El teorema de Green

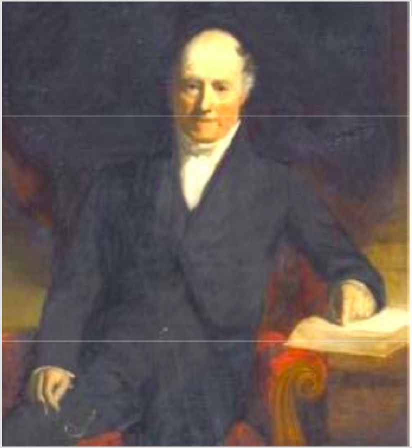
Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

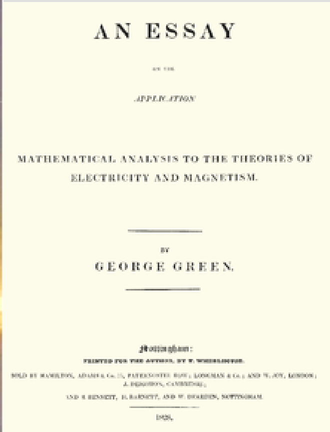
IMERL

16 de abril de 2011

green

george green





AN ESSAY

APPLICATION

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM.

GEORGE GREEN.

Nottingham:

gossip

gossip

- era hijo de un panadero

gossip

gossip

- era hijo de un panadero
- fue panadero y molinero

gossip

gossip

- era hijo de un panadero
- fue panadero y molinero
- fue prácticamente autodidacta

gossip

gossip

- era hijo de un panadero
- fue panadero y molinero
- fue prácticamente autodidacta
- publicó su famoso ensayo a los 35 años, a partir de lo que había leído en la biblioteca de suscripción de su pueblo

gossip

gossip

- era hijo de un panadero
- fue panadero y molinero
- fue prácticamente autodidacta
- publicó su famoso ensayo a los 35 años, a partir de lo que había leído en la biblioteca de suscripción de su pueblo
- entró a la universidad a los 40 años

contexto

contexto

el teorema de green surgió en conexión con la teoría del potencial

de qué se trata

de qué se trata

el teorema de green relaciona una integral de un campo a lo largo de una curva con una integral doble en la región encerrada por esa curva

regiones elementales

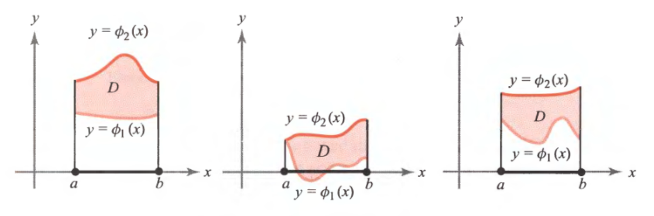
región y elemental

- D es una región y-elemental si

regiones elementales

región y elemental

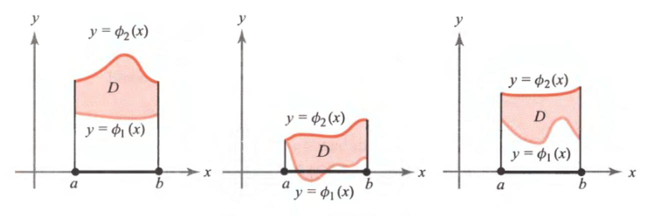
- D es una región y-elemental si



-

regiones elementales

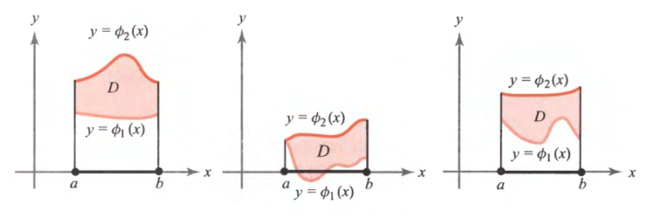
región y elemental

- D es una región y-elemental si
- 

- $\Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas

regiones elementales

región y elemental

- D es una región y-elemental si
- 

- $\Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas
- $\Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)$

