Observación 2.11. *Esta lleno de ejemplos donde* $\Sigma_0(T)$ *es vacio.*

Definición 2.12. Σ *tiene probabilidad total si* $\forall \mu \in \mathcal{M}_T(X)$ *vale que* $\mu(\Sigma) = 1$

Teorema 2.13. *Si* $\mathcal{M}_T(X) \neq \phi \Rightarrow \Sigma(T)$ *tiene probabilidad total.*

Teorema 2.14 (Teorema de descomposición Ergódica). *Sea* $T{:}X\longrightarrow X$ *medible,* $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$*. Entonces* $\forall \varphi \in L^1(\mu)$ *vale que:*

$$\varphi \quad es \quad \mu_x - integrable \quad \mu - ctx \in \Sigma(T)$$

y ademas:

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_X \left(\int_X \varphi\, d\mu_x\right) d\mu$$

donde las medidas μ_x *son ergódicas y* $x \in sop(\mu)$

Se puede encontrar una demostración en [M, Teorema 6.4]

Observación 2.15. *Es importante destacar cuando en el Teorema de descomposición Ergódica tomamos* $\varphi = \chi_A$*, donde* A *es un conjunto medible, en este caso tenemos que:*

$$\mu(A) = \int_X \mu_x(A)\, d\mu$$

Esto nos permite ver con claridad como una medida se descompone en medidas ergódicas.

Corolario 2.16. *$A \subseteq X$ es de probabilidad total $\Longleftrightarrow \mu(A) = 1, \quad \forall \mu$ ergódica.*

Proof. ($\Longrightarrow$) Vale por definición.
($\Longleftarrow$) De la observación anterior sabemos que:

$$\mu(A) = \int_X \mu_x(A)\, d\mu$$

Como $\mu_x(A) = 1$ tenemos que:

$$\mu(A) = \int_X d\mu = \mu(X) = 1$$

Entonces

$$\mu(A) = 1$$

□

Definición 2.17. *$T: \longrightarrow X$ es únicamente ergódica si $\mathcal{M}_T(X) = \{\mu_0\}$*

Ejercicio 4. *Probar que las rotaciones irracionales son únicamente ergódicas.*

Se puede encontrar una demostración en [C, Capítulo 6]

References

[M] R. Mañé, *Teoria ergódica*, Projeto Euclides, **14**, IMPA, Rio de Janeiro (1983)
[C] Eleonora Catsigeras, http://www.fing.edu.uy/ eleonora/dvi/teIndice.htm