Posiciones relativas de rectas & planos

Paralelismo

Ortogonalidad

Proyecciones

Distancia entre rectas

Rectas paralelas - definición

Dos rectas r_1 y r_2 son paralelas si sus vectores directores son paralelos.

Rectas paralelas - definición

Dos rectas r_1 y r_2 son paralelas si sus vectores directores son paralelos.

Se denota

$$r_1 || r_2$$

Posiciones relativas de rectas

- se cortan

Posiciones relativas de rectas

- se cortan

- no se cortan

Posiciones relativas de rectas

- se cortan
  - son $\|$
- no se cortan
  - son $\|$

Posiciones relativas de rectas

- se cortan
  - son $\parallel$
  - no son $\parallel$
- no se cortan
  - son $\parallel$
  - no son $\parallel$

Posiciones relativas de rectas

- se cortan
  - son $||$ $\longrightarrow$ son $=$
  - no son $||$
- no se cortan
  - son $||$
  - no son $||$ $\longrightarrow$ se cruzan

Planos paralelos

Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

Planos paralelos

Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

Se denota

$$\pi_1 || \pi_2$$

Perpendicularidad entre rectas

Dos r_1 y r_2 son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

Perpendicularidad entre rectas

Dos r_1 y r_2 son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

Se denota

$$r_1 \perp r_2$$

Proyecciones sobre un plano - Caso 1

Sea

$$\pi_0) X \cdot N = 0$$

un plano que pasa por $(0,0,0)$.

Proyecciones sobre un plano - Caso 1

Sea

$$\pi_0) X \cdot N = 0 \quad |N| = 1$$

un plano que pasa por $(0, 0, 0)$.

Proyecciones sobre un plano - Caso 1

Sea

$$\pi_0) X \cdot N = 0$$

un plano que pasa por $(0,0,0)$. Sea $Y \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera.

Proyecciones sobre un plano - Caso 1

Sea

$$\pi_0) X \cdot N = 0$$

un plano que pasa por $(0, 0, 0)$. Sea $Y \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Buscamos la proyección de Y

sobre π_0:

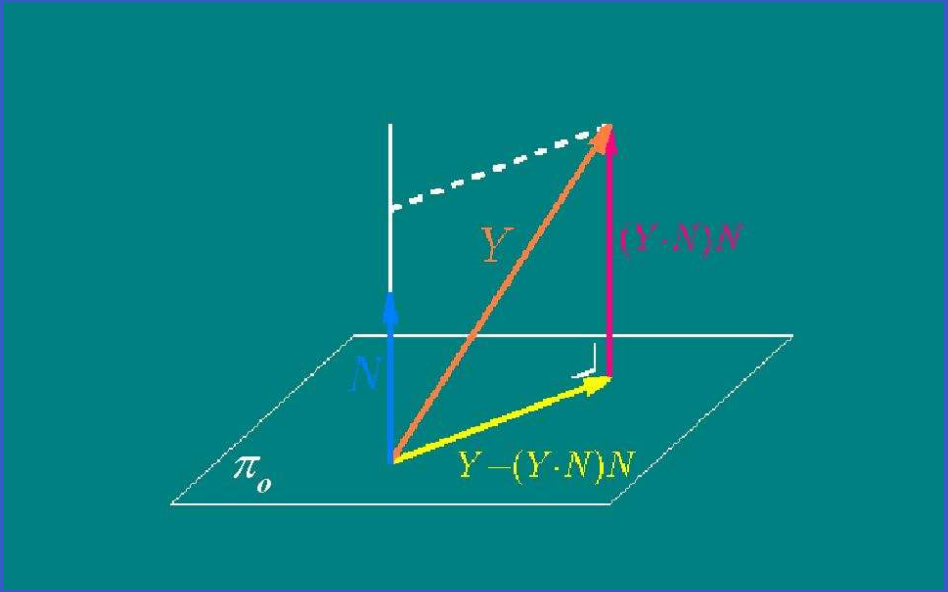
Proyecciones sobre un plano - Caso 1

Sea

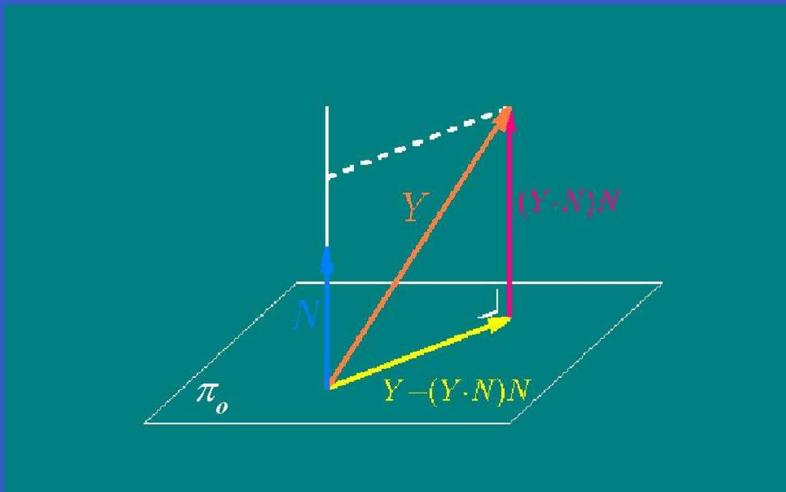
$$\pi_0) X \cdot N = 0$$

un plano que pasa por $(0,0,0)$. Sea $Y \in \mathbb{R}^3$ un vector cualquiera. Buscamos la proyección de Y

sobre π_0:



