

Curvas paramétricas

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

27 de febrero de 2012

curva paramétrica

curva paramétrica

- llamamos curva paramétrica a

curva paramétrica

curva paramétrica

- llamamos curva paramétrica a
- $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,3}$ diferenciable por partes

curva paramétrica

curva paramétrica

- llamamos curva paramétrica a
- $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,3}$ diferenciable por partes
-

$$\alpha) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

curva

curva

- llamamos curva \mathcal{C}

curva

curva

- llamamos curva \mathcal{C}
- a la imagen de una curva paramétrica

curva

curva

- llamamos curva \mathcal{C}
- a la imagen de una curva paramétrica



$$\mathcal{C} = \alpha(I)$$

parametrización de una curva

parametrización de una curva

parametrización de una curva

parametrización de una curva

- llamamos parametrización de una curva \mathcal{C}

parametrización de una curva

parametrización de una curva

- llamamos parametrización de una curva \mathcal{C}
- a cualquier curva paramétrica α

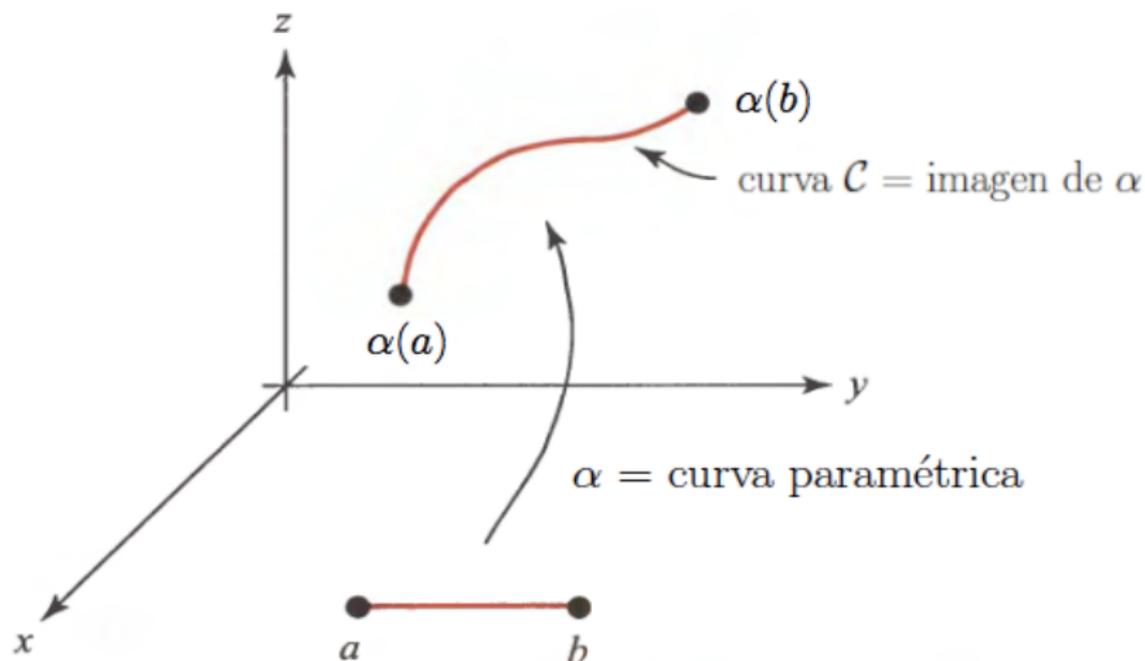
parametrización de una curva

parametrización de una curva

- llamamos parametrización de una curva \mathcal{C}
- a cualquier curva paramétrica α
- tal que $\alpha(I) = \mathcal{C}$

