Planos en el espacio

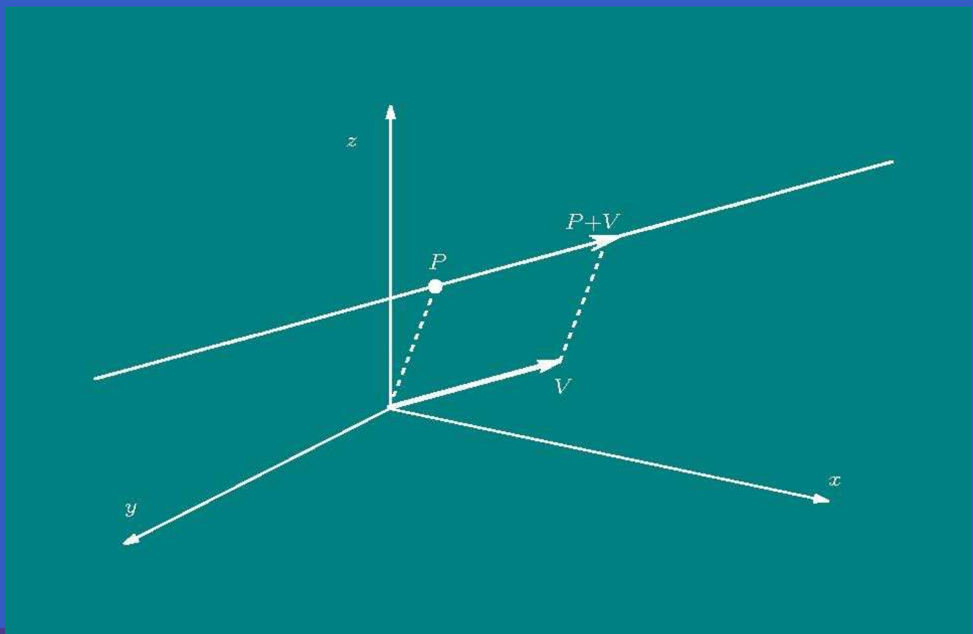
Intersecciones entre planos y rectas

Recta - definición (Clase pasada)

Dados P punto y $V \neq 0$ vector,

recta que pasa por P con dirección V:

$$r = \{P + \lambda V : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$



$P \rightarrow$ punto de paso de r

$V \rightarrow$ vector director de r

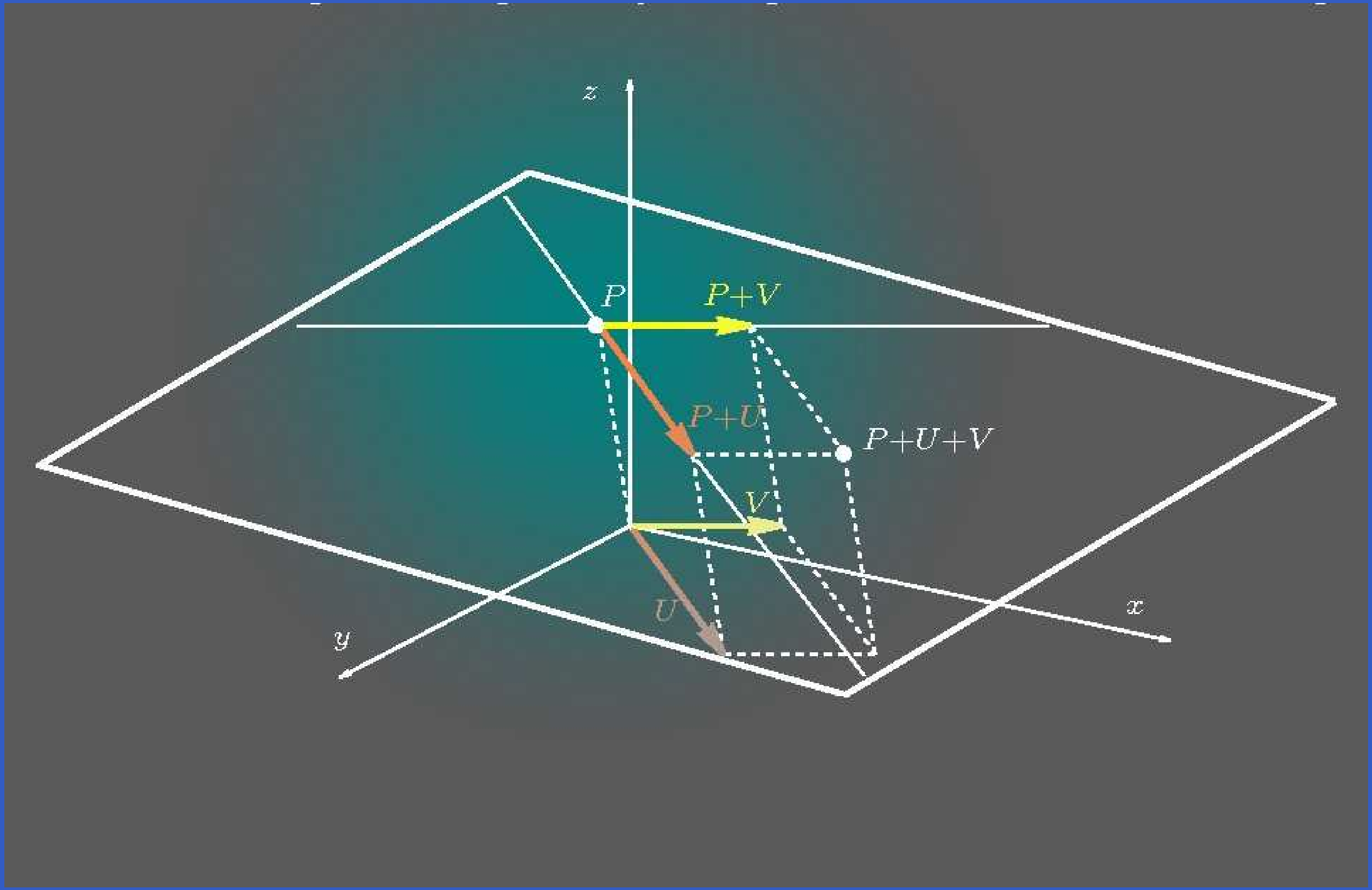
Recta - ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3 \end{cases}$$