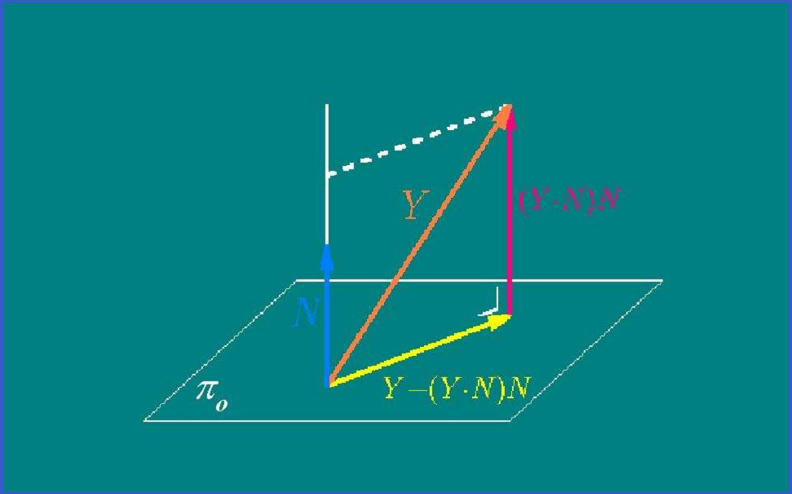
Proyecciones sobre un plano - Caso 1



Podemos descomponer a Y en

- $(Y \cdot N)N$
  (componente $\perp \pi_0$)

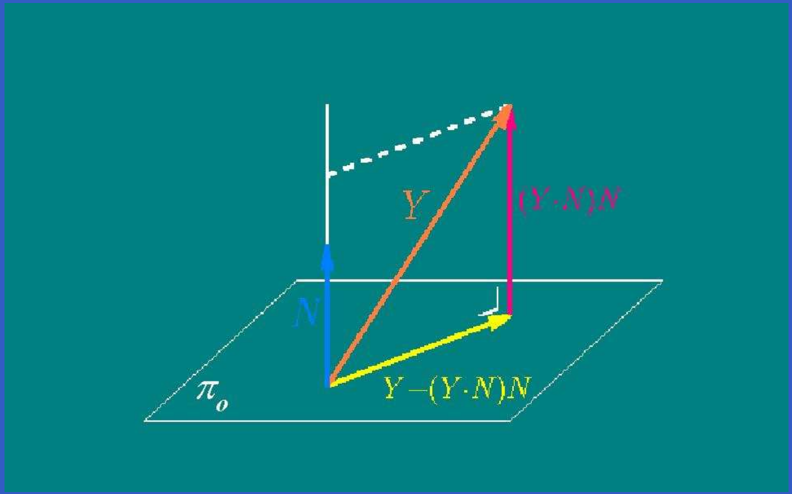
Proyecciones sobre un plano - Caso 1



Podemos descomponer a Y en

- $(Y \cdot N)N$
  (componente $\perp \pi_0$)
- $Y - (Y \cdot N)N$
  (componente $|| \pi_0$)

Proyecciones sobre un plano - Caso 1

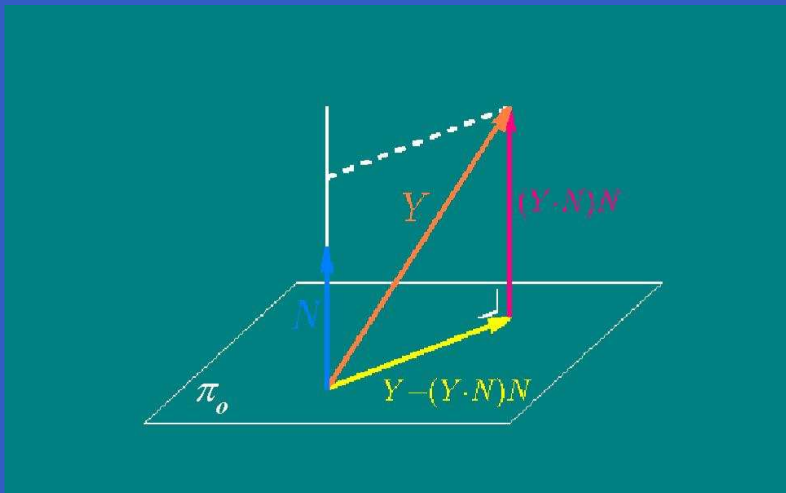


Podemos descomponer a Y en

- $(Y \cdot N)N$
  (componente $\perp \pi_0$)
- $Y - (Y \cdot N)N$
  (componente $|| \pi_0$)