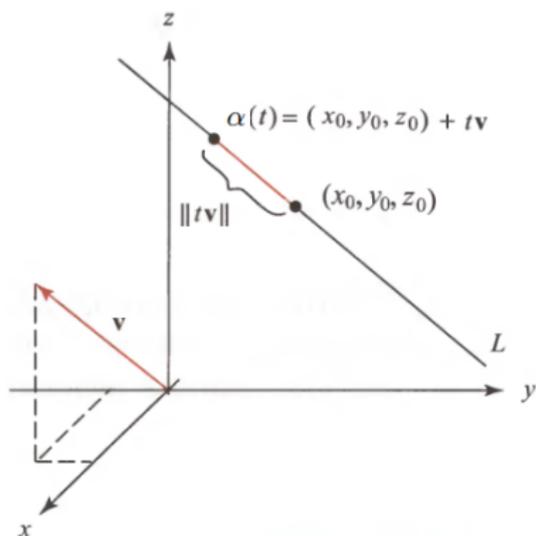
curva y curva paramétrica

curva y curva paramétrica



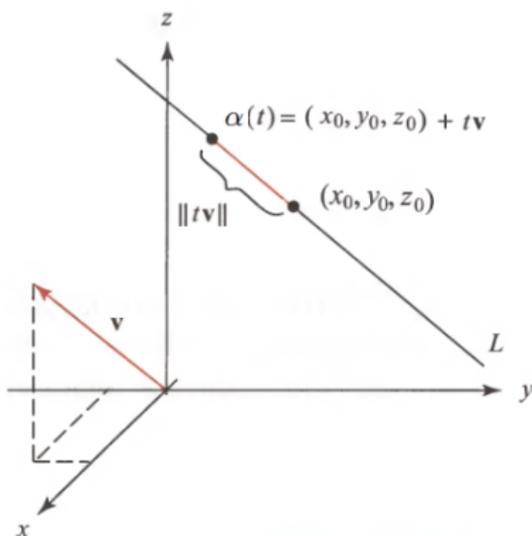
ejemplo 1

recta en el espacio



ejemplo 1

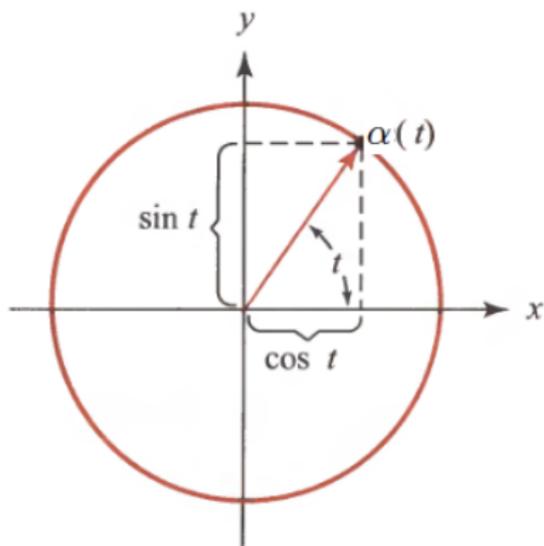
recta en el espacio



- C recta pasando por (x_0, y_0, z_0) con dirección \mathbf{v}

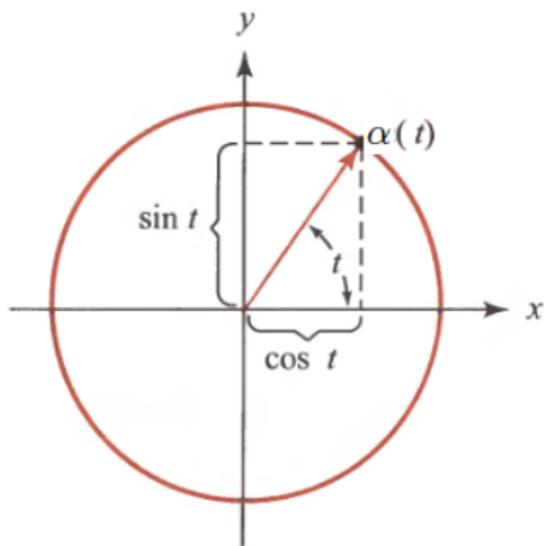
ejemplo 2

circunferencia en el plano



ejemplo 2

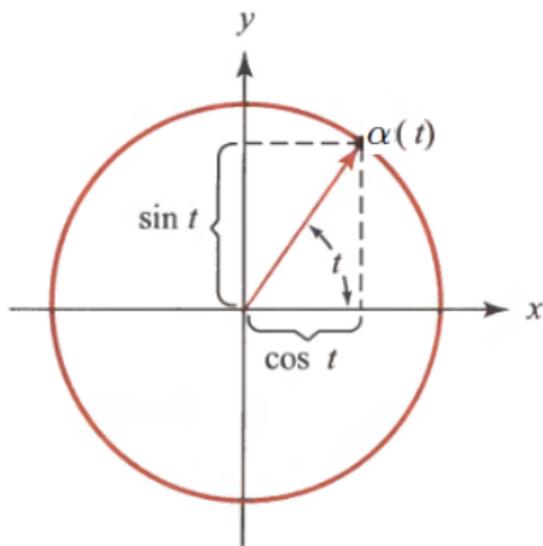
circunferencia en el plano



- C circunferencia unidad en el plano

ejemplo 2

circunferencia en el plano



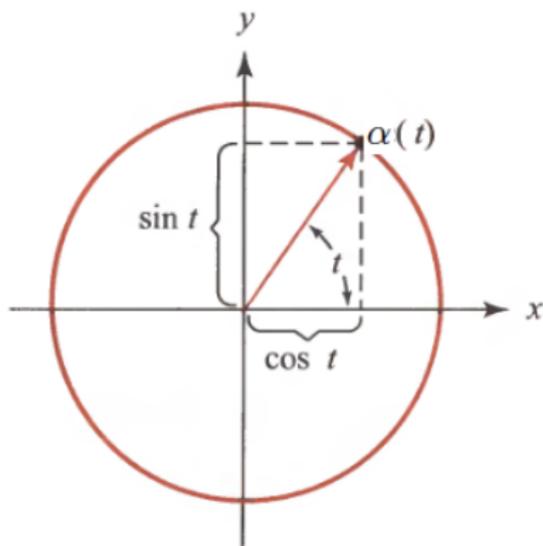
- C circunferencia unidad en el plano



$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ejemplo 2

circunferencia en el plano



- C circunferencia unidad en el plano

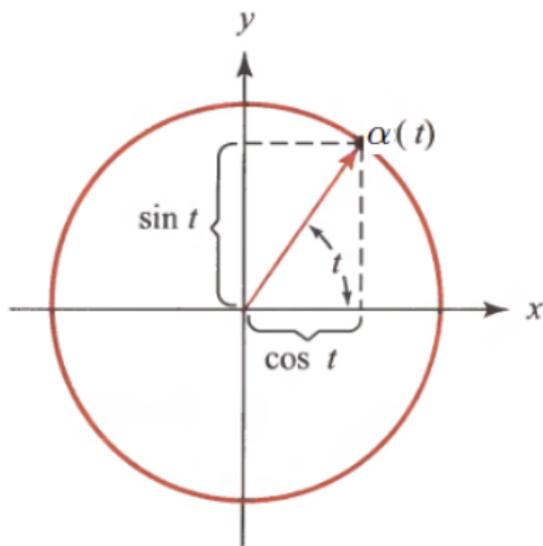


