# Flujo de un campo. Aplicaciones.

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

28 de marzo de 2011

# flujo de un campo

## flujo de un campo

- $S$ superficie con orientación $n$

# flujo de un campo

## flujo de un campo

- $S$ superficie con orientación $n$
- $X$ campo vectorial

# flujo de un campo

## flujo de un campo

- $S$ superficie con orientación $n$
- $X$ campo vectorial
- flujo de $X$ a través de $S$:

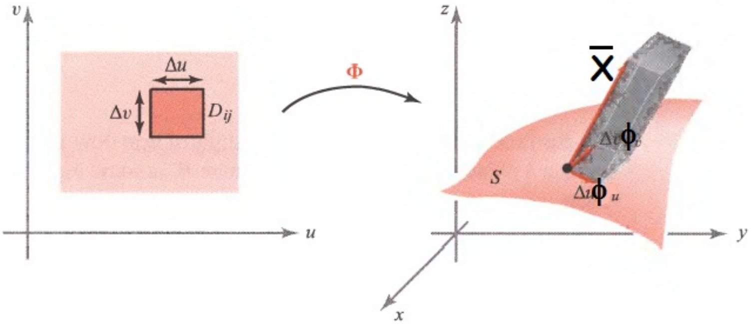
# flujo de un campo

## flujo de un campo

- $S$ superficie con orientación $n$
- $X$ campo vectorial
- flujo de $X$ a través de $S$:
- $$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_S X.n dS$$

# interpretación física

## interpretación física



# interpretación física

## interpretación física

- $\Phi$ parametrización de $S$ que preserva orientación

# interpretación física

## interpretación física

- $\Phi$ parametrización de $S$ que preserva orientación
- descomponenmos $D$ en rectangulitos $D_{ij}$

# interpretación física

## interpretación física

- $\Phi$ parametrización de $S$ que preserva orientación
- descomponenmos $D$ en rectangulitos $D_{ij}$
- área$(D_{ij}) = \Delta u.\Delta v$

# interpretación física

## interpretación física

- $\Phi$ parametrización de $S$ que preserva orientación
- descomponenmos $D$ en rectangulitos $D_{ij}$
- área$(D_{ij}) = \Delta u.\Delta v$
- $\Phi(D_{ij}) \rightsquigarrow$ *paralelogramo*$(\Phi_u \Delta u, \Phi_v \Delta v)$ en $TS$

# interpretación física

## interpretación física

- volumen del paralelepípedo $(X, \Phi_u \Delta u, \Phi_v \Delta v)$

# interpretación física

## interpretación física

- volumen del paralelepípedo $(X, \Phi_u \Delta u, \Phi_v \Delta v)$
- $$|X(\Phi_u \Delta u \wedge \Phi_v \Delta v)|$$

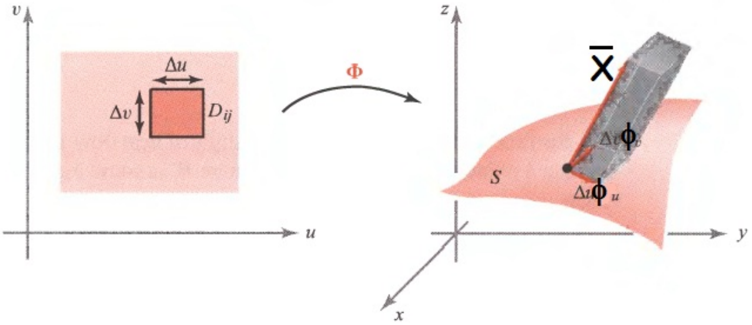
# interpretación física

## interpretación física

- volumen del paralelepípedo $(X, \Phi_u \Delta u, \Phi_v \Delta v)$
- $$|X(\Phi_u \Delta u \wedge \Phi_v \Delta v)| = |X(\Phi_u \wedge \Phi_v)| \Delta u \Delta v$$

# interpretación física

## interpretación física



# interpretación física

## interpretación física

- $X$ campo de velocidades de un fluido $(m/seg)$

# interpretación física

## interpretación física

- $X$ campo de velocidades de un fluido ($m/seg$)
- $|X(\Phi_u \wedge \Phi_v)|\Delta u \Delta v$ cant fluido por u. de t ($m^3/seg$)

# interpretación física

## interpretación física

- $X$ campo de velocidades de un fluido $(m/seg)$
- $|X(\Phi_u \wedge \Phi_v)|\Delta u \Delta v$ cant fluido por u. de t $(m^3/seg)$
- $X(\Phi_u \wedge \Phi_v) > 0$ líquido fluye hacia afuera