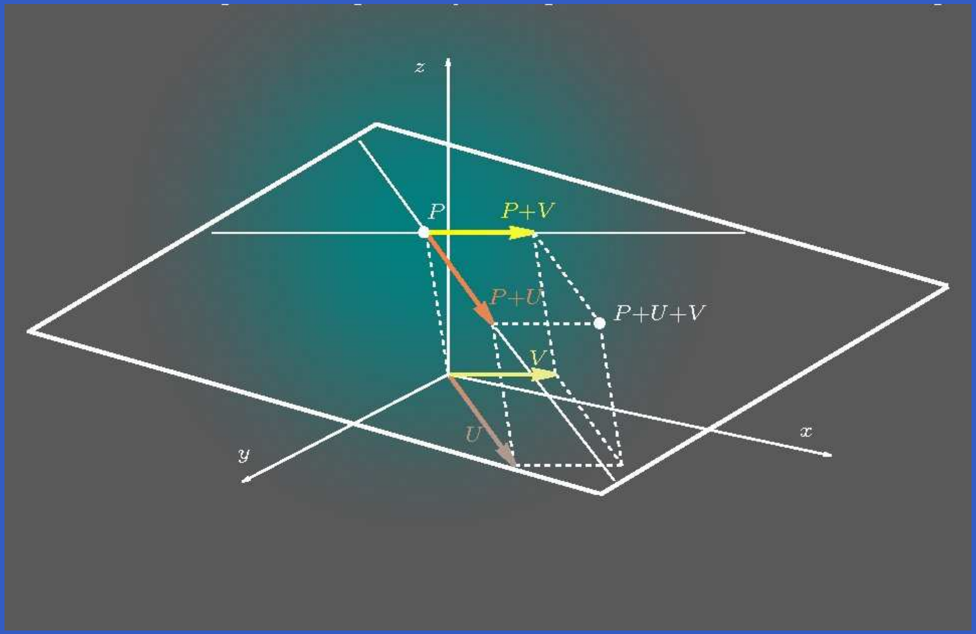
Ecuaciones reducidas de la recta

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \end{cases}$$

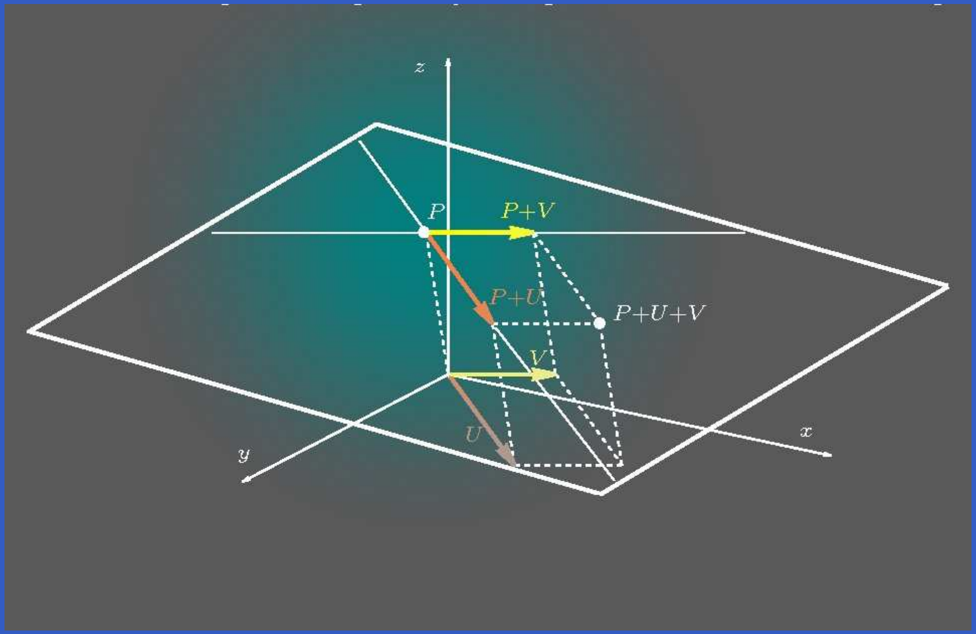
Planos



plano - definición