$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

- parametrización

ejemplo 2

circunferencia en el plano



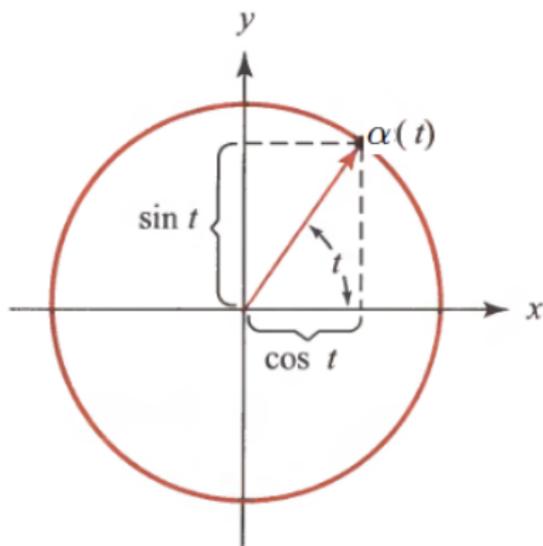
- C circunferencia unidad en el plano



$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

ejemplo 2

circunferencia en el plano



- C circunferencia unidad en el plano

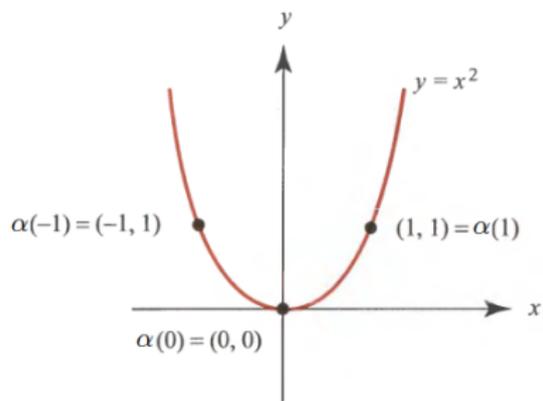


$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

- otra parametrización

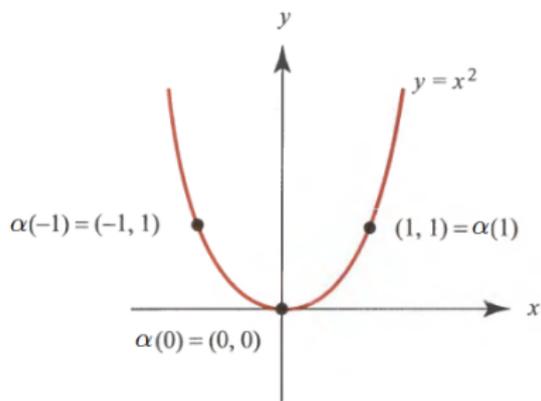
ejemplo 3

parábola en el plano



ejemplo 3

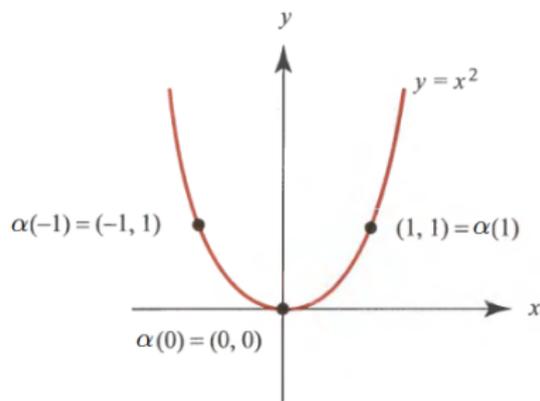
parábola en el plano



- C parábola en \mathbb{R}^2

ejemplo 3

parábola en el plano



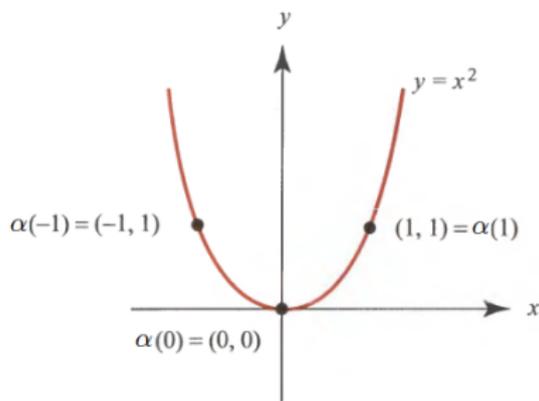
- C parábola en \mathbb{R}^2

-

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ejemplo 3