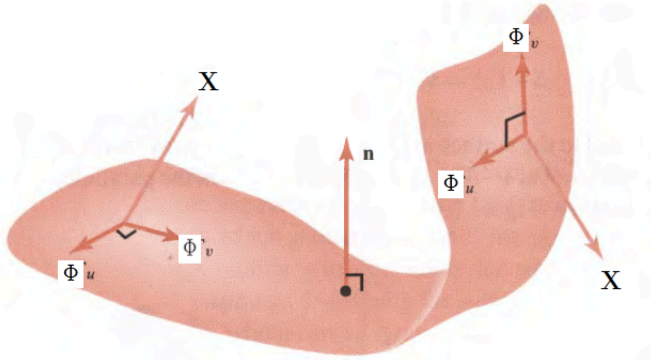
# interpretación física

## interpretación física

- $X$ campo de velocidades de un fluido $(m/seg)$
- $|X(\Phi_u \wedge \Phi_v)|\Delta u \Delta v$ cant fluido por u. de t $(m^3/seg)$
- $X(\Phi_u \wedge \Phi_v) > 0$ líquido fluye hacia afuera
- $X(\Phi_u \wedge \Phi_v) < 0$ líquido fluye hacia adentro

# interpretación física

## interpretación física



# interpretación física

## interpretación física

$$\iint_S X d\mathbf{S}$$

# interpretación física

## interpretación física

$$\iint_S X d\mathbf{S}$$

cantidad neta de fluido que atraviesa $S$ por unidad de tiempo

# flujo eléctrico

## flujo eléctrico

- $E$ campo eléctrico

# flujo eléctrico

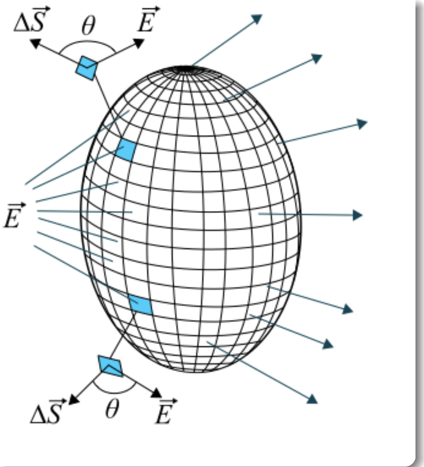
## flujo eléctrico

- $E$ campo eléctrico
- $$\iint_S E d\mathbf{S}$$
  flujo eléctrico

# flujo eléctrico

## flujo eléctrico

- $E$ campo eléctrico
- $$\iint_S E d\mathbf{S}$$
  flujo eléctrico

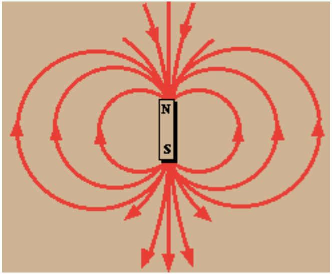


# flujo magnético

## flujo magnético

- $E$ campo magnético

## campo magnético

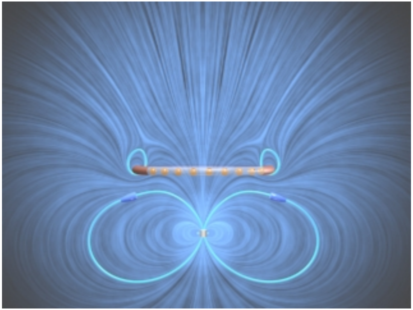


# flujo magnético

## flujo magnético

- $E$ campo magnético
- $$\iint_S E d\mathbf{S}$$
  flujo magnético

## flujo magnético



# flujo de calor

## flujo de calor

- $W$ región de $\mathbb{R}^3$

# flujo de calor

## flujo de calor

- $W$ región de $\mathbb{R}^3$
- $T(x, y, z)$ temperatura en $(x, y, z) \in W$

# flujo de calor

## flujo de calor

- $W$ región de $\mathbb{R}^3$
- $T(x, y, z)$ temperatura en $(x, y, z) \in W$
- el calor fluye con:

$$-k\nabla T = X$$

# flujo de calor

## flujo de calor

- $W$ región de $\mathbb{R}^3$
- $T(x, y, z)$ temperatura en $(x, y, z) \in W$
- el calor fluye con:

$$-k\nabla T = X$$

- $$\iint_S X d\mathbf{S}$$

  flujo del calor a través de $S$

# flujo de calor

## flujo de calor

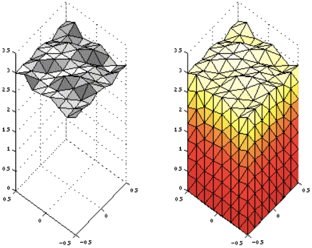
- $W$ región de $\mathbb{R}^3$
- $T(x, y, z)$ temperatura en $(x, y, z) \in W$
- el calor fluye con:

$$-k\nabla T = X$$

- $$\iint_S X d\mathbf{S}$$

  flujo del calor a través de $S$

## asteroide



# flujo del calor - justificación

## flujo del calor - justificación

- $T$ temperatura

# flujo del calor - justificación

## flujo del calor - justificación

- $T$ temperatura
- $\nabla T$ campo que apunta en la dirección $T$ creciente

# flujo del calor - justificación

## flujo del calor - justificación

- $T$ temperatura
- $\nabla T$ campo que apunta en la dirección $T$ creciente
- el calor fluye de las zonas + calientes a las + frías