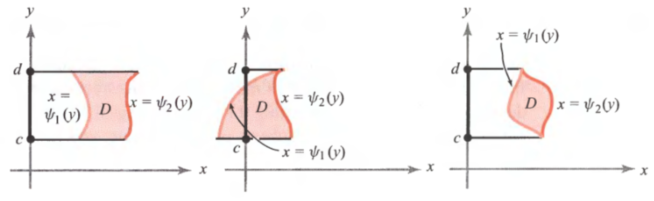
regiones elementales

región x-elemental

- D es una región x-elemental si

regiones elementales

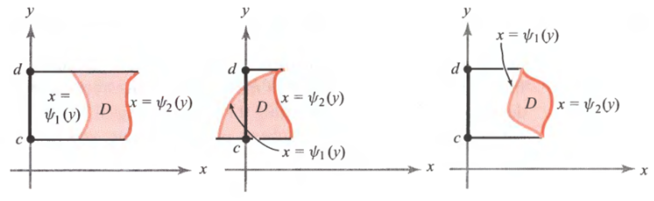
región x-elemental

- D es una región x-elemental si
- 

regiones elementales

región x-elemental

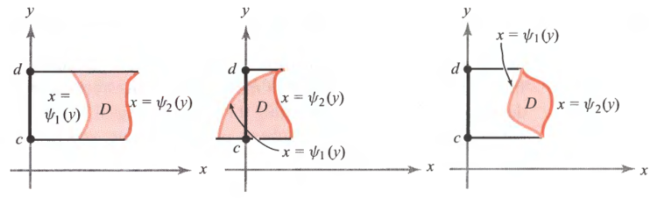
- D es una región x-elemental si



- $\Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuas

regiones elementales

región x-elemental

- D es una región x-elemental si
- 

- $\Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuas
- $\Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)$

regiones elementales

región elemental

D es región elemental si

regiones elementales

región elemental

D es región elemental si

1. D es región x-elemental y

regiones elementales

región elemental

D es región elemental si

1. D es región x-elemental y
2. D es región y-elemental

curvas borde

observación

- la curva borde de una región elemental es una curva simple

curvas borde

observación

- la curva borde de una región elemental es una curva simple
- (sin autointersecciones)

orientación de la curva orde

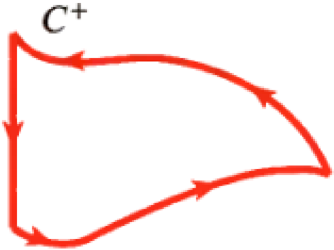
orientación de la curva borde

- orientación antihoraria o positiva

orientación de la curva orde

orientación de la curva borde

- orientación antihoraria o positiva



-

orientación de la curva orde

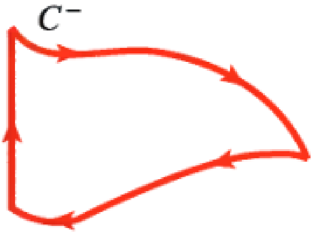
orientación de la curva borde

- orientación horaria o negativa

orientación de la curva orde

orientación de la curva borde

- orientación horaria o negativa



-

lema 1

lema 1

- D región y-elemental

lema 1

lema 1

- D región y-elemental
- C su curva borde, orientada en sentido antihorario

lema 1

lema 1

- D región y-elemental
- C su curva borde, orientada en sentido antihorario
- $P : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1

lema 1

lema 1

- D región y-elemental
- C su curva borde, orientada en sentido antihorario
- $P : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1
- $\Rightarrow$
$$\int_C P dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

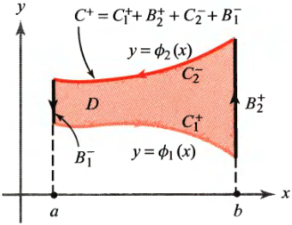
lema 1 - demostración

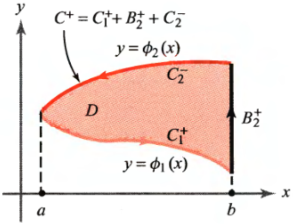
lema 1 - demostración

$$D \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x) \end{cases}$$

lema 1 - demostración

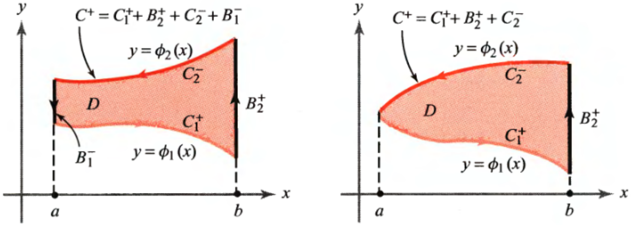
curva borde - notación 1





lema 1 - demostración

curva borde - notación 1



-
-

$$C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por un lado

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por un lado
- $$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy \quad =$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por un lado
- $$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por un lado
- $$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy &= \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy \\ &= \int_a^b P(x,\Phi_2(x)) - P(x,\Phi_2(x))dx\end{aligned}$$