$$Y = (Y \cdot N)N + Y - (Y \cdot N)N$$

Proyecciones sobre un plano - Caso 1

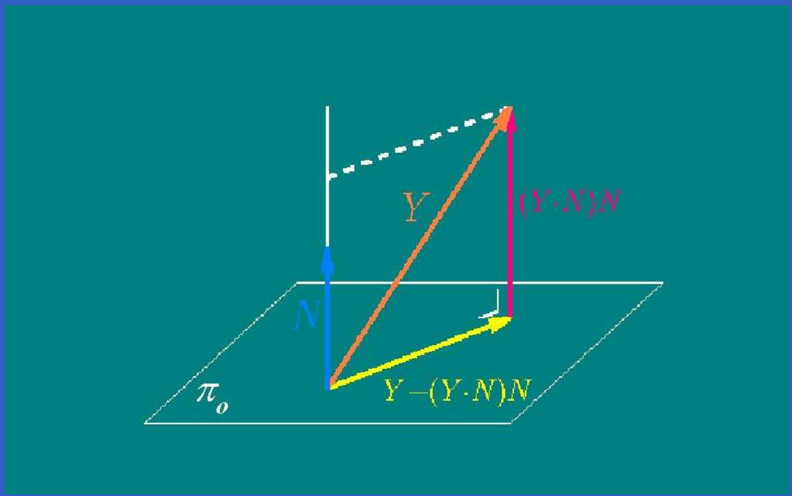


Podemos descomponer a Y en

- $(Y \cdot N)N$ (componente $\perp \pi_0$)
- $Y - (Y \cdot N)N$ (componente $|| \pi_0$)

$$Y = \ (Y \cdot N)N + \ Y - (Y \cdot N)N$$
$$Y = \ (Y \cdot N)N + \ P_{\pi_0}Y$$

Proyecciones sobre un plano - Caso 1



Podemos descomponer a Y en

- $(Y \cdot N)N$ (componente $\perp \pi_0$)
- $Y - (Y \cdot N)N$ (componente $|| \pi_0$)