parábola en el plano



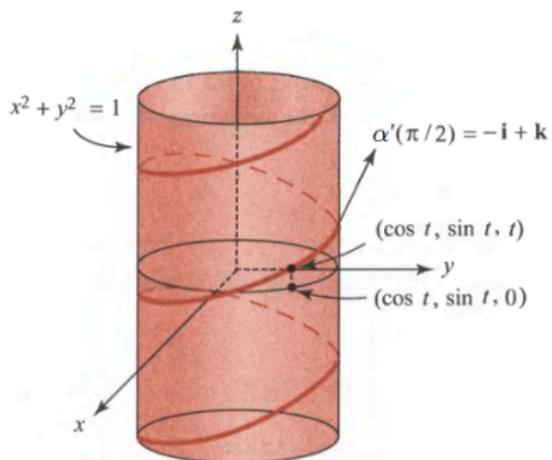
- C parábola en \mathbb{R}^2



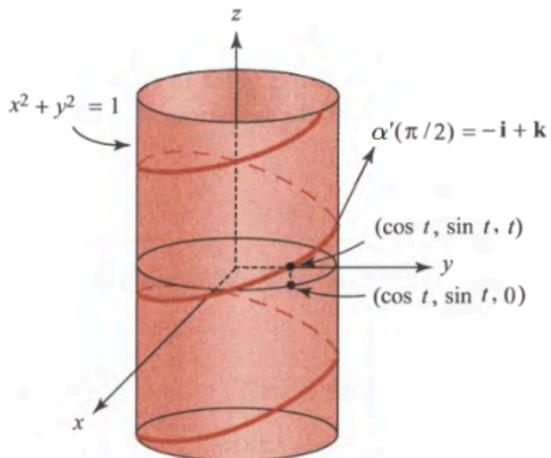
$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- parametrización

ejemplo 4

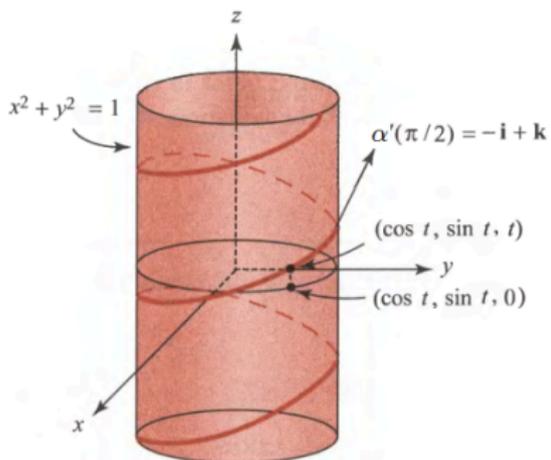
 C helicoides en el espacio

ejemplo 4

 \mathcal{C} helicoides en el espacio

$$\alpha) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ejemplo 4

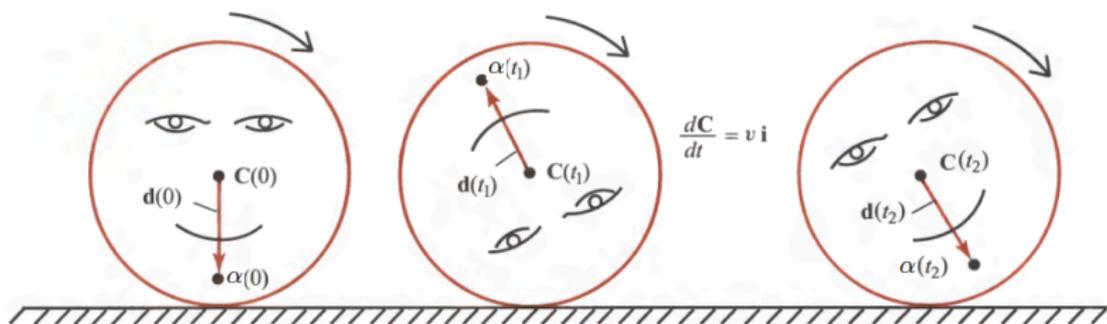
 \mathcal{C} helicoides en el espacio

-

$$\alpha) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

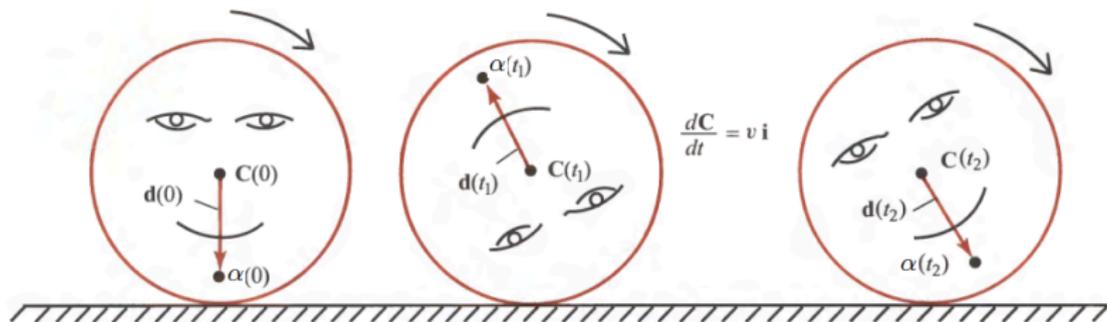
- parametrización de \mathcal{C}

ejemplo 5

 C cicloide en el plano

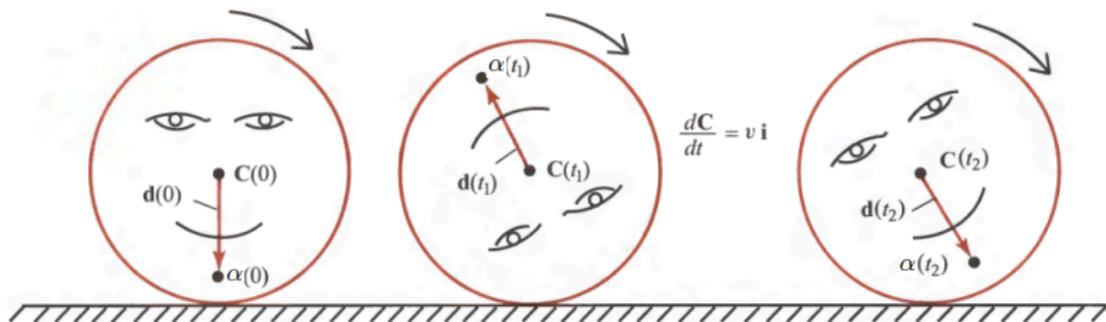
C es la trayectoria de un punto marcado en una rueda a medida que ésta gira

