## CURSO DE TEORÍA ERGÓDICA 2008 - V

### 1. El shift de Bernoulli: punto de vista topológico

Sea $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ el espacio del shift de dos símbolos. Llamaremos $\Sigma_M = \{0, 1 \ldots, M-1\}^{Z}$ el espacio del shift de $M$ símbolos.

Definición 1.1. *En $\Sigma_M$ definimos la siguiente distancia:*

$$d(x,y) = \sum_{i \in \ \mathbb{Z}} \frac{|x_i - yi|}{(2M-1)^{|i|}}$$

Ejercicio 1. *Se tiene que $\Sigma_M$ con esta distancia es un espacio métrico compacto totalmente disconexo.*

Definición 1.2. *Definimos el cilindro de radio $l$, posiciones $n_1, \ldots, n_l$ y símbolos $a_1, \ldots, a_l$ como el siguiente conjunto:*

$$C^{a_1,\ldots,a_l}_{n_1,\ldots,n_l} = \{\{b_n\} : b_{n_i} = a_{n_i} \ \forall i = 1, \ldots, l, \ a_i \in \{0, \ldots, M-1\}\}$$

A partir de ahora nos concentraremos en $\Sigma_2$, la distancia que definimos allí tiene la siguiente forma:

$$d(x,y) = \sum_{i \in \ \mathbb{Z}} \frac{|x_i - yi|}{(3)^{|i|}}$$

Ejercicio 2. *Mostrar que $d(x,y) \leq \frac{1}{3^N}$ sii $x_i = y_i \ \forall |i| \ \leq N$*

Luego usando el ejercicio se tiene que

$$B_{\frac{1}{3^N}}(x) = C^{x_{-N}, x_{-N+1}, \ldots, x_{N-1}, x_N}_{-N, -N+1, \ldots, N-1, N}$$

Es decir, el cilindro que tiene en el lugar $i$ al símbolo $x_i$ para $i \in \{-N, \ldots, N\}$ es la bola de centro $x$ y radio $\frac{1}{3^N}$

A este cilindro lo notaremos $C_N(x)$. Los $\{C_N(x) : \quad x \in \Sigma_2, \quad N \in \mathbb{Z}\}$ forman una base de la topología inducida por la distancia. Además se tiene que cada cilindro es abierto:

$$C^{a_i}_{n_i} = \bigcup_{x_j \in \{0,1\}, j=-n_i}^{n_i - 1} C^{x_{-n_i}, \ldots, x_{2n_i}, a_{n_i}}_{-n_i, \ldots, n_i - 1, n_i} = \bigcup_{k=1}^{2n_i} C_{n_i}(x_k)$$

Tal que $x_k$ son las $2n_i$ sucesiones que toman desde el lugar $-n_i$ hasta el lugar $n_i - 1$ cualquier símbolo, en el lugar $n_i$ el símbolo $a_i$ y en el resto de los lugares toma el valor 0. Por lo tanto los $C_{n_i}^{a_i}$ son abiertos, y como cada cilindro se escribe como unión finita de $C_{n_i}^{a_i}$, entonces los cilindros son abiertos y también forman una base de la topología inducida por la distancia.

Definimos a continuación el shift

Definición 1.3.

$$\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2 \quad \sigma(x) = y \textit{ donde } y_i = x_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Proposición 1.4. *El shift de Bernoulli es un homeomorfismo.*

*Dem. Se tiene que $\sigma$ es invertible y es fácil verificar que su inversa es*

$$\sigma^{-1}(y) = x \textit{ donde } x_i = y_{i-1} \textit{ para todo } i$$

*Se tiene que:*

$$\sigma^{-1}(C_{n_1,\dots,n_l}^{a_1,\dots,a_l}) = C_{n_1-1,\dots,n_l-1}^{a_1,\dots\dots,a_l}$$

*Por lo tanto $\sigma$ es continua porque lleva abiertos básicos en abiertos y como $\sigma$ es invertible, entonces es un homeomorfismo.*

□

Ejercicio 3. *Probar las siguientes propiedades.*

(i) *$\sigma$ tiene puntos períodicos de todos los períodos.*
(ii) *$\sigma$ tiene puntos períodicos densos.*
(iii) *$\sigma$ es transitivo*
(iv) *$\sigma$ es topológicamente mixing. (i.e: $\forall \quad U, V$ abiertos $\exists\, M > 0$ tal que $\sigma^n(U) \bigcap V$)*

## 2. El shift de Bernoulli: punto de vista de la medida

Consideramos ahora en $\Sigma_2$ con la $\sigma$-álgebra de Borel el homeomorfismo $\sigma$ con la

Definición 2.1. *Sean $p_0$ y $p_1$ no negativos tales que $p_0 + p_1 = 1$ A $(p_0, p_1)$ le llamaremos vector de probabilidad. A $p_i$ se le llama probabilidad del símbolo i* $i = 0, 1$

Se tiene que como los cilindros son una base de la topología generan la $\sigma$ álgebra de Borel.