$$Y = (Y \cdot N)N + \; Y - (Y \cdot N)N$$
$$Y = (Y \cdot N)N + \; P_{\pi_0} Y$$

P_{π_0} es la proyección ortogonal de Y sobre π_0

Observación 1

$$P_{\pi_0} Y \perp N:$$

Observación 1

$$P_{\pi_0} Y \perp N :$$

$$[Y - (Y \cdot N)N] \cdot N =$$

Observación 1

$$P_{\pi_0} Y \perp N :$$

$$[Y - (Y \cdot N)N] \cdot N = (Y \cdot N) - (Y \cdot N)(N \cdot N)$$

Observación 1

$$P_{\pi_0} Y \perp N :$$

$$[Y - (Y \cdot N)N] \cdot N = (Y \cdot N) - (Y \cdot N)1$$

Observación 1

$$P_{\pi_0} Y \perp N :$$

$$[Y - (Y \cdot N)N] \cdot N = 0$$

Observación 1

$$P_{\pi_0} Y \perp N :$$

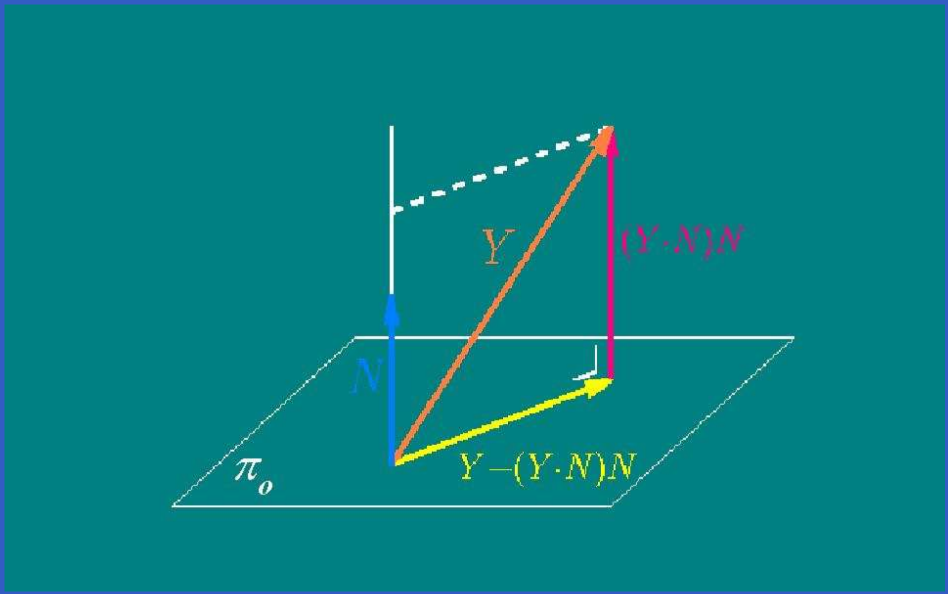
$$[Y - (Y \cdot N)N] \cdot N = 0$$

$\therefore P_{\pi_0} Y \perp N$

y por lo tanto $P_{\pi_0} Y \in \pi_0$

Observación 2

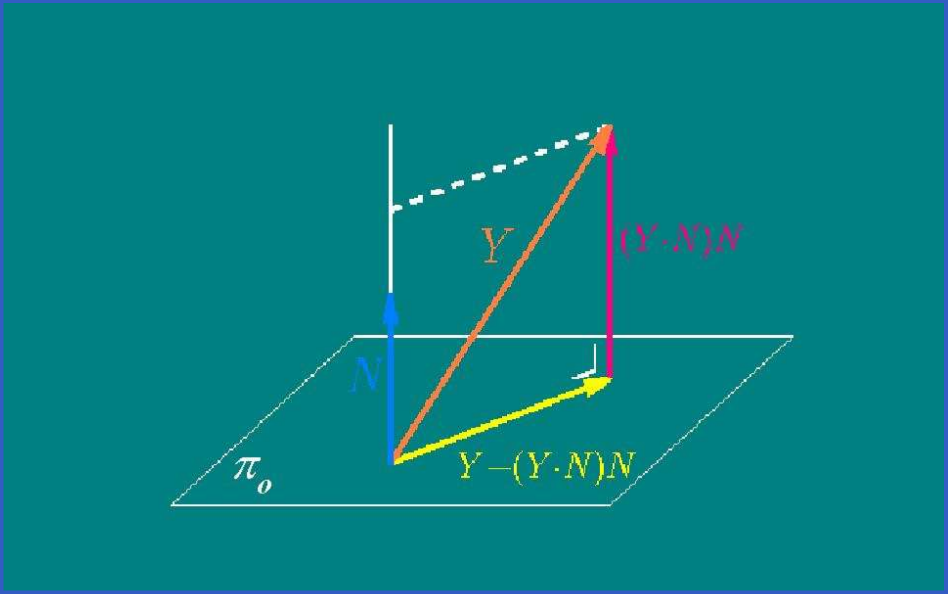
$P_{\pi_0} Y$ es el vector de π_0 más proximo a Y



Observación 2

$P_{\pi_0}Y$ es el vector de π_0 más proximo a Y

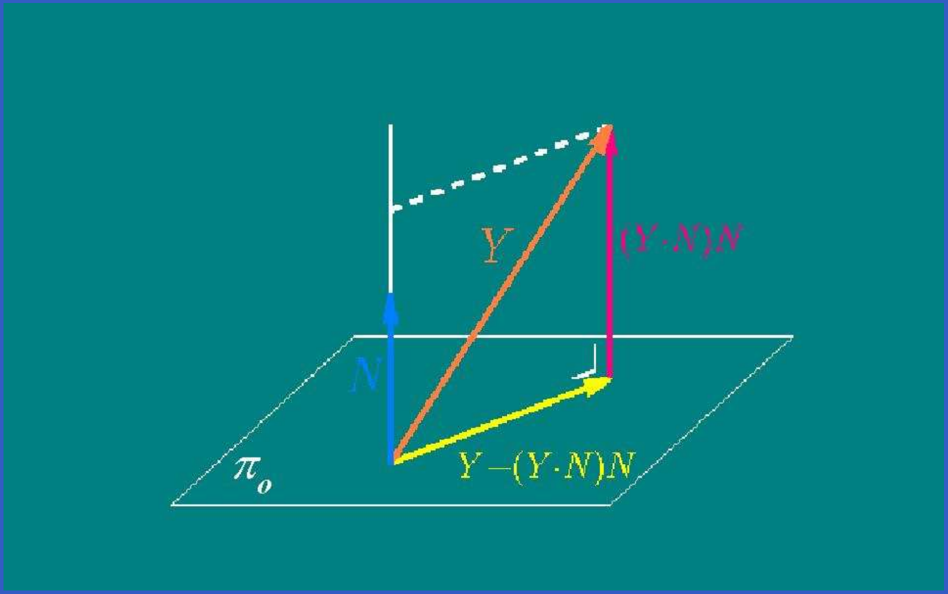
$$d(Y, \pi_0) = d(Y, P_{\pi_0}Y)$$



Observación 2

$P_{\pi_0}Y$ es el vector de π_0 más proximo a Y

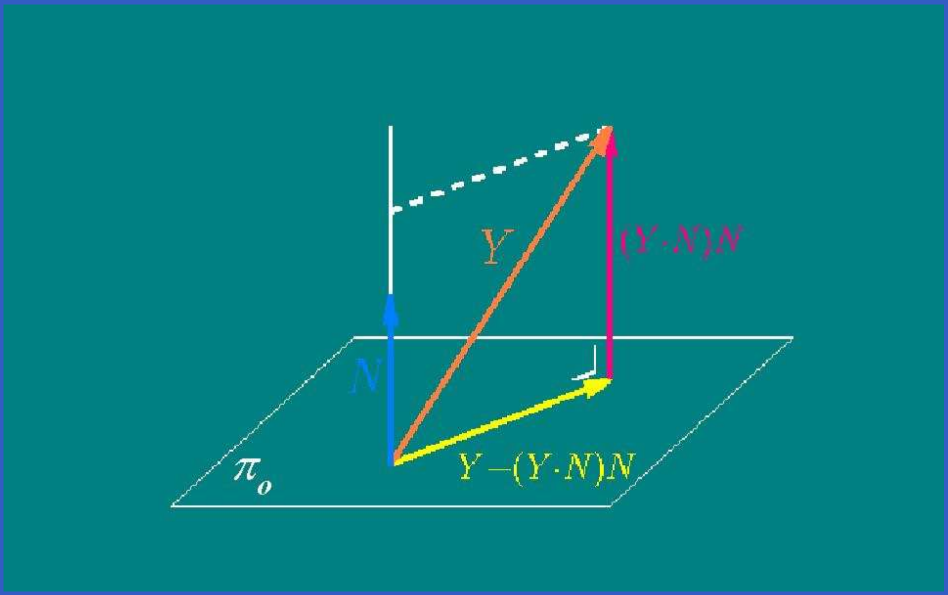
$$d(Y,\pi_0) = d(Y, P_{\pi_0}Y) = |Y - P_{\pi_0}Y|$$