# flujo del calor - justificación

## flujo del calor - justificación

- $T$ temperatura
- $\nabla T$ campo que apunta en la dirección $T$ creciente
- el calor fluye de las zonas + calientes a las + frías
- por eso el campo que indica el cambio de temperatura

$$X = -k\nabla T \qquad k > 0$$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

- $X = -\nabla T(x, y, z)$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

- $X = -\nabla T(x, y, z) = -(2x, 2y, 2z)$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

- $X = -\nabla T(x, y, z) = -(2x, 2y, 2z)$
- $\mathbf{n} = (x, y, z)$ normal exterior

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

- $X = -\nabla T(x, y, z) = -(2x, 2y, 2z)$
- $\mathbf{n} = (x, y, z)$ normal exterior
- $$\iint_S X d\mathbf{S}$$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

- $X = -\nabla T(x, y, z) = -(2x, 2y, 2z)$
- $\mathbf{n} = (x, y, z)$ normal exterior
- $$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_S X.\mathbf{n} dS$$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

- $X = -\nabla T(x, y, z) = -(2x, 2y, 2z)$
- $\mathbf{n} = (x, y, z)$ normal exterior
- $$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_S X.\mathbf{n} dS = -2\text{área}(S)$$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $S$ esfera unidad con normal exterior
- calcular el flujo de calor a través de $S$ si $k = 1$

- $X = -\nabla T(x, y, z) = -(2x, 2y, 2z)$
- $\mathbf{n} = (x, y, z)$ normal exterior
- $$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_S X.\mathbf{n} dS = -2\text{área}(S) = -8\pi$$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- el flujo de calor es negativo

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- el flujo de calor es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal $\mathbf{n}$

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- el flujo de calor es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal $\mathbf{n}$
- $\Rightarrow$ $X$ apunta en promedio hacia adentro

# ejemplo 1

## ejemplo 1

- el flujo de calor es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal $\mathbf{n}$
- $\Rightarrow$ $X$ apunta en promedio hacia adentro
- $\Rightarrow$ el centro se calienta

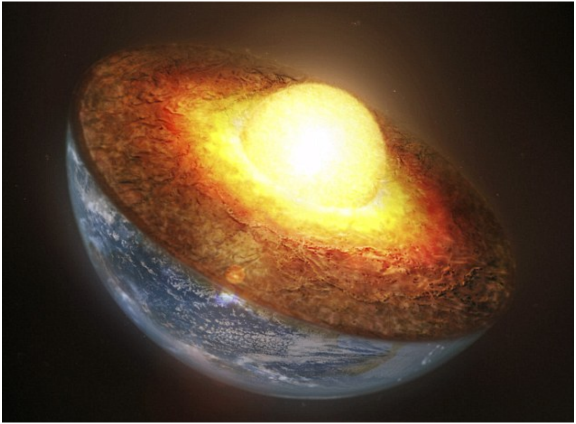
# ejemplo 1

## ejemplo 1

- el flujo de calor es negativo
- $\Rightarrow$ la temperatura fluye en sentido contrario a la normal $\mathbf{n}$
- $\Rightarrow$ $X$ apunta en promedio hacia adentro
- $\Rightarrow$ el centro se calienta
- ganancia de temperatura

# ejemplo 1

## ejemplo 1



es lo opuesto a lo que ocurre en la Tierra

# Ley de gauss

## ejemplo 2

- $E$ campo eléctrico

# Ley de gauss

## ejemplo 2

- $E$ campo eléctrico
- $S$ superficie cerrada, **n** normal saliente

# Ley de gauss

## ejemplo 2

- $E$ campo eléctrico
- $S$ superficie cerrada, $\mathbf{n}$ normal saliente
- $Q$ carga encerrada por $S$

# Ley de gauss

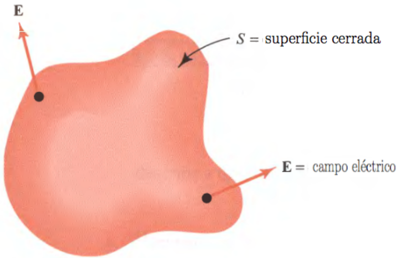
## ejemplo 2

- $E$ campo eléctrico
- $S$ superficie cerrada, **n** normal saliente
- $Q$ carga encerrada por $S$
- ley de Gauss

$$\iint_S E d\mathbf{S} = Q$$

# ley de gauss

## ejemplo 2




$$\int_S E d\mathbf{S} = Q$$

# flujo eléctrico

## ejemplo 2

- supongamos que $E = |E|\mathbf{n}$, con $|E|$ constante

# flujo eléctrico

## ejemplo 2

- supongamos que $E = |E|\mathbf{n}$, con $|E|$ constante
- $\Rightarrow \iint_S E.N\, dS = |E| \iint_S \mathbf{n}.\mathbf{n}\, dS = |E|.\text{área}(S) = Q$