lema 1 - demostración

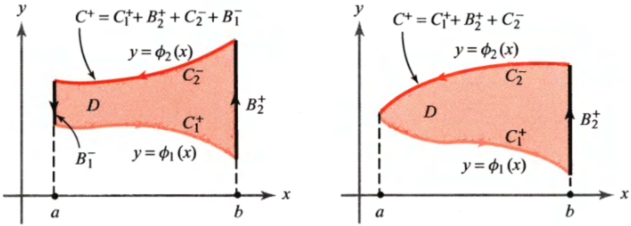
lema 1 - demostración

- por otro lado

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por otro lado



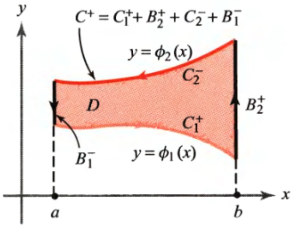
-
-

$$\int_{C^+} Pdx = \int_{C_1^+} Pdx + \int_{B_2^+} Pdx + \int_{C_2^-} Pdx + \int_{B_1^-} Pdx$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por otro lado



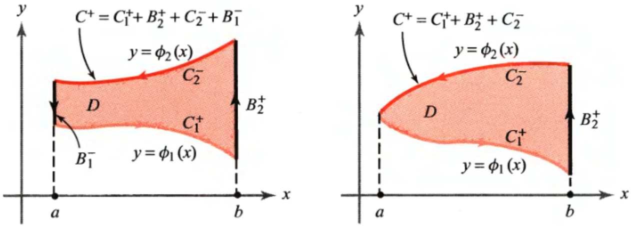
-
-

$$\int_{C^+} Pdx = \int_{C_1^+} Pdx + \int_{C_2^-} Pdx$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por otro lado



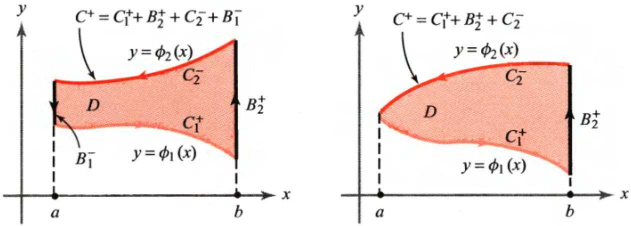
-
-

$$\int_{C^+} Pdx = \int_{C_1^+} Pdx - \int_{C_2^+} Pdx$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por otro lado



-
- $C_1^+ = (x, \Phi_1(x))$ y $C_2^+ = (x, \Phi_2(x))$ con $x \in [a, b]$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por otro lado
- $$\int_{C^+} P dx = \int_{C_1^+} P dx - \int_{C_2^+} P dx$$
- $C_1^+ = (x, \Phi_1(x))$ y $C_2^+ = (x, \Phi_2(x))$ con $x \in [a, b]$
- $$\int_{C_1^+} P dx - \int_{C_2^+} P dx = \int_a^b [P(x, \Phi_1(x)) - P(x, \Phi_2(x))] dx$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por otro lado
- $$\int_{C^+} Pdx = \int_{C_1^+} Pdx - \int_{C_2^+} Pdx$$
- $$\begin{aligned} \int_{C_1^+} Pdx - \int_{C_2^+} Pdx &= \int_a^b [P(x, \Phi_1(x)) - P(x, \Phi_2(x))]dx \\ &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \end{aligned}$$

lema 1 - demostración

lema 1 - demostración

- por otro lado
- $$\int_{C^+} P dx = \int_{C_1^+} P dx - \int_{C_2^+} P dx$$
- $$\begin{aligned} \int_{C_1^+} P dx - \int_{C_2^+} P dx &= \int_a^b [P(x, \Phi_1(x)) - P(x, \Phi_2(x))] dx \\ &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \end{aligned}$$

$\square$

lema 2

lema 2

- D región x-elemental

lema 2

lema 2

- D región x-elemental
- C su curva borde, orientada en sentido antihorario

lema 2

lema 2

- D región x-elemental
- C su curva borde, orientada en sentido antihorario
- $Q : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1