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

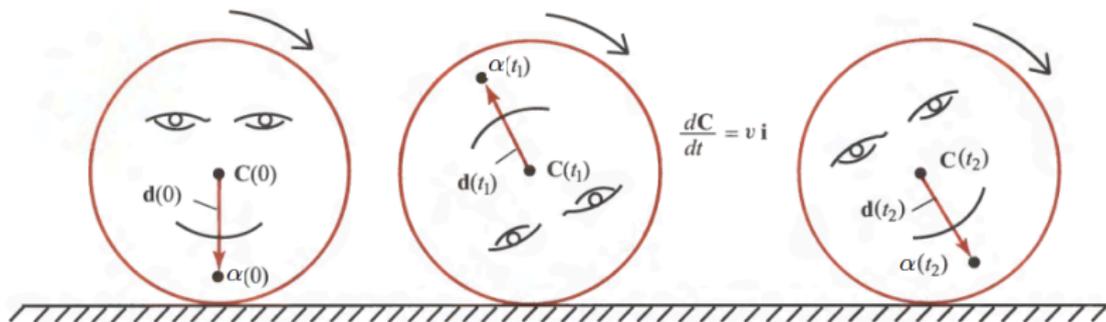
$$\alpha(t) = \mathbf{C}(t) + d(t)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

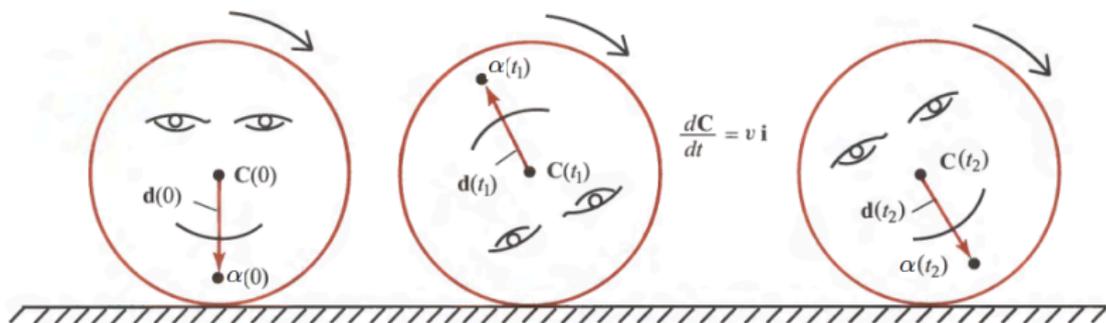
$$\mathbf{C}(t) = (vt, R)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

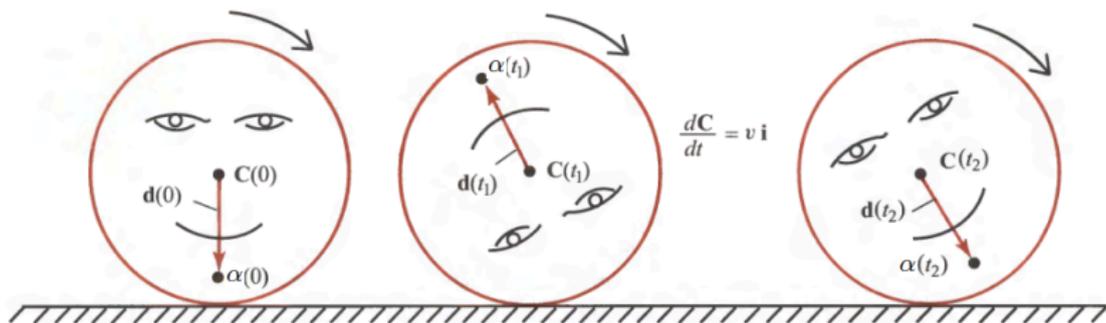
$$d(t) = (r \cos \theta(t), r \sin \theta(t))$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

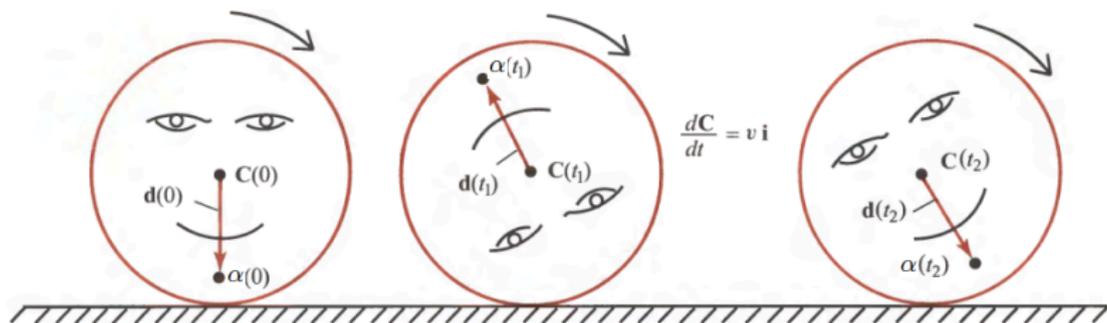
calculamos $\theta(t)$ averiguando $\frac{d\theta}{dt}$ y usando $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