Observación 2

$P_{\pi_0}Y$ es el vector de π_0 más proximo a Y

$$d(Y,\pi_0) = d(Y, P_{\pi_0}Y) = |Y - P_{\pi_0}Y| = |Y \cdot N|$$



Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0$$

y el punto $Y = (1, -2, 1)$,

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1)$$

y hallemos la distancia $d(Y, \pi_0)$ y el punto $P_{\pi_0} Y$

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1)$$

un versor normal a π_0 es:

$$N = \frac{(1, 1, -2)}{\sqrt{6}}$$

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1) \; N = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

Entonces

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1) \; N = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

Entonces

$$P_{\pi_0} Y = Y - (Y \cdot N) N =$$

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1) \ N = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces

$$P_{\pi_0} Y = Y - \left[(1, -2, 1) \cdot \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right)\right] \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}\right) =$$

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1) \; N = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

Entonces

$$P_{\pi_0} Y = Y + \frac{3}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1) \ N = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces

$$P_{\pi_0} Y = (1, -2, 1) + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -1)$$

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1) \; N = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Entonces

$$P_{\pi_0} Y = (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)$$

Ejemplo

Consideremos el plano

$$\pi_0) x + y - 2z = 0 \quad Y = (1, -2, 1) \; N = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

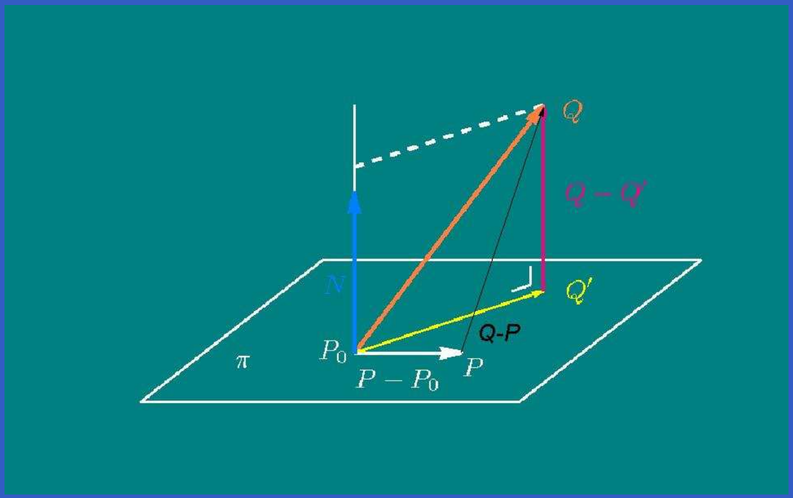
Entonces

$$P_{\pi_0} Y = (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0)$$

Por otra parte

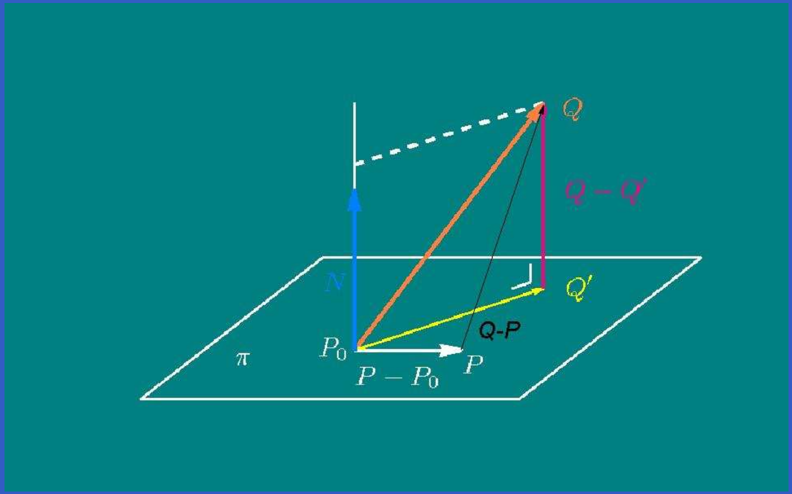
$$d(Y, \pi_0) = |Y \cdot N| = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Proyección sobre un plano cualquiera



