El teorema de Stokes

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

14 de mayo de 2012

stokes

sir george stokes

gossip

gossip

- fue presidente de la Royal Society de Inglaterra

gossip

gossip

- fue presidente de la Royal Society de Inglaterra
- fue nombrado Baronet en 1889

gossip

gossip

- fue presidente de la Royal Society de Inglaterra
- fue nombrado Baronet en 1889
- se graduó con honores en Cambridge

gossip

gossip

- fue presidente de la Royal Society de Inglaterra
- fue nombrado Baronet en 1889
- se graduó con honores en Cambridge
- fue distinguido con premios y doctorados honoríficos en muchas universidades

regiones elementales

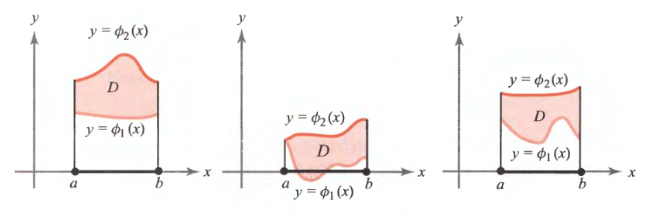
región y elemental

- D es una región y-elemental si

regiones elementales

región y elemental

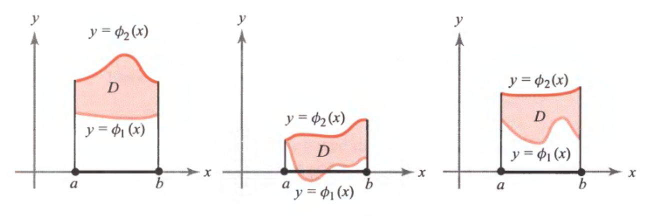
- D es una región y-elemental si



-

regiones elementales

región y elemental

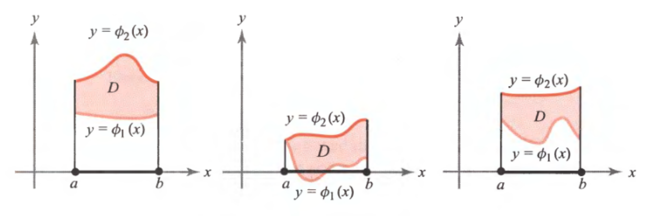
- D es una región y-elemental si
- 

- $\Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas

regiones elementales

región y elemental

- D es una región y-elemental si



-
- $\Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas
- $\Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)$

regiones elementales

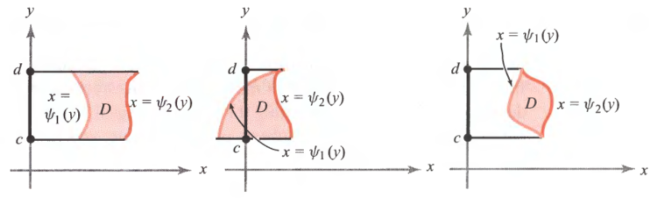
región x-elemental

- D es una región x-elemental si

regiones elementales

región x-elemental

- D es una región x-elemental si

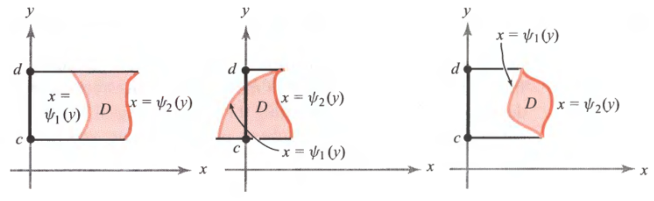


-

regiones elementales

región x-elemental

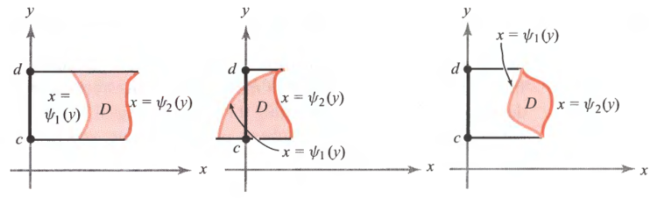
- D es una región x-elemental si



-
- $\Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuas

regiones elementales

región x-elemental

- D es una región x-elemental si
- 

- $\Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continuas
- $\Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)$

regiones elementales

región elemental

D es región elemental si

regiones elementales

región elemental

D es región elemental si

1. D es región x-elemental y

regiones elementales

región elemental

D es región elemental si

1. D es región x-elemental y
2. D es región y-elemental

curvas borde

observación

- la curva borde de una región elemental es una curva simple

curvas borde

observación

- la curva borde de una región elemental es una curva simple
- (sin autointersecciones)

orientación de la curva orde

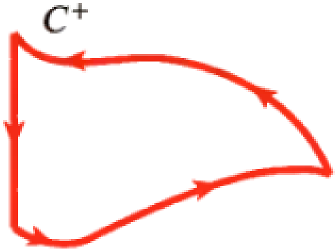
orientación de la curva borde

- orientación antihoraria o positiva

orientación de la curva orde

orientación de la curva borde

- orientación antihoraria o positiva



-

orientación de la curva orde

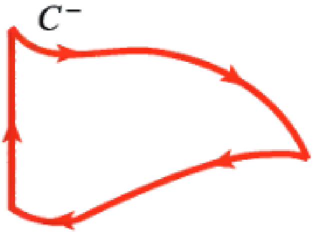
orientación de la curva borde

- orientación horaria o negativa

orientación de la curva orde

orientación de la curva borde

- orientación horaria o negativa



-

región de green

región de green

- D es una región de Green

región de green

región de green

- D es una región de Green
- si es unión finita de regiones elementales D_n,

región de green

región de green

- D es una región de Green
- si es unión finita de regiones elementales D_n,
- y ∂D está orientado de forma que