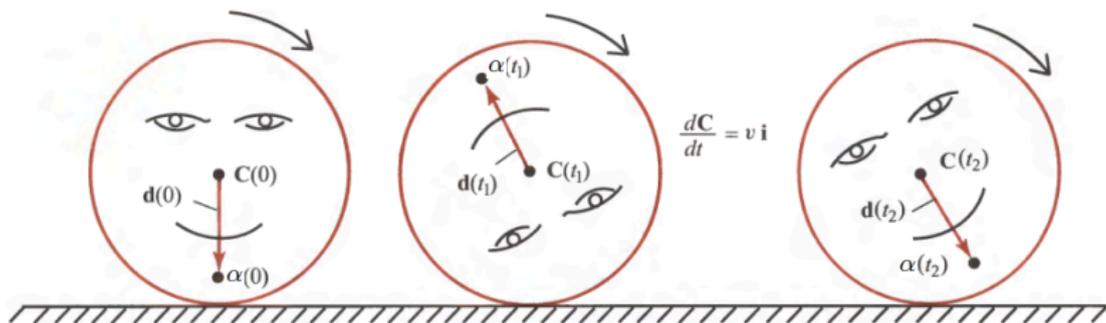
$$\frac{d\theta}{dt} = \text{constante} = -\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ejemplo 5

 C cicloide en el plano

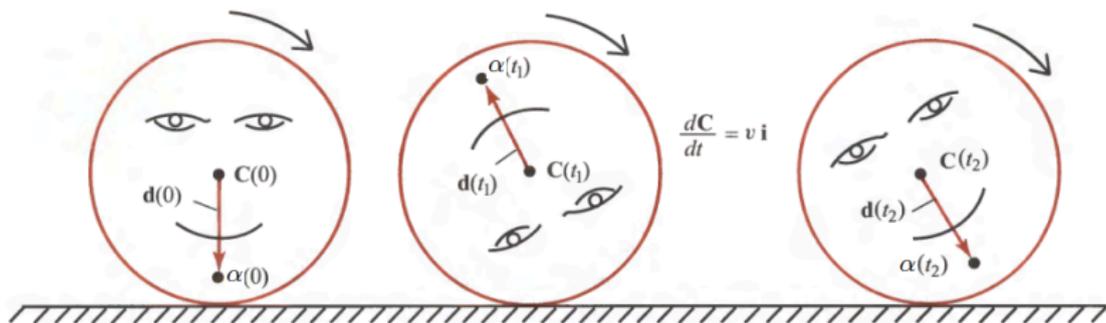
si $\Delta\theta = 2\pi$ cuánto vale Δt ?

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

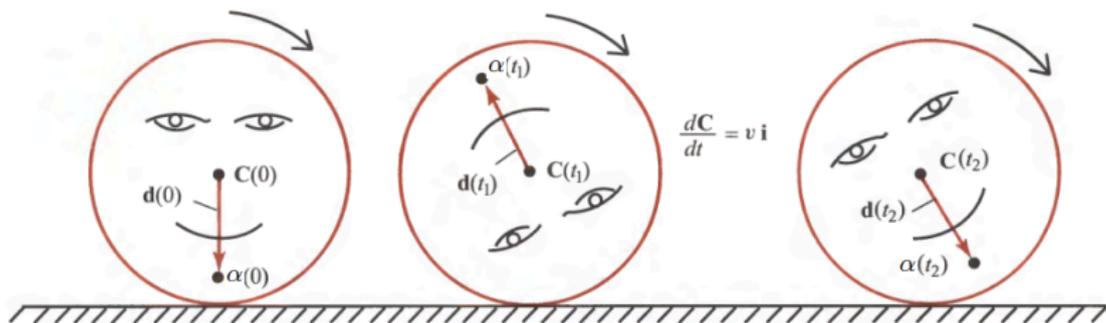
$$\mathbf{C}(t) = (vt, R)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

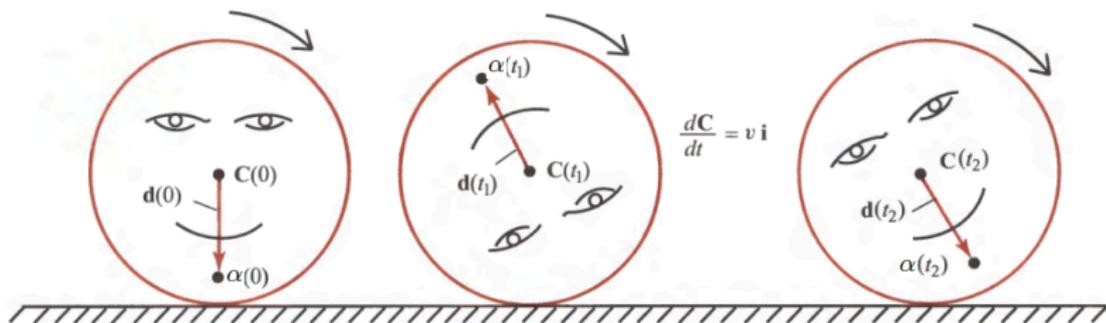
$$\mathbf{C}(t) = (vt, R) = (2\pi R, R)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