Sean $\pi)(X - P_0) \cdot N = 0$

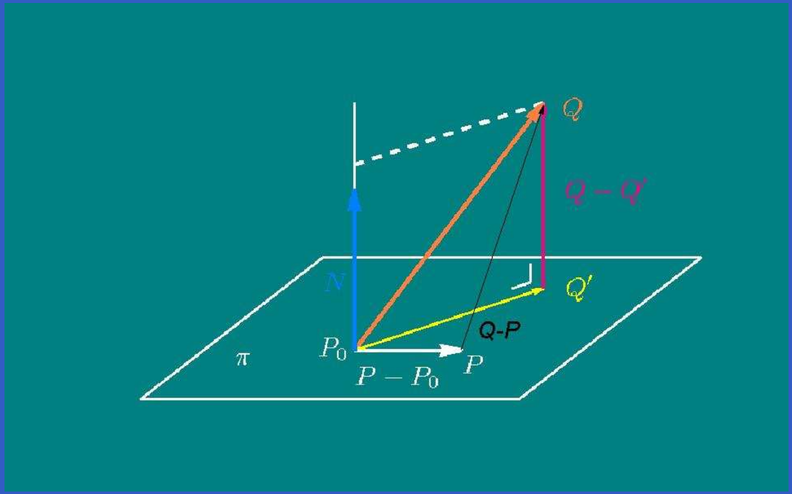
Proyección sobre un plano cualquiera



Sean $\pi) (X - P_0) \cdot N = 0$

y $Q \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera

Proyección sobre un plano cualquiera

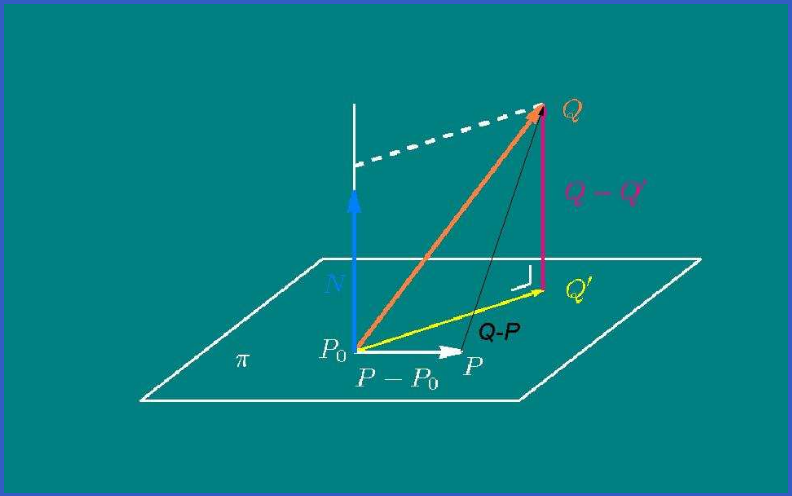


Sean $\pi)(X - P_0) \cdot N = 0$

$$\pi = P_0 + \pi_0$$

y $Q \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera

Proyección sobre un plano cualquiera



Sean $\pi) (X - P_0) \cdot N = 0$

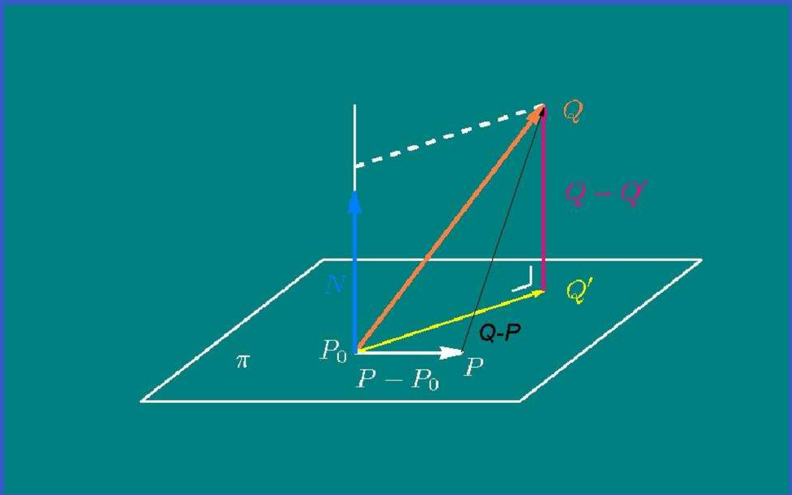
$$\pi = P_0 + \pi_0$$

y $Q \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera

Llamando $Y = Q - P_0$, tenemos

$$Y = (Y \cdot N)N + P_{\pi_0} Y$$

Proyección sobre un plano cualquiera



Sean $\pi)(X - P_0) \cdot N = 0$

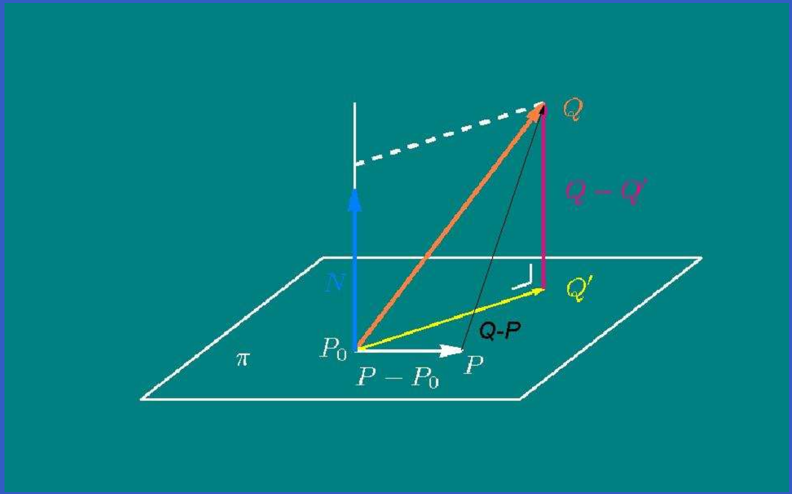
$$\pi = P_0 + \pi_0$$