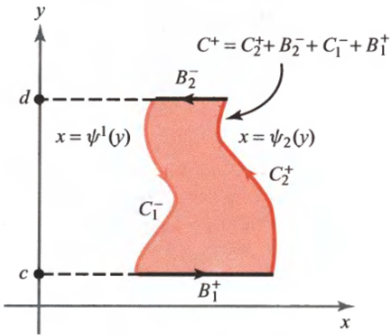
lema 2

lema 2

- D región x-elemental
- C su curva borde, orientada en sentido antihorario
- $Q : D \to \mathbb{R}$ de clase C^1
- $\Rightarrow$
$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

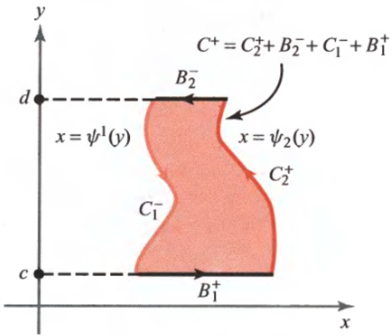
observación

curva borde - orientación



observación

curva borde - orientación



-
- $$C^+ = C_1^- + B_2^- + C_2^+ + B_1^+$$

teorema de green

teorema de green

- D región elemental

teorema de green

teorema de green

- D región elemental
- C curva borde orientada en sentido antihorario

teorema de green

teorema de green

- D región elemental
- C curva borde orientada en sentido antihorario
- $P, Q : D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1

teorema de green

teorema de green

- D región elemental
- C curva borde orientada en sentido antihorario
- $P, Q : D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1
- $\Rightarrow$

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

teorema de green

teorema de green

- D región elemental

teorema de green

teorema de green

- D región elemental
- C curva borde orientada en sentido anithorario

teorema de green

teorema de green

- D región elemental
- C curva borde orientada en sentido anithorario
- $X : D \to \mathbb{R}^2$ campo C^1

teorema de green

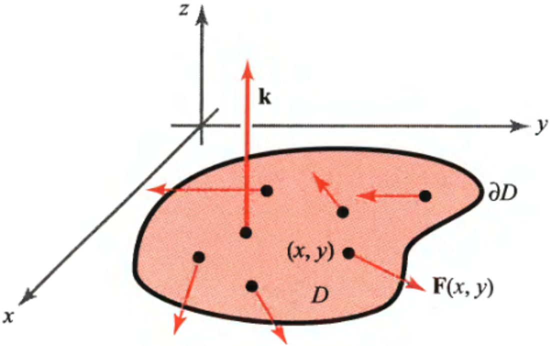
teorema de green

- D región elemental
- C curva borde orientada en sentido anithorario
- $X : D \to \mathbb{R}^2$ campo C^1
- $\Rightarrow$

$$\int_C X d\alpha = \iint_D \text{rot}(X)\mathbf{k}\, dxdy$$

forma vectorial del teorema de green

forma vectorial del teorema de green



generalización del teorema de green

generalización del teorema de green

- el teorema de green es válido

generalización del teorema de green

generalización del teorema de green

- el teorema de green es válido
- para toda región D

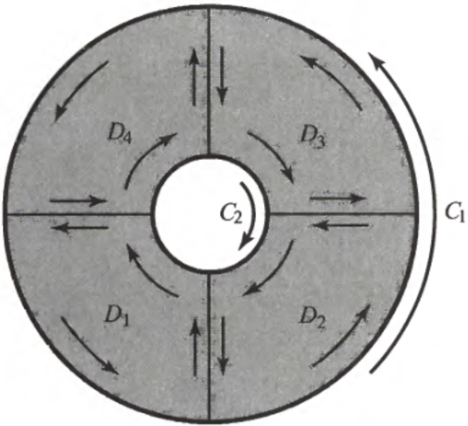
generalización del teorema de green

generalización del teorema de green

- el teorema de green es válido
- para toda región D
- que sea unión finita de regiones elementales