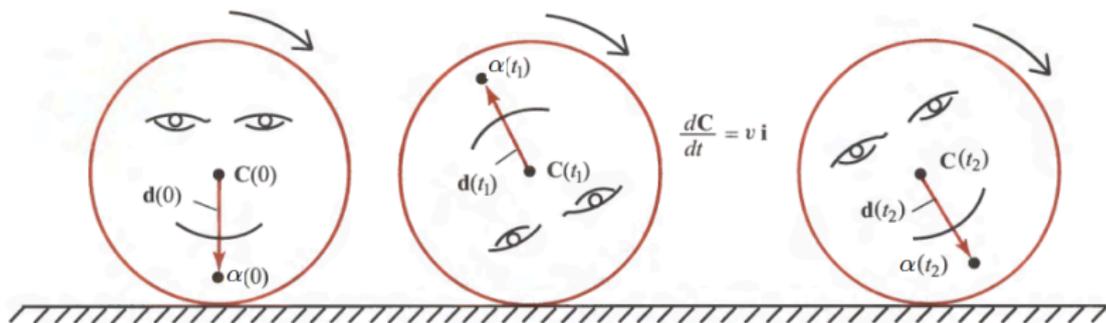
$$\mathbf{C}(t) = (vt, R) = (2\pi R, R) \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi R}{v}$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

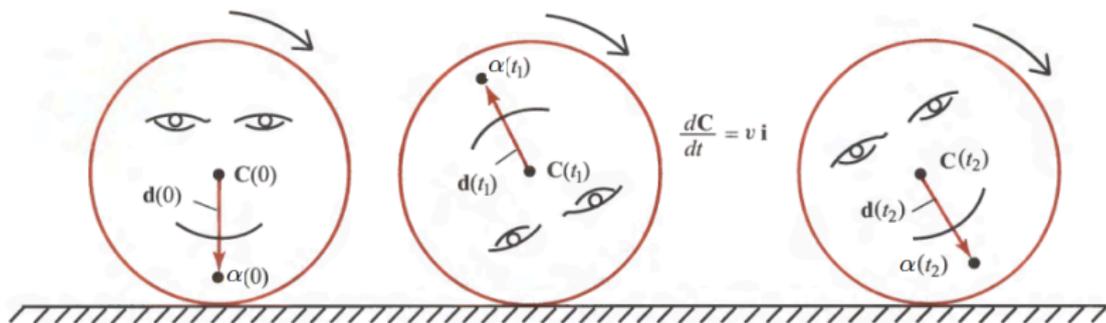
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

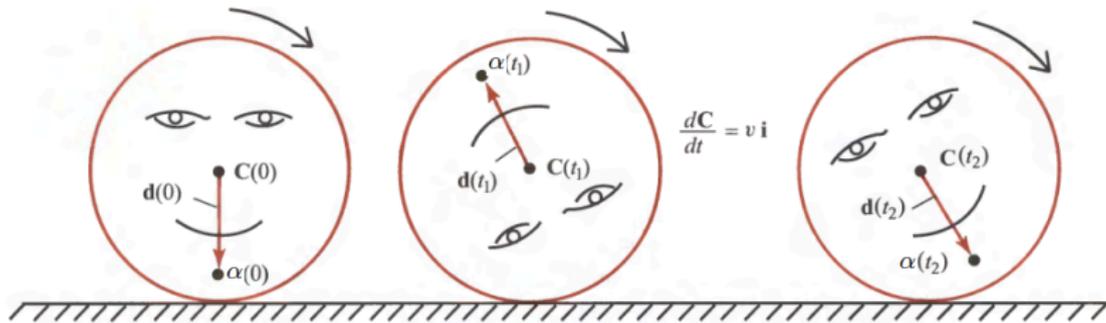
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\frac{2\pi}{2\pi R/v}$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

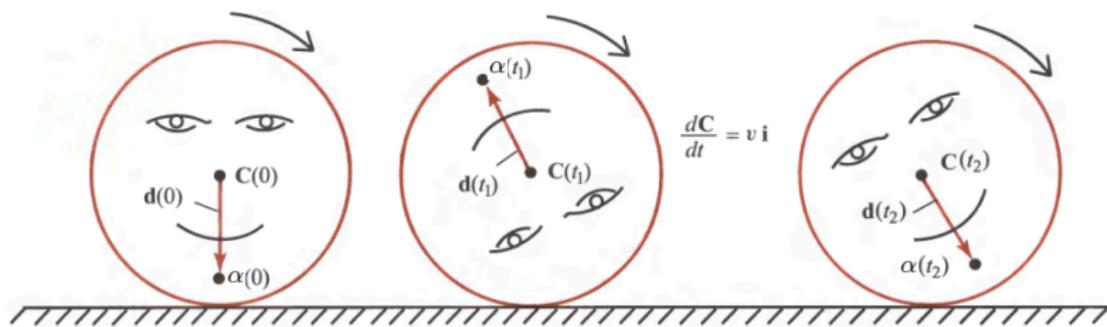
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\frac{2\pi}{2\pi R/v} = -\frac{v}{R}$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