y $Q \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera

Llamando $Y = Q - P_0$, tenemos

$$Y + P_0 = (Y \cdot N)N + P_{\pi_0}Y + P_0$$

Proyección sobre un plano cualquiera



Sean $\pi)(X - P_0) \cdot N = 0$

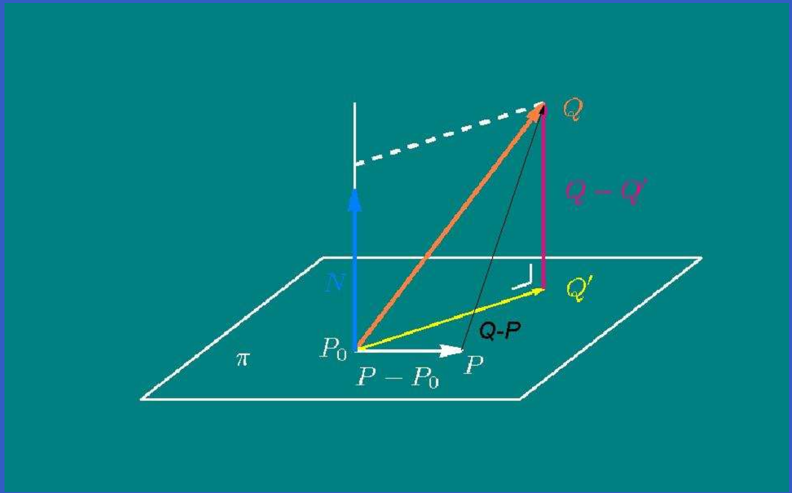
$$\pi = P_0 + \pi_0$$

y $Q \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera

Llamando $Y = Q - P_0$, tenemos

$$Q = (Y \cdot N)N + P_\pi Q$$

Proyección sobre un plano cualquiera



Sean $\pi)(X - P_0) \cdot N = 0$

$$\pi = P_0 + \pi_0$$

y $Q \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera

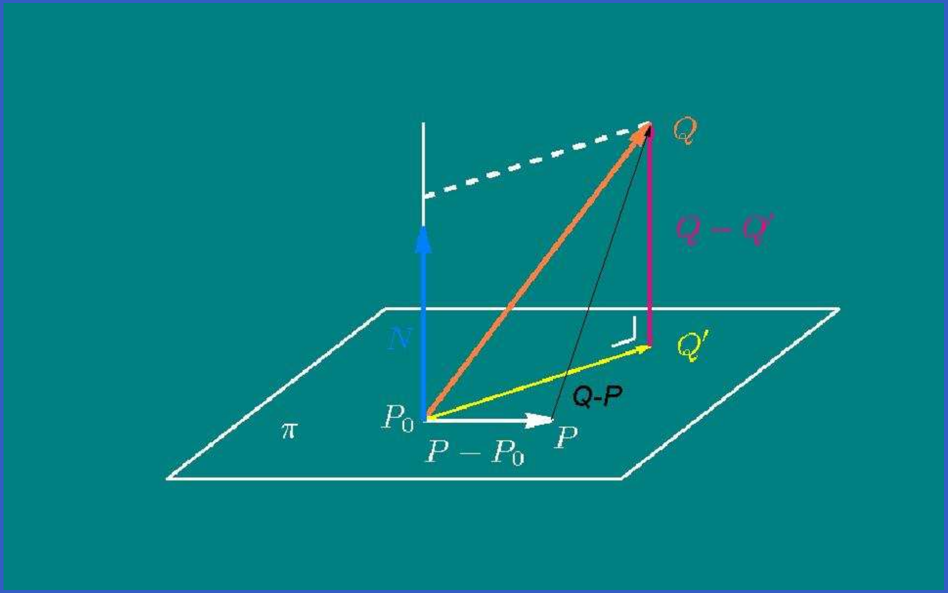
Llamando $Y = Q - P_0$, tenemos

$$Q = (Y \cdot N)N + P_\pi Q$$

$P_\pi Q$ es la proyeccioón de Q sobre el plano π

Distancia de un punto a un plano

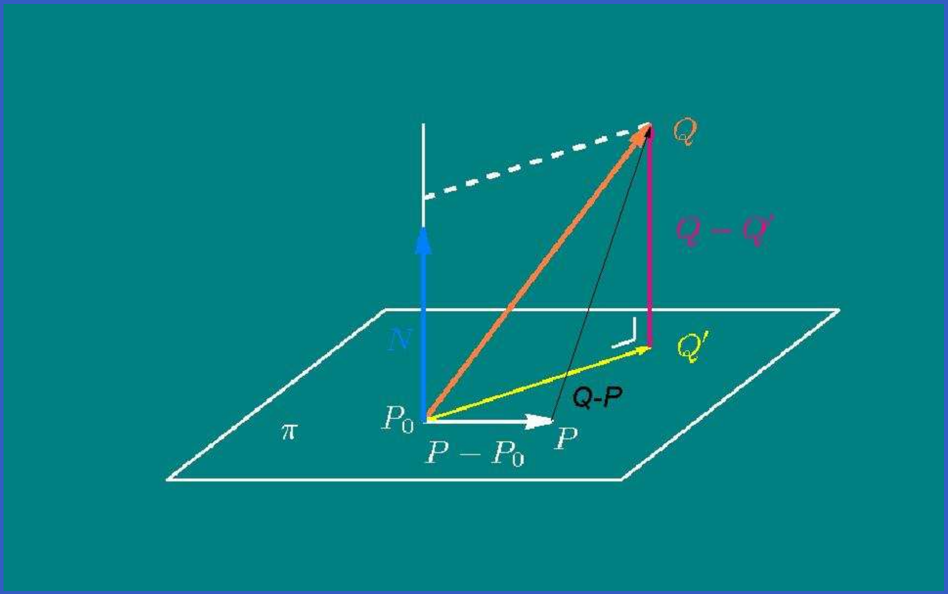
$P_\pi Q$ es el punto de π más cercano a Q.