# flujo eléctrico

## ejemplo 2

- supongamos que $E = |E|\mathbf{n}$, con $|E|$ constante
- $\Rightarrow \iint_S E.N\, dS = |E| \iint_S \mathbf{n}.\mathbf{n}\, dS = |E|.\text{área}(S) = Q$
- si $S$ es una esfera de radio $r$

# flujo eléctrico

## ejemplo 2

- supongamos que $E = |E|\mathbf{n}$, con $|E|$ constante
- $\Rightarrow \iint_S E.N\, dS = |E| \iint_S \mathbf{n}.\mathbf{n}\, dS = |E|.\text{área}(S) = Q$
- si $S$ es una esfera de radio $r$
- $$|E| = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

# flujo eléctrico

## ejemplo 2

- supongamos que $E = |E|\mathbf{n}$, con $|E|$ constante
- $\Rightarrow \iint_S E.N\, dS = |E| \iint_S \mathbf{n}.\mathbf{n}\, dS = |E|.\text{área}(S) = Q$
- si $S$ es una esfera de radio $r$
- $$|E| = \frac{Q}{4\pi r^2}$$
- es lo que pasa, por ejemplo, con las cargas puntuales

# cargas puntuales

## ejemplo 2

- supongamos que $E$ surge de una carga puntual $Q_0$

# cargas puntuales

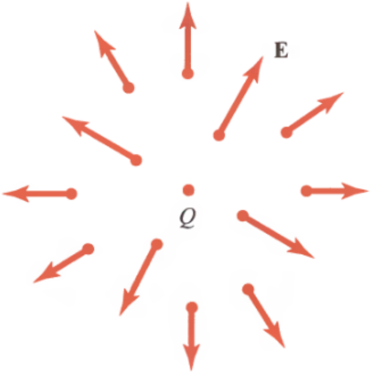
## ejemplo 2

- supongamos que $E$ surge de una carga puntual $Q_0$
- $\Rightarrow$

$$E = \frac{Q_0 \mathbf{n}}{4\pi r^2}$$

# cargas puntuales

## ejemplo 2




$$E = \frac{Q\mathbf{n}}{4\pi r^2}$$

# cargas puntuales

## ejemplo 2

- si $Q$ es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es

# cargas puntuales

## ejemplo 2

- si $Q$ es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es
- $$X = E.Q = \frac{Q.Q_0.N}{4\pi r^2}$$

# cargas puntuales

## ejemplo 2

- si $Q$ es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es
- $$X = E.Q = \frac{Q.Q_0.N}{4\pi r^2}$$
- la magnitud de esta fuerza es:

$$|X| = \frac{Q.Q_0}{4\pi r^2}$$

# cargas puntuales

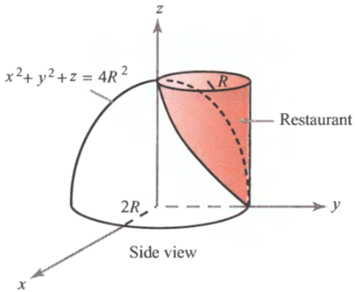
## ejemplo 2

- si $Q$ es otra carga puntual, la fuerza que actúa en esta carga es
- $$X = E.Q = \frac{Q.Q_0.N}{4\pi r^2}$$
- la magnitud de esta fuerza es:

$$|X| = \frac{Q.Q_0}{4\pi r^2} \qquad \text{ley de Coulomb}$$

# construcción de un restaurante - parte 1

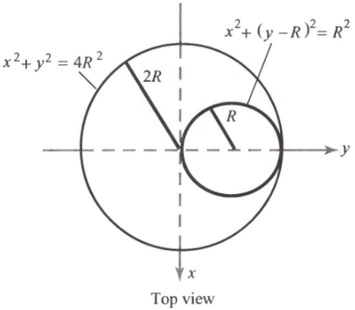
## construcción de un restaurante - parte 1




- restaurante en la ladera de una montaña

# construcción de un restaurante - parte 1

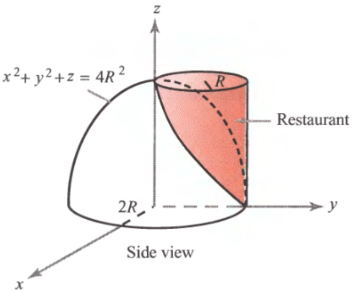
## construcción de un restaurante - parte 1




- restaurante en la ladera de una montaña
- vista de planta

# construcción de un restaurante - parte 1

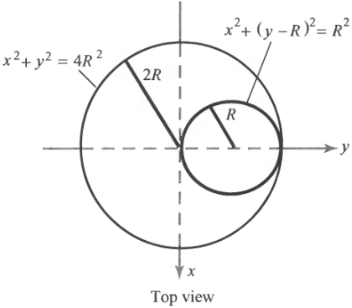
## construcción de un restaurante - parte 1