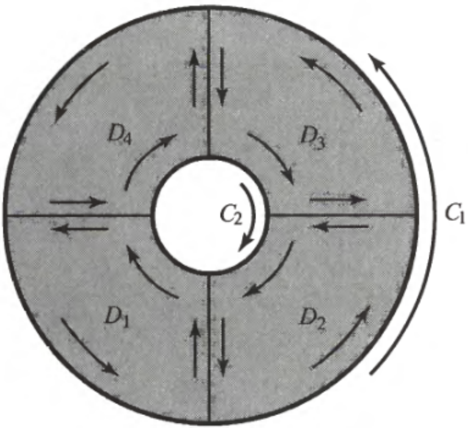
región de green

región de green

- D es una región de Green
- si es unión finita de regiones elementales D_n,
- y ∂D está orientado de forma que
- cada ∂D_n está orientado en sentido anti-horario

región de green

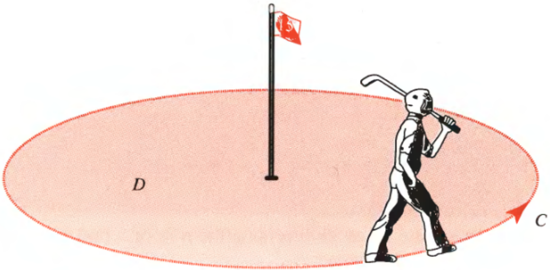
región de green



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

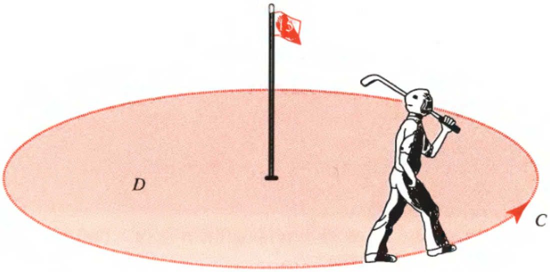
región de green

región de green



región de green

región de green



si caminamos a lo largo de ∂D, D queda a la izquierda

teorema de stokes

teorema de stokes

- D región de Green

teorema de stokes

teorema de stokes

- D región de Green
- $\Phi : D \to S$ superficie paramétrica ∂S orientada como ∂D

teorema de stokes

teorema de stokes

- D región de Green
- $\Phi : D \to S$ superficie paramétrica ∂S orientada como ∂D
- $X : S \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial C^1

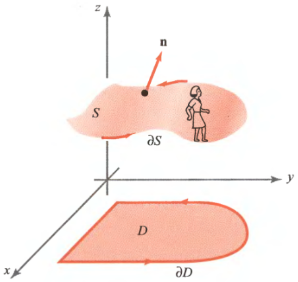
teorema de stokes

teorema de stokes

- D región de Green
- $\Phi : D \to S$ superficie paramétrica ∂S orientada como ∂D
- $X : S \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial C^1
- $\Rightarrow$
$$\iint_S \operatorname{rot} X . d\vec{S} = \int_{\partial S} X d\alpha$$

observación

orientación de ∂S



// cuando se camina a lo largo de ∂S, S queda a la izquierda

observación

superficies sin borde

- si S superficie cerrada (sin borde)

observación

superficies sin borde

- si S superficie cerrada (sin borde)
- entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S} = 0$$

demostración

demostración

- haremos la demostración sólo para superficies

demostración

demostración

- haremos la demostración sólo para superficies
- $z = f(x, y)$ con $f \in C^2$

demostración

demostración

- haremos la demostración sólo para superficies
- $z = f(x, y)$ con $f \in C^2$
- $X = (P, Q, R)$

demostración

demostración

- haremos la demostración sólo para superficies
- $z = f(x, y)$ con $f \in C^2$
- $X = (P, Q, R)$
- $\operatorname{rot} X = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

demostración

demostración

- recordemos que $\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$

demostración

demostración

- recordemos que $\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$
- $\Rightarrow n = (-z_x, -z_y, 1)$

demostración

demostración

- recordemos que $\Phi(x, y) = (x, y, z(x, y))$
- $\Rightarrow n = (-z_x, -z_y, 1)$
- $$\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S} = \iint_D \operatorname{rot} X . n \, dS$$

demostración

demostración

- entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} X \, d\vec{S} = \iint_D -(R_y - Q_z) z_x - (P_z - R_x) z_y + (Q_x - P_y) dxdy$$

demostración

demostración

- entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} X \, d\vec{S} = \iint_D -(R_y - Q_z)z_x - (P_z - R_x)z_y + (Q_x - P_y)dxdy$$