Proposición 2.2. $\mathcal{C}_{\prime} = \{C_{n_1,\dots,n_l}^{a_1,\dots,a_l} : a_i \in \{0,1\}, i \in \{1,\dots,l\}, l \in \mathbb{Z}\} \bigcup \{\emptyset\}$ *es una familia elemental.*

*Dem. Que el vacío este es trivial.*

*Para ver que es cerrada por intersecciones:*

$$C_{n_1,\dots,n_l}^{a_1,\dots,a_l} \bigcap C_{m_1,\dots,n_r}^{b_1,\dots,b_r}$$

*Si para todo $i, j$ se tiene que $n_i \neq m_j$ entonces esa intersección es igual a $C^{a_1,\dots,a_l,b_1,\dots,b_r}_{n_1,\dots,n_l,m_1,\dots,n_r}$. Si existen $i, j$ tales que $n_i = m_j$ entonces hay dos posibilidades, la primera es que $a_i \neq b_j$ y en este caso la intersecció daría vacío, si para todo $i$ y para todo $j$ tales que $a_i = b_j$ entonces la interseccin es igual a $C^{a_1,\dots,a_l,b_1,\dots,b_r}_{n_1,\dots,n_l,m_1,\dots,n_r}$.*

*Por último habría que probar que el complemento de un cilindro se puede escribir como unión finita disjunta de cilindros.* $\square$

Usando resultados del curso de analísis real se tiene que

$$\mathcal{A} = \{\biguplus_{i=1}^{i=n} C_i : C_i \text{ cilindro }, i \in \mathbb{Z}\} \text{ es un álgebra y genera a los borelianos.}$$

Entonces definiremos una premedida en esta álgebra y la extenderemos, via Caratheodory, a los borelianos.

Sea $\mu_0 : \mathbf{A} \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\mu(\emptyset) = 0$$
$$\mu(C^{a_1,\dots,a_l}_{n_1,\dots,n_l}) = \prod_{i=1}^{l} p_{a_i}$$

donde $p_{a_i}$ corresponde a la probabilidad del símbolo $i$.

$$\mu(\biguplus_{i=1}^{i=n} C_i) = \sum \mu(C_i)$$

$\mu$ es premedida y por lo tanto existe una unica extension en los borelianos de $\mu$ a una medida.

Es fácil ver que el shift es invariante en el álgebra de los cilindros, entonces es invariante en la $\sigma$ álgebra generada por estos.

Proposición 2.3. *El shift de Bernoulli es mixing*

*Dem.* Vamos a demostrar que para todo $A, B$ medibles se cumple que $lim_{n\to+\infty}\mu(\sigma^{-n}(A) \bigcap B) = \mu(A)\mu(B)$ Primero veremos que esta igualdad vale para los cilindros:

Dados $C^{a_1,\dots,a_l}_{n_1,\dots,n_l}$ y $C^{b_1,\dots,b_r}_{m_1,\dots,m_r}$, sea $n_0$ tal que $n_i < n+m_j$ para todo $i = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, r, \quad n \geq n_0$, entonces para esos n se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma^{-n}(C^{a_1,\dots,a_l}_{n_1,\dots,n_l}) \bigcap C^{b_1,\dots,b_r}_{m_1,\dots,m_r}) &= \mu(C^{a_1,\dots,a_l}_{n_1,\dots,n_l} \bigcap C^{b_1,\dots,b_r}_{m_1,\dots,m_r}) \\
&= \mu(C^{a_1,\dots,a_l,b_1,\dots,b_r}_{n_1,\dots,n_l,m_1,\dots,m_r}) \\
&= p_{a_1}\dots p_{a_l}p_{b_1}\dots p_{b_r} \\
&= \mu(C^{a_1,\dots,a_l}_{n_1,\dots,n_l})\mu(C^{b_1,\dots,b_r}_{m_1,\dots,m_r})
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Luego se cumple que $\lim_{n\to+\infty} \mu(\sigma^{-n}(C^{a_1,\dots,a_l}_{n_1,\dots,n_l}) \bigcap C^{b_1,\dots,b_r}_{m_1,\dots,m_r}) = \mu(C^{a_1,\dots,a_l}_{n_1,\dots,n_l})\mu(C^{b_1,\dots,b_r}_{m_1,\dots,m_r})$