- restaurante en la ladera de una montaña
- vista de planta
- la pared curvada se hará de cristal

# construcción de un restaurante - parte 1

## construcción de un restaurante - parte 1

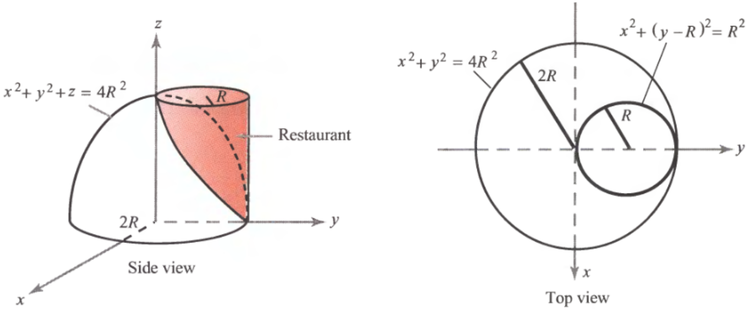



- restaurante en la ladera de una montaña
- vista de planta
- la pared curvada se hará de cristal
- ¿Cuál es el área de la pared?

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

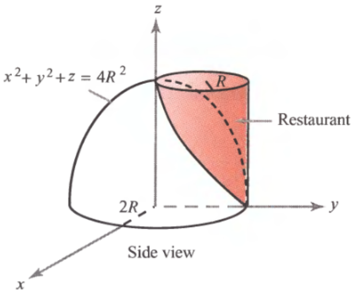
- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior

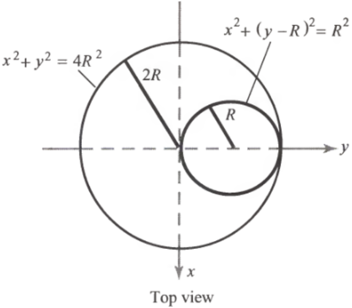


# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior




- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta
- $f(x, y) = 4R^2 - x^2 - y^2$,

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta
- $f(x, y) = 4R^2 - x^2 - y^2$, $\alpha(t) = (R\cos t, R + R\sin t, 0)$

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta
- $f(x,y) = 4R^2 - x^2 - y^2$, $\alpha(t) = (R\cos t, R + R\sin t, 0)$
- $$\text{área(cerca)} = \int_\alpha f d\alpha$$

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta
- $f(x, y) = 4R^2 - x^2 - y^2$, $\alpha(t) = (R\cos t, R + R\sin t, 0)$
- $$\text{área(cerca)} = \int_\alpha f d\alpha = \int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt$$

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta
- $f(x,y) = 4R^2 - x^2 - y^2$, $\alpha(t) = (R\cos t, R + R\sin t, 0)$
- $$\text{área(cerca)} = \int_0^{2\pi} (2R^2 - 2R^2 \sin t) R dt$$

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta
- $f(x,y) = 4R^2 - x^2 - y^2$, $\alpha(t) = (R\cos t, R + R\sin t, 0)$
- $$\text{área(cerca)} = 2R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin t)dt$$

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- área cerca inferior= integral de $f$ sobre la curva $\alpha$ de la planta
- $f(x, y) = 4R^2 - x^2 - y^2$, $\alpha(t) = (R\cos t, R + R\sin t, 0)$
- $$\text{área}(\text{cerca}) = 2R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin t)dt = 4\pi R^3$$

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior

# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- $$\text{área(pared)} = 8\pi R^3 - 4\pi R^3$$

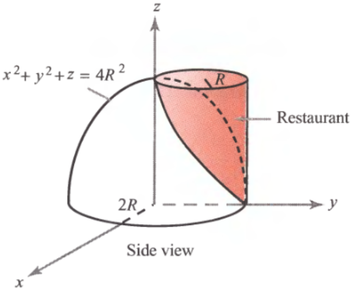
# construcción de un restaurante - parte 1

## área de la pared de cristal

- área de la pared=área del cilindro - área cerca inferior
- $$\text{área(pared)} = 8\pi R^3 - 4\pi R^3 = 4\pi R^3$$

# construcción de un restaurante - parte 2

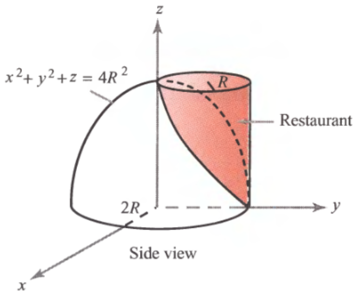
## construcción de un restaurante - parte 2




- para que el restaurant sea rentable

# construcción de un restaurante - parte 2

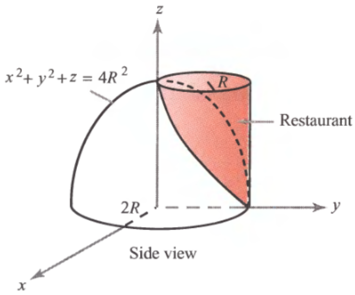
## construcción de un restaurante - parte 2




- para que el restaurant sea rentable
- $$\text{vol(restaurant)} \geq \frac{\pi R^4}{2}$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## construcción de un restaurante - parte 2




- para que el restaurant sea rentable
- $$\text{vol(restaurant)} \geq \frac{\pi R^4}{2}$$
- ¿ cuáles $R$ cumplen este requisito?