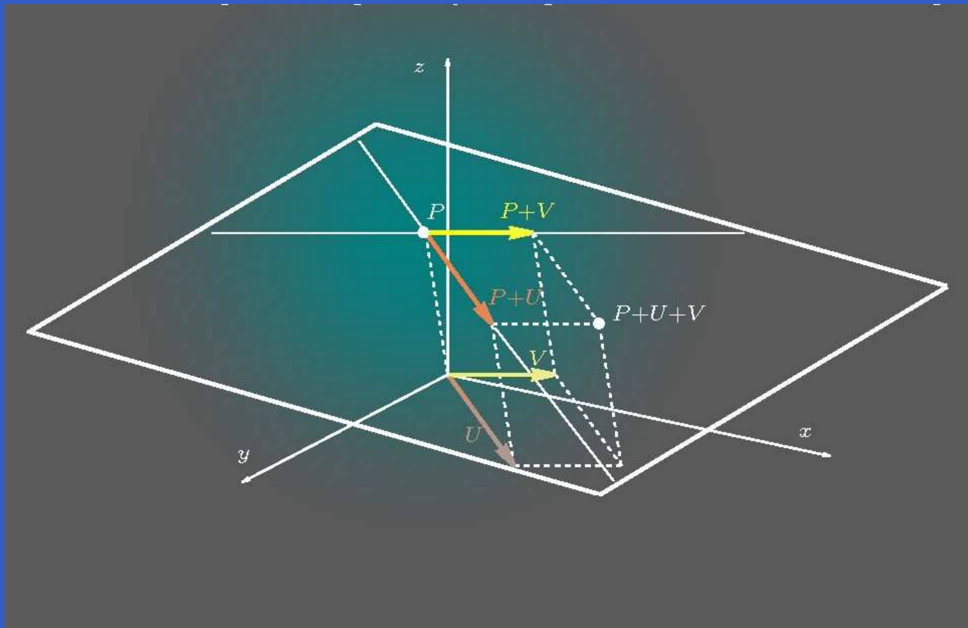


plano - definición



P punto

plano - definición

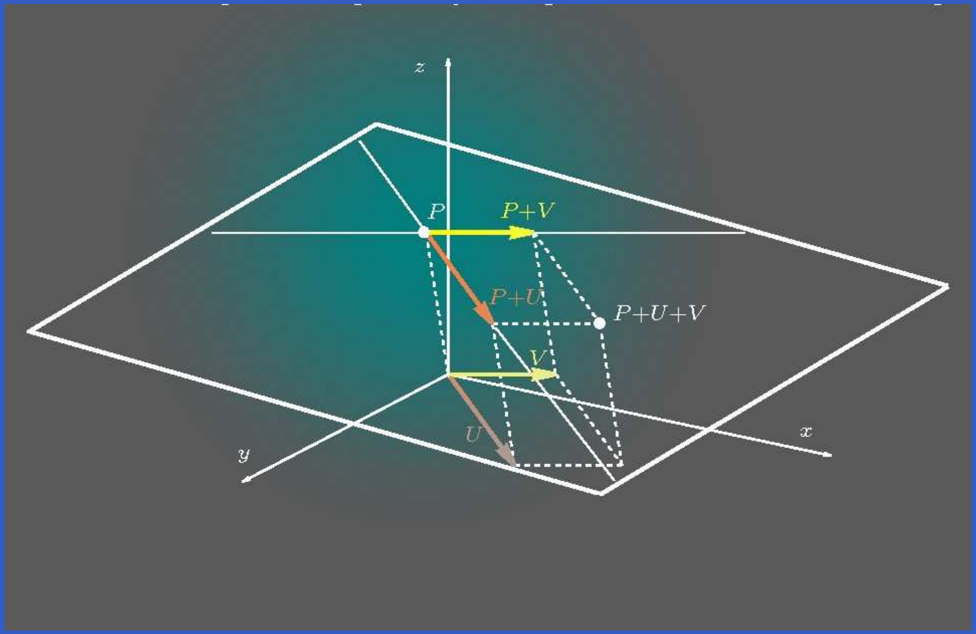


P punto

U y V vectores

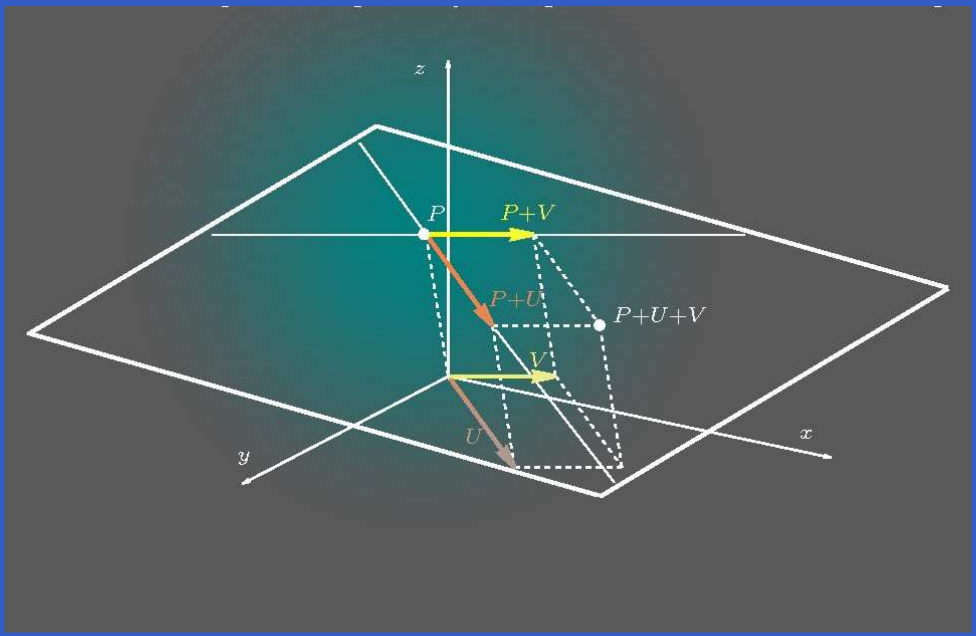
no colineales

plano - definición