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos medibles y $\varepsilon > 0$ existen $A_0$ y $B_0$ cilindros tales que $\mu(A\triangle A_0) < \varepsilon$, $\mu(B\triangle B_0) < \varepsilon$ Se tiene lo siguiente:
(2.2)

$$\begin{aligned}|\mu(\sigma^{-n}(A)\bigcap B)-\mu(A)\mu(B)| \leq{}& |\mu(\sigma^{-n}(A)\bigcap B) - \mu(\sigma^{-n}(A_0)\bigcap B_0)|+\\ &+ |\mu(\sigma^{-n}(A_0)\bigcap B_0) - \mu(A_0)\mu(B_0)| + |\mu(A_0)\mu(B_0) - \mu(A_0)\mu(B)|\\ &+ |\mu(A_0)\mu(B) - \mu(A)\mu(B)|\end{aligned}$$

El primer sumando de la derecha es menor que $2\varepsilon$ porque

(2.3)

$$\begin{aligned}|\mu(\sigma^{-n}(A)\bigcap B) - \mu(\sigma^{-n}(A_0)\bigcap B_0)| &\leq \mu((\sigma^{-n}(A)\bigcap B))\triangle(\sigma^{-n}(A_0)\bigcap B_0))\\ &\leq \mu((\sigma^{-n}(A)\triangle\sigma^{-n}(A_0))\bigcup(B\triangle B_0))\\ &\leq \mu(\sigma^{-n}(A\triangle A_0)) + \mu(B\triangle B_0) \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Se uso que $|\mu(A)-\mu(B)| \leq \mu(A\triangle B)$ y que $(A\bigcap B)\triangle(C\bigcap D) \subset (A\triangle C)\bigcup(B\triangle D)$.

El segundo es menor que $\varepsilon$ a partir de un cierto $n_0$ porque $A_0$ y $B_0$ son cilindros y claramente el tercero y el cuarto tambien son menores que $\varepsilon$. Como $\varepsilon$ es arbitrario se concluye que $\sigma$ es mixing. □

DEFINICIÓN 2.4. *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, (B), \nu)$ dos espacios de probabilidad $T : X \to X$ y $S : Y \to Y$ medibles preserva $\mu$ y $\nu$ respectivamente. Se dicen que $(T, \mu)$, $(S, \nu)$ son equivalentes como automorfismos de medida si existe una $H : X \to Y$ bimedible c.t.p (o sea medible y tal que existe $G : Y \to X$ medible tal que $G \circ H = id_X \quad \mu$ c.t.p y $H \circ G = id_Y \quad \nu$ c.t.p) y $H$ verifica que*

(i) *$\mu(H^{-1}(B)) = \nu(B)$ para todo $B$ medible en $Y$*
(ii) *$S \circ H = H \circ T$ $\mu$ c.t.p.*

Es fácil verificar que ser equivalentes como automorfismos de medida es una relación de equivalencia.

DEFINICIÓN 2.5. *Sea $T : X \to X$ un automorfismo de medida, $T$ se dice transformación de Bernoulli si es equivalente como automorfismo de medida a un shift de Bernoulli.*

EJERCICIO 4. *Demostrar que si $(T, \mu)$ y $(S, \nu)$ son equivalentes desde el punto de la medida entonces:*

(i) *$T$ es ergódica sii $S$ lo es.*
(ii) *$T$ es mixing sii $S$ lo es*

Luego usando el ejecicio tenemos que las transformaciones de Bernoulli son mixing.

Como ejemplos de shift de Bernoulli podemos mencionar el tent map visto anteriormente y la herradura de Smale que se verá más adelante.

## References


[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **54**

[M] R. Mañé, *Teoria ergódica*, Projeto Euclides, **14**, IMPA, Rio de Janeiro (1983)

[EC] E. Castigeras, *Teoria ergódica*, Notas sobre el curso, IMERL, Montevideo (1997)

[F] Folland, *Real Analysis* ()