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol(debajo de la montaña)

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol(debajo de la montaña)
- $$\text{vol}(<\text{mont}) = \iint_D 4R^2 - x^2 - y^2 dxdy$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol(debajo de la montaña)
- $$\text{vol}(< \text{mont}) = \iint_D 4R^2 - x^2 - y^2 dxdy$$
- donde $D$ círculo centrado en $(0, R, 0)$ de radio $R$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- usamos coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = R + r\sin\theta \end{cases}$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- usamos coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = R + r\sin\theta \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

$$\text{vol}(<\text{mont}) = \int_0^{2\pi}\int_0^R (3R^2 - 2Rr\sin\theta - r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

$$
\begin{aligned}
\text{vol}(< \text{mont}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R (3R^2 - 2Rr\sin\theta - r^2) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2} R^2 r^2 - \frac{2}{3} R r^3 \sin\theta - \frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta
\end{aligned}
$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

$$\begin{aligned}
\text{vol}(< \text{mont}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^R (3R^2 - 2Rr\sin\theta - r^2)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}R^2r^2 - \frac{2}{3}Rr^3\sin\theta - \frac{r^4}{4}\right]_0^R d\theta \\
&= \frac{5}{2}\pi R^4
\end{aligned}$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol(< mont)

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol($<$ mont)
- $$\text{vol(restaurant)} = 4\pi R^4 - \frac{5}{2}\pi R^4$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol(< mont)
- $$\text{vol(restaurant)} = 4\pi R^4 - \frac{5}{2}\pi R^4 = \frac{3\pi R^4}{2}$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol(< mont)
- $$\text{vol(restaurant)} = 4\pi R^4 - \frac{5}{2}\pi R^4 = \frac{3\pi R^4}{2} \geq \frac{\pi R^4}{2}$$

# construcción de un restaurante - parte 2

## búsqueda de volumen rentable

- vol(restaurant)=vol(cilindro) - vol(< mont)
- $$\text{vol(restaurant)} = 4\pi R^4 - \frac{5}{2}\pi R^4 = \frac{3\pi R^4}{2} \geq \frac{\pi R^4}{2}$$
- $\Rightarrow$ es rentable para todos los $R$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- temperatura alrededor del restaurante

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- temperatura alrededor del restaurante

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$$

- campo de temperaturas:

$$X = -k\nabla T$$

donde $k > 0$ depende del grado de aislamiento que se va a utilizar

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- temperatura alrededor del restaurante

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2$$

- campo de temperaturas:

$$X = -k\nabla T$$

donde $k > 0$ depende del grado de aislamiento que se va a utilizar

- ¿ cuál es el flujo de calor a través de toda la superficie del restaurant?

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- campo de temperaturas:

$$X = -k(6x, 2(y - R), 32z)$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- campo de temperaturas:

$$X = -k(6x, 2(y - R), 32z)$$

- flujo de calor:

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X d\mathbf{S} + \iint_{S_3} X d\mathbf{S}$$

con normal exterior

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - techo

- $S_1$ techo

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - techo

- $S_1$ techo
- $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 4R^r)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - techo

- $S_1$ techo
- $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 4R^r)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - techo

- $S_1$ techo
- $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 4R^r)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, r)$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración -techo

$$\iint_{S_1} X d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X.n dS$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración -techo

$$\iint_{S_1} X d\mathbf{S} \;=\; \iint_{S_1} X.ndS = \iint_D X(\Phi_r \wedge \Phi_\theta) drd\theta$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración -techo

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} Xd\mathbf{S} &= \iint_{S_1} X.ndS = \iint_D X(\Phi_r \wedge \Phi_\theta)drd\theta \\ &= \iint_D X(r\cos\theta, R + r\sin\theta, 4R^2)(0,0,r)drd\theta\end{aligned}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración -techo

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} X d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} X.ndS = \iint_D X(\Phi_r \wedge \Phi_\theta) dr d\theta \\
&= \iint_D X(r\cos\theta, R + r\sin\theta, 4R^2)(0,0,r) dr d\theta \\
&= -k 8\pi R^2 \pi \int_0^{4R^2} r dr
\end{aligned}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración -techo

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} X d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} X.ndS = \iint_{D} X(\Phi_r \wedge \Phi_\theta) dr d\theta \\
&= \iint_{D} X(r\cos\theta, R + r\sin\theta, 4R^2)(0,0,r) dr d\theta \\
&= -k8\pi R^2 \pi \int_0^{4R^2} r dr = -64k\pi R^4
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ entra calor por el techo