P punto
U y V vectores
no colineales
se define el

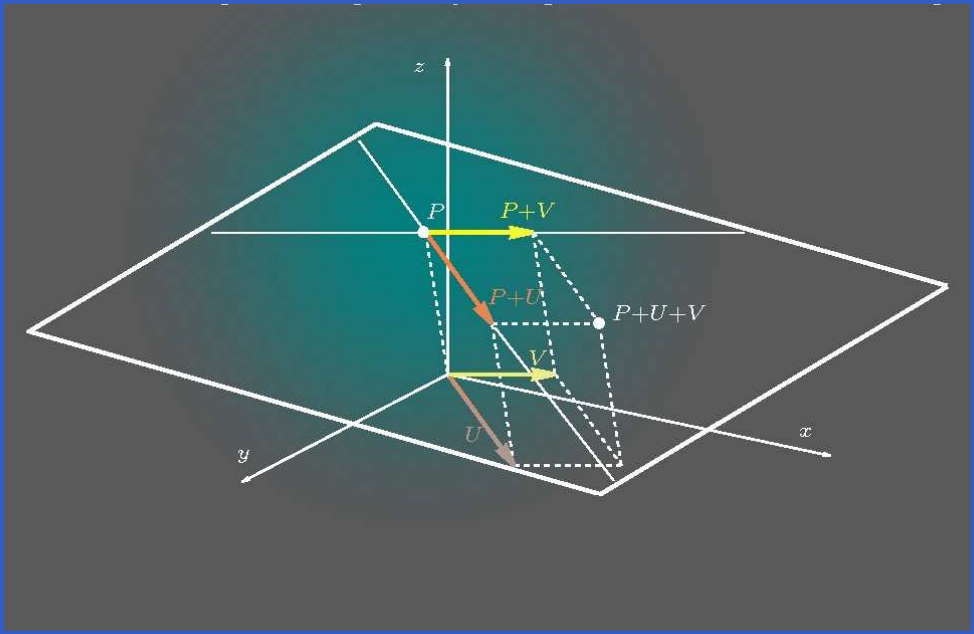
plano - definición



P punto
U y V vectores
no colineales
se define el

plano que pasa por P con dirección $||$ a U y V
como el conjunto:

plano - definición

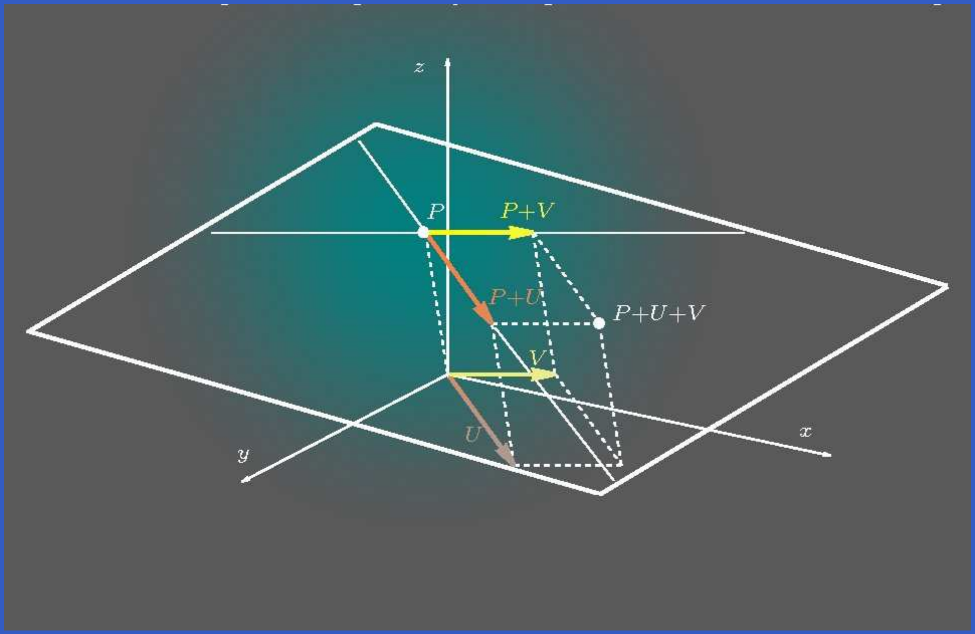


P punto
U y V vectores
no colineales
se define el

plano que pasa por P con dirección $||$ a U y V
como el conjunto:

$$\pi = \{P + \lambda U + \mu V : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

plano - definición



U y V vectores directores de π

plano - ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 & +\mu v_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 & +\mu v_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 & +\mu v_3 \end{cases}$$

plano - ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 & +\mu v_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 & +\mu v_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 & +\mu v_3 \end{cases}$$

donde

plano - ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = & x_0 & +\lambda u_1 & +\mu v_1 \\ y = & y_0 & +\lambda u_2 & +\mu v_2 \\ z = & z_0 & +\lambda u_3 & +\mu v_3 \end{cases}$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

El plano π que pasa por

$$P = (0, -1, 1)$$

con vectores directores

$$U = (1, -2, -1) \quad \text{y} \quad V = (-1, 3, 1)$$

Ejemplo

El plano π que pasa por

$$P = (0, -1, 1)$$

con vectores directores

$$U = (1, -2, -1) \quad \text{y} \quad V = (-1, 3, 1)$$

tiene ecuaciones paramétricas

Ejemplo

El plano π que pasa por

$$P = (0, -1, 1)$$

con vectores directores

$$U = (1, -2, -1) \quad \text{y} \quad V = (-1, 3, 1)$$

tiene ecuaciones paramétricas

$$(S) \begin{cases} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{cases}$$

Ejemplo

$$(S)\begin{cases} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{cases}$$

¿$Q = (1, -2, 0) \in \pi$?

Ejemplo

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrr} 1 = & & \lambda & -\mu \\ -2 = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ 0 = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array}\right.$$

¿$Q = (1, -2, 0) \in \pi$?

Ejemplo

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrr} 1 = & & \lambda & -\mu \\ -2 = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ 0 = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array}\right.$$

¿$Q = (1, -2, 0) \in \pi$?

sí, con $\lambda = 2$ y $\mu = 1$

Ejemplo

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrr} 1 = & & \lambda & -\mu \\ -2 = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ 0 = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array}\right.$$

¿$Q = (1, -2, 0) \in \pi$?

sí, con $\lambda = 2$ y $\mu = 1$

o sea $Q = P + 2\lambda U + V$

Ejemplo

$$(S)\begin{cases} 1 = & & \lambda & -\mu \\ -2 = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ 0 = & 1 & -\lambda & +\mu \end{cases}$$

en general,

$$Q = (x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (S) \text{es compatible}$$

Ejemplo 2

Analicemos qué condición tienen que cumplir (x, y, z) para que el sistema sea compatible

Ejemplo 2

Analicemos qué condición tienen que cumplir (x, y, z) para que el sistema sea compatible

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ -2 & 3 & y+1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2

Analicemos qué condición tienen que cumplir (x, y, z) para que el sistema sea compatible

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ -2 & 3 & y+1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array}\right)$$

buscamos las condiciones de compatibilidad, con λ y μ como únicas incógnitas.