ejemplo

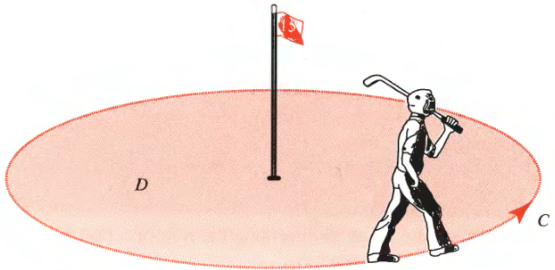
ejemplo



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

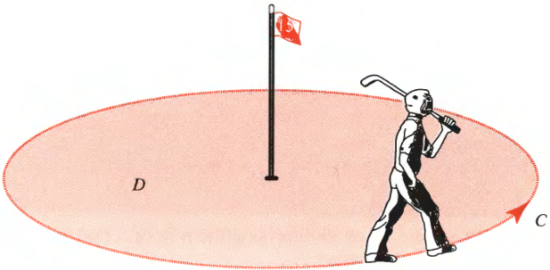
orientación

llamamos ∂D a la curva borde orientada como



orientación

llamamos ∂D a la curva borde orientada como



si caminamos alrededor de D, D queda a la izquierda

teorema de green - final

teorema de green - final

- D unión finita de regiones elementales

teorema de green - final

teorema de green - final

- D unión finita de regiones elementales
- X campo plano C^1

teorema de green - final

teorema de green - final

- D unión finita de regiones elementales
- X campo plano C^1
- $\Rightarrow$

$$\int_{\partial D} X d\alpha = \iint_D \mathrm{rot}(X).\mathbf{k}\,dxdy$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x, y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x,y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\int_{\partial D} Pdx + Qdy \quad =$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x, y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t] dt$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x,y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\begin{aligned} \int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t] dt \\ &= \left[\frac{\cos^2}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x, y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\begin{aligned}\int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t]dt \\ &= \left[\frac{\cos^2}{2} - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x,y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\begin{aligned} \int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t]dt \\ &= \left[\frac{\cos^2}{2} - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$
- $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy =$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x,y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\begin{aligned} \int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t] dt \\ &= \left[\frac{\cos^2}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

- $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D ydxdy$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x,y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t] dt = \left[\frac{\cos^2}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

- $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D ydxdy = 0$$

ejemplo 1

ejemplo 1

comprobar el teorema de green para el campo $X(x,y) = (x, xy)$ donde D es el círculo unidad

- $$\begin{aligned} \int_{\partial D} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t] dt \\ &= \left[\frac{\cos^2}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

- $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D ydxdy = 0$$

  por simetría de D

área de una región

área de una región

- D unión finita de regiones elementales

área de una región

área de una región

- D unión finita de regiones elementales
- ∂D curva cerrada simple

área de una región

área de una región

- D unión finita de regiones elementales
- ∂D curva cerrada simple
- $\Rightarrow$
$$\text{área}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

demostración

demostración

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \quad =$$

demostración

demostración

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \quad = \quad \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{-\partial y}{\partial y}\right) dxdy$$

demostración

demostración

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx &= \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{-\partial y}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint_D (1+1)\,dxdy
\end{aligned}
$$

demostración

demostración

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx &= \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{-\partial y}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint_D (1+1)dxdy = \text{área}(D) \end{aligned}$$

demostración

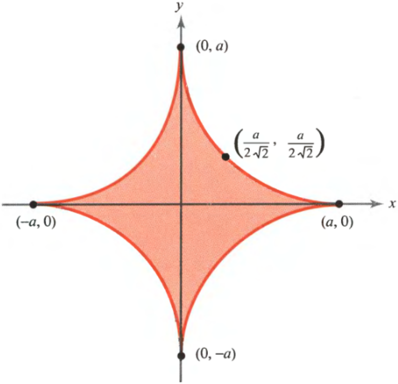
demostración

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx &= \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{-\partial y}{\partial y}\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint_D (1+1)dxdy = \text{área}(D) \end{aligned}$$

$\square$

ejemplo 2

ejemplo 2



calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $$\text{área}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \\ &= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt \end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
-
$$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \\ &= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt \end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \\ &= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt \\ &= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt \end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $$\begin{aligned} \text{área}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \\ &= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt \\ &= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 tdt \\ &= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2tdt \end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
-

$$\begin{aligned}
\text{área}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \\
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt \\
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt \\
&= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{16}a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)dt
\end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
-

$$
\begin{aligned}
\text{área}(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx \\
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t\cos^4 t + \cos^2 t\sin^4 t)dt \\
&= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t dt \\
&= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{16}a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)dt \\
&= \frac{3}{8}\pi a^2
\end{aligned}
$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $X(x,y) = (xy^2, y + x)$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $X(x, y) = (xy^2, y + x)$
- Integrar rot $X.\mathbf{k}$ en D