# construccción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared curva

- $S_2$ pared: $\Phi(r,\theta) = (R\sin\theta, R - R\cos\theta, r)$

# construccción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared curva

- $S_2$ pared: $\Phi(r, \theta) = (R \sin \theta, R - R \cos \theta, r)$
- con $\theta \in [0, \pi]$ y $r \in [2R^2(1 + \cos \theta), 4R^2]$

# construccción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared curva

- $S_2$ pared: $\Phi(r,\theta) = (R\sin\theta, R - R\cos\theta, r)$
- con $\theta \in [0,\pi]$ y $r \in [2R^2(1+\cos\theta), 4R^2]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

# construccción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared curva

- $S_2$ pared: $\Phi(r, \theta) = (R\sin\theta, R - R\cos\theta, r)$
- con $\theta \in [0, \pi]$ y $r \in [2R^2(1 + \cos\theta), 4R^2]$
-

$$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = R(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

# construccción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared curva

- $S_2$ pared: $\Phi(r, \theta) = (R \sin \theta, R - R \cos \theta, r)$
- con $\theta \in [0, \pi]$ y $r \in [2R^2(1 + \cos \theta), 4R^2]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ R \cos \theta & R \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = R(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$
- apunta hacia adentro

# construccción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared curva

- $S_2$ pared: $\Phi(r,\theta) = (R\sin\theta, R - R\cos\theta, r)$
- con $\theta \in [0,\pi]$ y $r \in [2R^2(1+\cos\theta), 4R^2]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = R(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$
- apunta hacia adentro $\Phi$ revierte orientación

# construccción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared curva

- $S_2$ pared: $\Phi(r,\theta) = (R\sin\theta, R - R\cos\theta, r)$
- con $\theta \in [0,\pi]$ y $r \in [2R^2(1+\cos\theta), 4R^2]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = R(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$
- apunta hacia adentro $\Phi$ revierte orientación
- tomamos $\Phi(\theta, r) \to \Phi_\theta \wedge \Phi_r = R(\sin\theta, -\cos\theta, 0)$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared

$$\iint_{S_2} X d\mathbf{S} = 2 \iint_D X(\Phi_\theta \wedge \Phi_r) dr d\theta$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} X d\mathbf{S} &= 2\iint_D X(\Phi_\theta \wedge \Phi_r)drd\theta \\ &= -2kR\iint_D (6R\sin\theta, -2R\cos\theta, 32r)(\sin\theta, -\cos\theta, 0)d\end{aligned}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} X d\mathbf{S} &= 2\iint_D X(\Phi_\theta \wedge \Phi_r) dr d\theta \\ &= -2kR \iint_D (6R\sin\theta, -2R\cos\theta, 32r)(\sin\theta, -\cos\theta, 0) d\\ &= -4kR^2 \int_0^\pi \int_{2R^2(1+\cos\theta)}^{4R^2} (3\sin^2\theta + \cos^2\theta) dr d\theta\end{aligned}$$

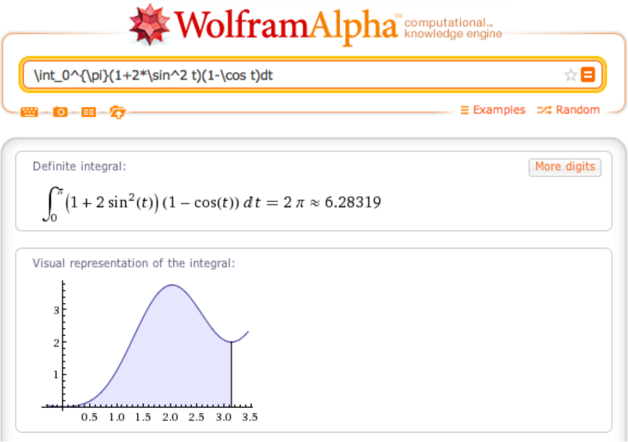
# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_2} X d\mathbf{S} &= 2\iint_D X(\Phi_\theta \wedge \Phi_r) dr d\theta \\
&= -2kR \iint_D (6R\sin\theta, -2R\cos\theta, 32r)(\sin\theta, -\cos\theta, 0)d \\
&= -4kR^2 \int_0^\pi \int_{2R^2(1+\cos\theta)}^{4R^2} (3\sin^2\theta + \cos^2\theta) dr d\theta \\
&= -8kR^4 \int_0^\pi (2\sin^2\theta + 1)(1-\cos\theta) d\theta
\end{aligned}
$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared



# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared

- $$\iint_{S_2} X d\mathbf{S} = -16kR^4\pi$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - pared

- $$\iint_{S_2} X d\mathbf{S} = -16kR^4\pi$$
- entra calor a través de la pared

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

- $S_3$ piso

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

- $S_3$ piso
- $\Phi(r, theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 3R^2 - r^2 - 2Rr\sin\theta)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