Ejemplo 2

Analicemos qué condición tienen que cumplir (x, y, z) para que el sistema sea compatible

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ -2 & 3 & y+1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array}\right)$$

buscamos las condiciones de compatibilidad, con λ y μ como únicas incógnitas. Escalerizando, se obtiene

Ejemplo 2

Analicemos qué condición tienen que cumplir (x, y, z) para que el sistema sea compatible

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2x+y+1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array}\right)$$

buscamos las condiciones de compatibilidad, con λ y μ como únicas incógnitas. Escalerizando, se obtiene

Ejemplo 2

Analicemos qué condición tienen que cumplir (x, y, z) para que el sistema sea compatible

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2x+y+1 \\ 0 & 0 & x+z-1 \end{array}\right)$$

buscamos las condiciones de compatibilidad, con λ y μ como únicas incógnitas. Escalerizando, se obtiene

Ejemplo 2

Analicemos qué condición tienen que cumplir (x, y, z) para que el sistema sea compatible

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2x+y+1 \\ 0 & 0 & x+z-1 \end{array}\right)$$

buscamos las condiciones de compatibilidad, con λ y μ como únicas incógnitas. Escalerizando, se obtiene que la condición de compatibilidad es

$$\boxed{x + z = 1}$$

Ecuación reducida del plano

Toda ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ define un plano en $\mathbb{R}^3$.

Ecuación reducida del plano

Toda ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d$$

con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ define un plano en $\mathbb{R}^3$.

La ecuación presentada de esa forma se llama ecuación reducida del plano

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que
- ecuaciones paramétricas $\longrightarrow$ condiciones de compatibilidad $\longrightarrow$ ecuaciones reducidas

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que
- ecuaciones paramétricas $\longrightarrow$ condiciones de compatibilidad $\longrightarrow$ ecuaciones reducidas
- ahora queremos ver

Equivalencia de las 2 expresiones

- vimos que
- $\begin{array}{c}\text{ecuaciones}\\ \text{paramétricas}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{condiciones de}\\ \text{compatibilidad}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\text{ecuaciones}\\ \text{reducidas}\end{array}$
- ahora queremos ver
- $\begin{array}{c}\text{ecuaciones}\\ \text{reducidas}\end{array} \longrightarrow ? \longrightarrow \begin{array}{c}\text{ecuaciones}\\ \text{paramétricas}\end{array}$

Ejemplo 2

Sea π el plano definido por la ecuación

$$2x + 3y - z + 4 = 0$$

Ejemplo 2

Sea π el plano definido por la ecuación

$$2x + 3y - z + 4 = 0$$

queremos obtener un punto de paso y vectores directores.

Ejemplo 2

Sea π el plano definido por la ecuación

$$2x + 3y - z + 4 = 0$$

queremos obtener un punto de paso y vectores directores.
Despejando, por ejemplo, z

Ejemplo 2

Sea π el plano definido por la ecuación

$$2x + 3y + 4 = z$$

queremos obtener un punto de paso y vectores directores.

Ejemplo 2

Sea π el plano definido por la ecuación

$$2x + 3y + 4 = z$$

queremos obtener un punto de paso y vectores directores.
o sea,

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} x = & & \lambda & \\ y = & & & \mu \\ z = & 4 & +2\lambda & +3\mu \end{array} \right.$$

Ejemplo 2

Sea π el plano definido por la ecuación

$$2x + 3y + 4 = z$$

$$\begin{cases} x = & & \lambda & \\ y = & & & \mu \\ z = & 4 & +2\lambda & +3\mu \end{cases}$$

con lo cual

$P = (0, 0, 4)$ punto de paso

$U = (1, 0, 2)$ y $V = (0, 1, 3)$ vectores directores

Ejemplo 3

¿Qué pasa con el plano

$$\pi) x = 0?$$

Ejemplo 3

¿Qué pasa con el plano

$$\pi) x = 0?$$

En ese caso, tenemos

Ejemplo 3

¿Qué pasa con el plano

$$\pi) x = 0?$$

En ese caso, tenemos

$$\begin{cases} x = & 0 \\ y = & \quad y \\ z = & \qquad z \end{cases}$$

Ejemplo 3

¿Qué pasa con el plano

$$\pi) x = 0?$$

En ese caso, tenemos

$$\begin{cases} x = & 0 \\ y = & \quad \lambda \\ z = & \qquad \mu \end{cases}$$

Ejemplo 3

¿Qué pasa con el plano

$$\pi) x = 0?$$

En ese caso, tenemos

$$\begin{cases} x = & 0 \\ y = & \quad \lambda \\ z = & \qquad \mu \end{cases}$$

con lo cual $P = (0, 0, 0)$ punto de paso

Ejemplo 3

¿Qué pasa con el plano

$$\pi) x = 0?$$

En ese caso, tenemos

$$\begin{cases} x = & 0 \\ y = & \quad\lambda \\ z = & \qquad\mu \end{cases}$$

con lo cual $P = (0,0,0)$ punto de paso
$U = (0,1,0)$ y $V = (0,0,1)$ vectores directores