ejemplo 3

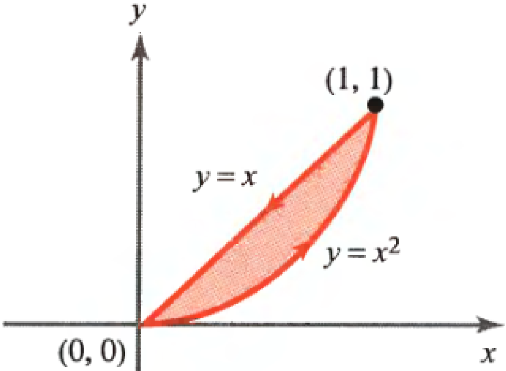
ejemplo 3

- $X(x, y) = (xy^2, y + x)$
- Integrar rot $X.\mathbf{k}$ en D
- donde D región del 1er cuadrante acotada por las curvas:

ejemplo 3

ejemplo 3

- $X(x,y) = (xy^2, y+x)$
- Integrar rot $X.\mathbf{k}$ en D
- donde D región del 1er cuadrante acotada por las curvas:



ejemplo 3

ejemplo 3

- $\int\int_D \mathrm{rot}\, X\mathbf{k} dxdy = -\int_{\alpha_1} X d\alpha + \int_{\alpha_2} X d\alpha$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\iint_D \text{rot}\, X\mathbf{k}dxdy = -\int_{\alpha_1} Xd\alpha + \int_{\alpha_2} Xd\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\int\int_D \text{rot}\, X\mathbf{k} dxdy = -\int_{\alpha_1} X d\alpha + \int_{\alpha_2} X d\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
- $$\int_{\alpha_1} X d\alpha =$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\int\int_D \text{rot}\, X\mathbf{k}dxdy = -\int_{\alpha_1} Xd\alpha + \int_{\alpha_2} Xd\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
- $$\int_{\alpha_1} Xd\alpha = \int_0^1 (t^3 + 2t)dt$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\int\int_D \operatorname{rot} X\mathbf{k}dxdy = -\int_{\alpha_1} Xd\alpha + \int_{\alpha_2} Xd\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
- $$\int_{\alpha_1} Xd\alpha = \int_0^1 (t^3 + 2t)dt = \frac{5}{4}$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\iint_D \text{rot}\, X\mathbf{k}dxdy = -\int_{\alpha_1} Xd\alpha + \int_{\alpha_2} Xd\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
- $$\int_{\alpha_1} Xd\alpha = \int_0^1 (t^3 + 2t)dt = \frac{5}{4}$$
- $$\int_{\alpha_2} Xd\alpha = \int_0^1 (t^5 + 2t^2 + 2t^3)dt$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\iint_D \text{rot}\, X\mathbf{k}dxdy = -\int_{\alpha_1} Xd\alpha + \int_{\alpha_2} Xd\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
- $$\int_{\alpha_1} Xd\alpha = \int_0^1 (t^3 + 2t)dt = \frac{5}{4}$$
- $$\int_{\alpha_2} Xd\alpha = \int_0^1 (t^5 + 2t^2 + 2t^3)dt = \frac{4}{3}$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\iint_D \operatorname{rot} X\mathbf{k}\,dxdy = -\int_{\alpha_1} X d\alpha + \int_{\alpha_2} X d\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
- $$\int_{\alpha_1} X d\alpha = \int_0^1 (t^3 + 2t)dt = \frac{5}{4}$$
- $$\int_{\alpha_2} X d\alpha = \int_0^1 (t^5 + 2t^2 + 2t^3)dt = \frac{4}{3}$$
- $\Rightarrow \iint_D \operatorname{rot} X\mathbf{k}\,dxdy = \frac{4}{3} - \frac{5}{4}$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\iint_D \text{rot}\, X\mathbf{k}dxdy = -\int_{\alpha_1} Xd\alpha + \int_{\alpha_2} Xd\alpha$
- donde $\alpha_1(t) = (t, t)$ y $\alpha_2(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, 1]$
- $$\int_{\alpha_1} Xd\alpha = \int_0^1 (t^3 + 2t)dt = \frac{5}{4}$$
- $$\int_{\alpha_2} Xd\alpha = \int_0^1 (t^5 + 2t^2 + 2t^3)dt = \frac{4}{3}$$
- $\Rightarrow \iint_D \text{rot}\, X\mathbf{k}dxdy = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}$