- $S_3$ piso
- $\Phi(r, theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 3R^2 - r^2 - 2Rr\sin\theta)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2(r + R\sin\theta) \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -2rR\cos\theta \end{vmatrix}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

- $S_3$ piso
- $\Phi(r, theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 3R^2 - r^2 - 2Rr\sin\theta)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2(r + R\sin\theta) \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -2rR\cos\theta \end{vmatrix}$$
- $\Phi_r \wedge \Phi_\theta = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2rR, r)$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

- $S_3$ piso
- $\Phi(r, theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 3R^2 - r^2 - 2Rr\sin\theta)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2(r + R\sin\theta) \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -2rR\cos\theta \end{vmatrix}$$
- $\Phi_r \wedge \Phi_\theta = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2rR, r)$
- apunta hacia arriba $\Rightarrow$ revierte orientación

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

- $S_3$ piso
- $\Phi(r, theta) = (r\cos\theta, R + r\sin\theta, 3R^2 - r^2 - 2Rr\sin\theta)$ con $r \in [0, 4R^2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
- $$\Phi_r \wedge \Phi_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2(r + R\sin\theta) \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -2rR\cos\theta \end{vmatrix}$$
- $\Phi_r \wedge \Phi_\theta = (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2rR, r)$
- apunta hacia arriba $\Rightarrow$ revierte orientación
- tomamos $\Phi_\theta \wedge \Phi_r = -(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2rR, r)$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

$$\iint_{S_3} X d\mathbf{S} = k \iint_D (6r\cos\theta, 2r\sin\theta, 96R^2 - 32r^2 - 64Rr\sin\theta)(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2Rr, r)\,dr\,d\theta$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

$$\iint_{S_3} X d\mathbf{S} = k \iint_D (6r\cos\theta, 2r\sin\theta, 96R^2 - 32r^2 - 64Rr\sin\theta)(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2Rr, r)\, dr d\theta$$

$$= 4k \int_0^{2\pi} \int_0^R (4r^3\cos^2\theta - 7r^3 - 15r^2 R\sin\theta + 24R^2 r)\, dr d\theta$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

$$\iint_{S_3} X d\mathbf{S} = k \iint_D (6r\cos\theta, 2r\sin\theta, 96R^2 - 32r^2 - 64Rr\sin\theta)(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2Rr, r)\,dr\,d\theta$$

$$= 4k \int_0^{2\pi}\int_0^R (4r^3\cos^2\theta - 7r^3 - 15r^2R\sin\theta + 24R^2 r)\,dr\,d\theta$$

$$= 4kR^4 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - 5\sin\theta - \frac{41}{4})\,d\theta$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

$$\iint_{S_3} X d\mathbf{S} = k \iint_D (6r\cos\theta, 2r\sin\theta, 96R^2 - 32r^2 - 64Rr\sin\theta)(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2Rr, r)\,drd\theta$$

$$= 4k\int_0^{2\pi}\int_0^R (4r^3\cos^2\theta - 7r^3 - 15r^2R\sin\theta + 24R^2r)\,drd\theta$$

$$= 4kR^4\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta - 5\sin\theta - \frac{41}{4})d\theta$$

$$= -80kR^4\pi$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración - piso

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} X d\mathbf{S} &= k \iint_D (6r\cos\theta, 2r\sin\theta, 96R^2 - 32r^2 - 64Rr\sin\theta)(2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta + 2Rr, r)\,dr\,d\theta \\
&= 4k\int_0^{2\pi}\int_0^R (4r^3\cos^2\theta - 7r^3 - 15r^2R\sin\theta + 24R^2 r)\,dr\,d\theta \\
&= 4kR^4\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta - 5\sin\theta - \frac{41}{4})\,d\theta \\
&= -80kR^4\pi
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ entra calor por el piso

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- flujo del calor:

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_{S_1} X d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X d\mathbf{S} + \iint_{S_3} X d\mathbf{S}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- flujo del calor:

$$\begin{aligned}\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} X d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X d\mathbf{S} + \iint_{S_3} X d\mathbf{S} \\ &= -80k\pi R^4 - 16k\pi R^4 - 64k\pi R^4\end{aligned}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- flujo del calor:

$$\begin{aligned}\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} X d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X d\mathbf{S} + \iint_{S_3} X d\mathbf{S} \\ &= -80k\pi R^4 - 16k\pi R^4 - 64k\pi R^4 = -160k\pi R^4\end{aligned}$$

# construcción de un restaurante - parte 3

## refrigeración

- flujo del calor:

$$\begin{aligned}\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} X d\mathbf{S} + \iint_{S_2} X d\mathbf{S} + \iint_{S_3} X d\mathbf{S} \\ &= -80k\pi R^4 - 16k\pi R^4 - 64k\pi R^4 = -160k\pi R^4\end{aligned}$$

$\square$