Observación 1 - el plano como conjunto solución

- Todo plano π es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Observación 1 - el plano como conjunto solución

- Todo plano π es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- siempre tiene 2 grados de libertad:

Observación 1 - el plano como conjunto solución

- Todo plano π es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- siempre tiene 2 grados de libertad:
- en el caso de las ecuaciones paramétricas es un sistema
  - de 3 ecuaciones
  - con 5 incógnitas
  - de rango 3

Observación 1 - el plano como conjunto solución

- Todo plano π es el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- siempre tiene 2 grados de libertad:
- en el caso de la ecuación reducida es un sistema
  - de 1 ecuación
  - con 3 incógnitas
  - de rango 1

Observación 1 - el plano como conjunto solución

Como todo conjunto solución, π cumple

$$\mathcal{S}ol = X_P + \mathcal{S}ol_H$$

donde X_P solución particular, y $\mathcal{S}ol_H$.

Observación 1 - el plano como conjunto solución

Como todo conjunto solución, π cumple

$$\pi = P + \pi_H$$

donde P punto de paso, π_H subespacio generado por los vectores U y V

Observación 2

La ecuación reducida de la recta:

$$r)\left\{\begin{array}{ll} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \end{array}\right.$$

Observación 2

La ecuación reducida de la recta:

$$r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \end{cases}$$

muestra que r es intersección de los 2 planos

Observación 2

La ecuación reducida de la recta:

$$r)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \end{cases}$$

muestra que r es intersección de los 2 planos

$$\pi_1)a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

Observación 2

La ecuación reducida de la recta:

$$r)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2 \end{cases}$$

muestra que r es intersección de los 2 planos

$$\pi_1)a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

y

$$\pi_2)a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

Observación 2

La ecuación reducida de la recta:

$$r)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z & = d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & = d_2 \end{cases}$$

muestra que r es intersección de los 2 planos

$$\pi_1)a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

y

$$\pi_2)a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

recordar también que podría ocurrir que dicha $\cap$ fuese $\emptyset$ o bien todo $\pi_2=\pi_2$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

1)veamos que $\exists\, \pi$ que contiene a P, Q, R:

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

1)veamos que $\exists\, \pi$ que contiene a P, Q, R:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

1)veamos que $\exists\, \pi$ que contiene a P, Q, R:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

cumple

$X = P$ para $\lambda = \mu = 0$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

1)veamos que $\exists\, \pi$ que contiene a P, Q, R:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

cumple

$X = Q$ para $\lambda = 1$, $\mu = 0$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

1)veamos que $\exists\, \pi$ que contiene a P, Q, R:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

cumple

$X = R$ para $\lambda = 0$, $\mu = 1$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

2)veamos que π es el único que contiene a P, Q y R:

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

cualquier plano π' pasando por P, Q, R se puede escribir como:

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

$$\pi') X = P + \gamma U + \eta V$$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

$$\pi') X = P + \gamma U + \eta V$$

Ahora,

$$Q \in \pi' \Rightarrow Q - P = \gamma_1 U + \eta_1 V$$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

$$\pi') X = P + \gamma U + \eta V$$

Ahora,

$$Q \in \pi' \Rightarrow Q - P = \gamma_1 U + \eta_1 V$$

$$R \in \pi' \Rightarrow R - P = \gamma_2 U + \eta_2 V$$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

$$\pi') X = P + \gamma U + \eta V$$

Ahora,

$$Q \in \pi' \Rightarrow Q - P = \gamma_1 U + \eta_1 V$$

$$R \in \pi' \Rightarrow R - P = \gamma_2 U + \eta_2 V$$

$\therefore (Q - P)$ y $(R - P)$ son C.L.(U, V),

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

$$\pi') X = P + \gamma U + \eta V$$

$\therefore (Q - P)$ y $(R - P)$ son C.L.(U, V),

como $(Q - P)$ y $(R - P)$ son L.I., generan un plano $\pi_H = \pi'_H$

Observación 3

3 puntos no alineados P, Q, R determinan un único plano:

$$\pi) X = P + \lambda(Q - P) + \mu(R - P)$$

$$\pi') X = P + \gamma U + \eta V$$

$\therefore (Q - P)$ y $(R - P)$ son C.L.(U, V),

como $(Q - P)$ y $(R - P)$ son L.I., generan un plano $\pi_H = \pi'_H$

y por tanto $\pi = \pi'$

Intersecciones

Ejemplo 1

r (ec. reducida)

Ejemplo 1

r (ec. reducida)

$$r)\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y & -z & =1 \\ 2x & -y & +z & =0 \end{array}\right.$$

Ejemplo 1

r (ec. reducida) $\cap r'$ (ec. paramétrica)

$$r)\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =1 \\ 2x & -y & +z & =0 \end{array}\right. \qquad r')\left\{\begin{array}{rlrr} x = & 1 & +4\mu \\ y = & & -\mu \\ z = & & 3\mu \end{array}\right.$$