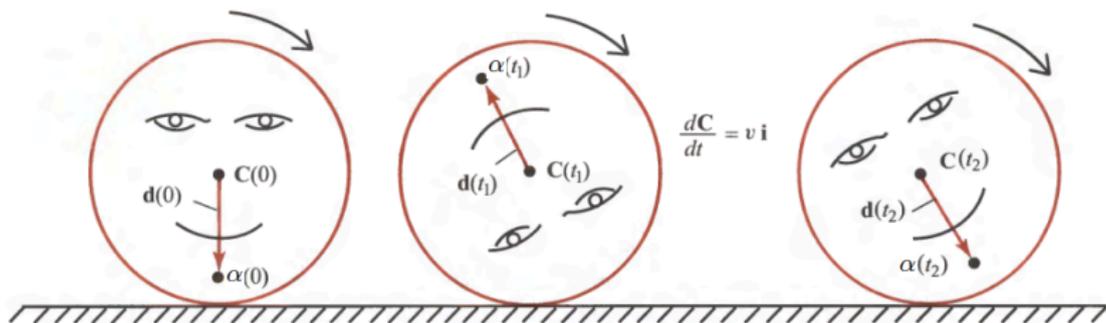
$$\Rightarrow \theta(t) = \int_0^t \frac{d\theta}{dt}(t) + \theta(0)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

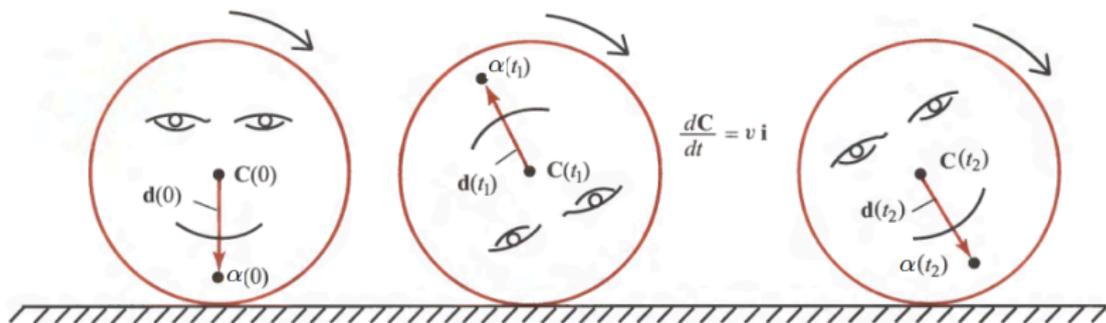
$$\Rightarrow \theta(t) = \int_0^t \frac{d\theta}{dt}(t) + \theta(0) = -\frac{vt}{R} - \frac{\pi}{2}$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

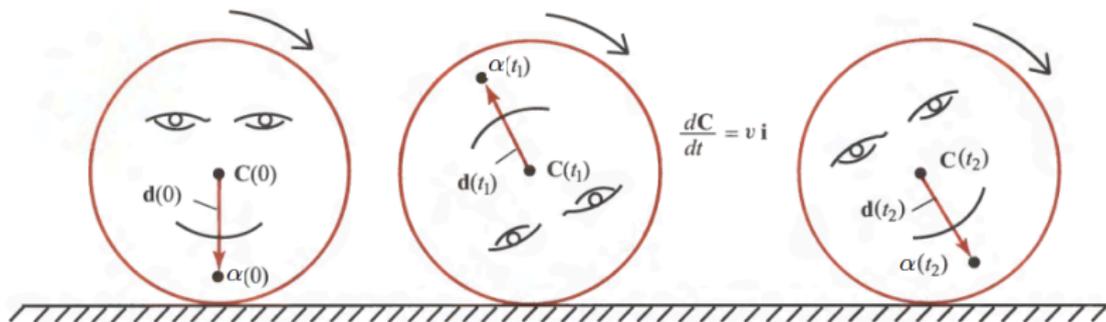
$$d(t) = \left(r \cos \left(-\frac{vt}{R} - \frac{\pi}{2} \right), r \sin \left(-\frac{vt}{R} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

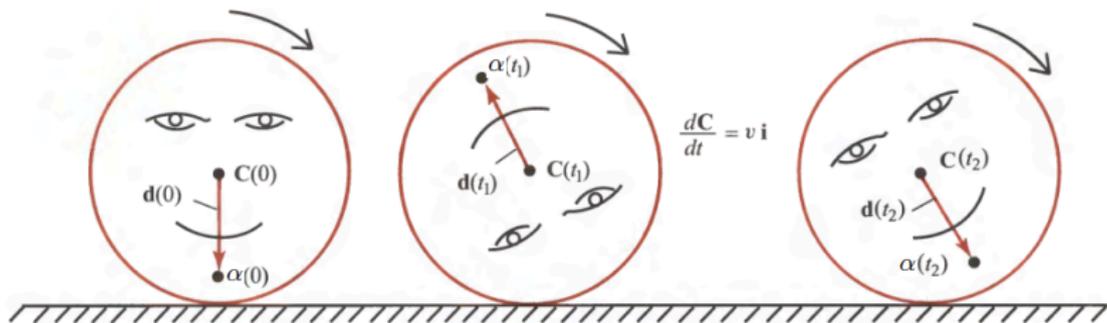
$$d(t) = \left(r \cos \left(\frac{vt}{R} + \frac{\pi}{2} \right), -r \sin \left(\frac{vt}{R} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

$$\alpha(t) = \mathcal{C}(t) + d(t)$$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

$$\alpha(t) = \left(vt + r \cos \left(\frac{vt}{R} + \frac{\pi}{2} \right), R - r \sin \left(\frac{vt}{R} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

ejemplo 5

\mathcal{C} cicloide en el plano

caso $r = R = 1$ y $v = 1$

ejemplo 5

 \mathcal{C} cicloide en el plano

$$\alpha(t) = \left(t + \cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right), 1 - \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

ejemplo 5

\mathcal{C} cicloide en el plano

$$\alpha(t) = (1 - \sin t, 1 - \cos t)$$