Distancia de un punto a un plano

$P_\pi Q$ es el punto de π más cercano a Q. Además

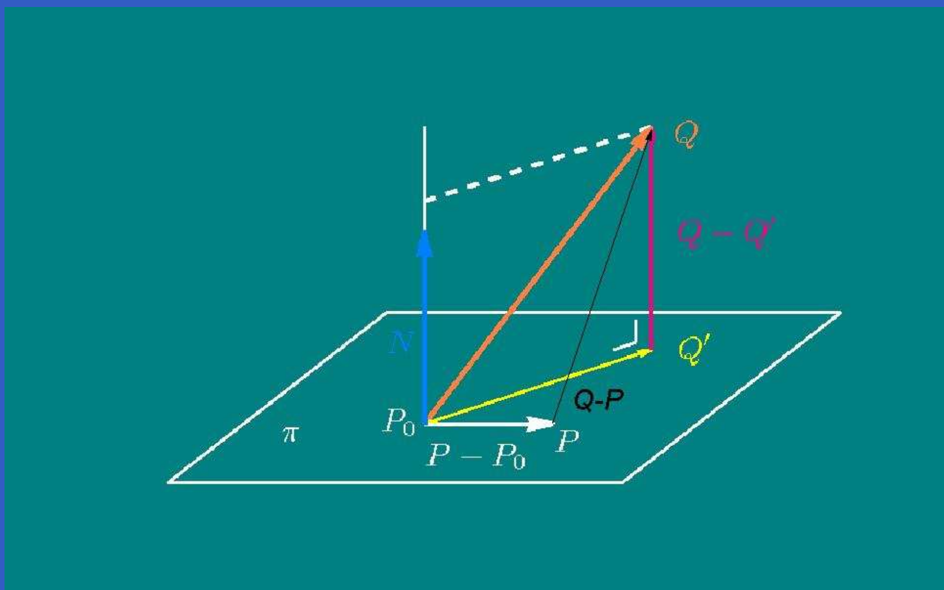
$$d(Q,\pi) = d(Q, P_\pi Q) =$$



Distancia de un punto a un plano

$P_\pi Q$ es el punto de π más cercano a Q. Además

$$d(Q,\pi) = d(Q, P_\pi Q) = |(Q - P_0)N|$$



Distancia de un punto a un plano

Dados $Q = (x, y, z)$ y $\pi) ax + by + cz + d = 0$, tenemos

$$d(Q, \pi) =$$

Distancia de un punto a un plano

Dados $Q = (x, y, z)$ y $\pi) ax + by + cz + d = 0$, tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|(Q - P_0) \cdot (a, b, c)|}{|(a, b, c)|}$$

Distancia de un punto a un plano

Dados $Q = (x, y, z)$ y $\pi) ax + by + cz + d = 0$, tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|(Q - P_0) \cdot (a, b, c)|}{|(a, b, c)|}$$

donde $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$,

Distancia de un punto a un plano

Dados $Q = (x, y, z)$ y $\pi)ax + by + cz + d = 0$, tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|a(x - x_0) + b(x - x_0) + c(x - x_0)|}{|(a, b, c)|}$$

donde $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$,

Distancia de un punto a un plano

Dados $Q = (x, y, z)$ y $\pi) ax + by + cz + d = 0$, tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|a(x - x_0) + b(x - x_0) + c(x - x_0)|}{|(a, b, c)|}$$

donde $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$, ahora

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$

Distancia de un punto a un plano

Dados $Q = (x, y, z)$ y $\pi) ax + by + cz + d = 0$, tenemos

$$d(Q, \pi) = \frac{|ax + by + cz + d|}{|(a, b, c)|}$$

Ejemplo

Sea el plano

$$\pi)2x - y - z + 2 = 0$$

Ejemplo

Sea el plano y el punto

$$\pi) 2x - y - z + 2 = 0 \quad Q = (1, 0, -1)$$

Ejemplo

Sea

$$\pi) 2x - y - z + 2 = 0 \quad Q = (1, 0, -1)$$

La distancia

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Ejemplo

Sea

$$\pi) 2x - y - z + 2 = 0 \quad Q = (1, 0, -1)$$

La distancia

$$d(Q, \pi) = \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

y la proyección de Q sobre π:

$$P_\pi Q = (1, 0, -1) - \frac{5}{6}(2, -1, -1) = \left(-\frac{4}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

Distancia entre rectas

Consideremos las rectas

$$r)X = P + \lambda U$$

Distancia entre rectas

Consideremos las rectas

$$r) X = P + \lambda U$$

$$s) X = Q + \mu V$$

Distancia entre rectas

Consideremos las rectas

$$r) X = P + \lambda U$$

$$s) X = Q + \mu V$$

tales que U y V no sean colineales

Distancia entre rectas

Consideremos las rectas

$$r) X = P + \lambda U$$

$$s) X = Q + \mu V$$

queremos calcular la distancia de r a s:

$$d(r,s) = \min\{d(P',Q') : P' \in r, Q' \in s\}$$

Distancia entre rectas

Consideremos las rectas

$$r)X = P + \lambda U$$

$$s)X = Q + \mu V$$

Afirmación:

$$d(r,s) = \frac{|[Q-P,U,V]|}{|U \wedge V|}$$