Ejemplo 1

r (ec. reducida) $\cap r'$ (ec. paramétrica)

$$r) \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = 0 \end{array} \right. \qquad r') \left\{ \begin{array}{rlr} x = & 1 & +4\mu \\ y = & & -\mu \\ z = & & 3\mu \end{array} \right.$$

basta ver cuáles puntos $(1+4\mu, -\mu, 3\mu) \in r$,

Ejemplo 1

r (ec. reducida) $\cap r'$ (ec. paramétrica)

$$r) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad r') \begin{cases} x = 1 + 4\mu \\ y = -\mu \\ z = 3\mu \end{cases}$$

basta ver cuáles puntos $(1 + 4\mu, -\mu, 3\mu) \in r$, o sea para cuáles μ se cumple:

Ejemplo 1

r (ec. reducida) $\cap r'$ (ec. paramétrica)

$$r) \begin{cases} x & +y & -z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = 0 \end{cases} \qquad r') \begin{cases} x = & 1 & +4\mu \\ y = & & -\mu \\ z = & & 3\mu \end{cases}$$

basta ver cuáles puntos $(1+4\mu, -\mu, 3\mu) \in r$, o sea para cuáles μ se cumple:

$$\begin{cases} (1+4\mu) & -\mu & -3\mu & = 1 \\ 2(1+4\mu) & +\mu & +3\mu & = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

r (ec. reducida) $\cap r'$ (ec. paramétrica)

$$r)\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & =1 \\ 2x & -y & +z & =0 \end{array}\right. \qquad r')\left\{\begin{array}{rlrr} x = & 1 & +4\mu \\ y = & & -\mu \\ z = & & 3\mu \end{array}\right.$$

basta ver cuáles puntos $(1+4\mu, -\mu, 3\mu) \in r$, o sea para cuáles μ se cumple:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (1+4\mu) & -\mu & -3\mu & =1 \\ 2(1+4\mu) & +\mu & +3\mu & =0 \end{array}\right. \rightarrow \mu = -1/6$$

Ejemplo 1

r (ec. reducida) $\cap r'$ (ec. paramétrica)

$$r)\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y & -z & =1 \\ 2x & -y & +z & =0 \end{array}\right. \qquad r')\left\{\begin{array}{rrrr} x= & 1 & +4\mu \\ y= & & -\mu \\ z= & & 3\mu \end{array}\right.$$

basta ver cuáles puntos $(1+4\mu, -\mu, 3\mu) \in r$, o sea

$$\Rightarrow r \cap r' = (1/3, 1/6, -1/2)$$

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi) \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array} \right. \qquad \pi') \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{array} \right.$$

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi) \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array} \right. \qquad \pi') \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{array} \right.$$

Escalerizando se obtiene:

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi) \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array} \right. \qquad \pi') \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{array} \right.$$

Escalerizando se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ -2 & 3 & y+1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+1 \\ 1 & 2 & y-1 \\ 2 & -1 & z \end{array} \right)$$

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi)\left\{\begin{array}{rrrr} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array}\right. \qquad \pi')\left\{\begin{array}{rrrr} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{array}\right.$$

Escalerizando se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2x+y+1 \\ -1 & 1 & z-1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & -x+y-2 \\ 2 & -1 & z \end{array}\right)$$

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi) \begin{cases} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{cases} \qquad \pi') \begin{cases} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{cases}$$

Escalerizando se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2x+y+1 \\ 0 & 0 & x+z-1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & -x+y-2 \\ 0 & -3 & -2x+z-2 \end{array}\right)$$

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi) \left\{ \begin{array}{lrrr} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array} \right. \qquad \pi') \left\{ \begin{array}{lrrr} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{array} \right.$$

Escalerizando se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 2x+y+1 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{x+z-1} \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x+1 \\ 0 & 1 & -x+y-2 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{-5x+3y+z-8} \end{array} \right)$$

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi) \begin{cases} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{cases} \qquad \pi') \begin{cases} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{cases}$$

Escalerizando se obtiene:

$$\begin{cases} x & & +z & = 1 \\ -5x & +3y & +z & = 8 \end{cases}$$

Ejemplo 2

$\pi \cap \pi'$ - ecuaciones paramétricas

$$\pi) \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & & \lambda & -\mu \\ y = & -1 & -2\lambda & +3\mu \\ z = & 1 & -\lambda & +\mu \end{array} \right. \qquad \pi') \left\{ \begin{array}{rrrr} x = & -1 & +\alpha & +\beta \\ y = & 1 & +\alpha & +2\beta \\ z = & & 2\lambda & -\mu \end{array} \right.$$

Escalerizando se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x & & +z & = 1 \\ -5x & +3y & +z & = 8 \end{array} \right.$$

esta es ya la ecuación de la recta intersección.