- por otro lado

demostración

demostración

- entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} X \, d\vec{S} = \iint_D -(R_y - Q_z)z_x - (P_z - R_x)z_y + (Q_x - P_y)dxdy$$

- por otro lado
-

$$\int_{\partial S} X d\alpha = \int_a^b P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z} \, dt$$

demostración

demostración

- entonces

$$\iint_S \operatorname{rot} X \, d\vec{S} = \iint_D -(R_y - Q_z)z_x - (P_z - R_x)z_y + (Q_x - P_y)dxdy$$

- por otro lado
-

$$\int_{\partial S} X d\alpha = \int_a^b P\dot{x} + Q\dot{y} + R\dot{z}\, dt$$

- por regla de la cadena

$$\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y}$$

demostración

demostración

- reemplazando:

$$\int_{\partial S} X d\alpha \quad = \quad \int_a^b (P + Rz_x)\dot{x} + (Q + Rz_y)\dot{y}\, dt$$

demostración

demostración

- reemplazando:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} X d\alpha &= \int_a^b (P + Rz_x)\dot{x} + (Q + Rz_y)\dot{y}\, dt \\ &= \int_{\partial D} (P + Rz_x)dx + (Q + Rz_y)dy \end{aligned}$$

demostración

demostración

- reemplazando:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} X d\alpha &= \int_a^b (P + Rz_x)\dot{x} + (Q + Rz_y)\dot{y}\, dt \\ &= \int_{\partial D} (P + Rz_x)dx + (Q + Rz_y)dy\end{aligned}$$

aplicando teorema de Green

$$= \iint_D \frac{\partial(Q+Rz_y)}{\partial x} - \frac{\partial(P+Rz_x)}{\partial y} dxdy$$

demostración

demostración

- reemplazando:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial S} X d\alpha &= \int_a^b (P + Rz_x)\dot{x} + (Q + Rz_y)\dot{y}\, dt \\
&= \int_{\partial D} (P + Rz_x)dx + (Q + Rz_y)dy
\end{aligned}
$$

aplicando teorema de Green

$$
\begin{aligned}
&= \iint_D \frac{\partial(Q+Rz_y)}{\partial x} - \frac{\partial(P+Rz_x)}{\partial y} dxdy \\
&= \iint_D (Q_x + R_x z_y + Rz_{yx}) - (P_y + R_y z_x + Rz_{xy})\, dxdy
\end{aligned}
$$

demostración

demostración

- reemplazando:

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} X d\alpha &= \int_a^b (P + Rz_x)\dot{x} + (Q + Rz_y)\dot{y}\, dt \\ &= \int_{\partial D} (P + Rz_x)dx + (Q + Rz_y)dy\end{aligned}$$

aplicando teorema de Green

$$\begin{aligned} &= \iint_D \frac{\partial(Q+Rz_y)}{\partial x} - \frac{\partial(P+Rz_x)}{\partial y} dxdy \\ &= \iint_D (Q_x + R_x z_y + Rz_{yx}) - (P_y + R_y z_x + Rz_{xy})\, dxdy \\ &= \iint_S \mathrm{rot}\, X . d\vec{X}\end{aligned}$$

demostración

demostración

- reemplazando:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} X d\alpha &= \int_a^b (P + Rz_x)\dot{x} + (Q + Rz_y)\dot{y}\, dt \\
&= \int_{\partial D} (P + Rz_x)dx + (Q + Rz_y)dy
\end{aligned}$$

aplicando teorema de Green

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \frac{\partial(Q+Rz_y)}{\partial x} - \frac{\partial(P+Rz_x)}{\partial y} dxdy \\
&= \iint_D (Q_x + R_x z_y + Rz_{yx}) - (P_y + R_y z_x + Rz_{xy})\, dxdy \\
&= \iint_S \operatorname{rot} X . d\vec{X} \qquad \square
\end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (ye^z, xe^z, xye^z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (ye^z, xe^z, xye^z)$
- demostrar que la integral a lo largo de cualquier curva simple cerrada que bordea una superficie S vale 0

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (ye^z, xe^z, xye^z)$
- demostrar que la integral a lo largo de cualquier curva simple cerrada que bordea una superficie S vale 0
- $\int_\alpha X d\alpha = \iint_S \operatorname{rot} X\, d\vec{S}$ x Stokes

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (ye^z, xe^z, xye^z)$
- demostrar que la integral a lo largo de cualquier curva simple cerrada que bordea una superficie S vale 0
- $\int_\alpha X d\alpha = \iint_S \text{rot}\, X \, d\vec{S}$ x Stokes
- $$\text{rot}\, X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (ye^z, xe^z, xye^z)$
- demostrar que la integral a lo largo de cualquier curva simple cerrada que bordea una superficie S vale 0
- $\int_\alpha X d\alpha = \iint_S \operatorname{rot} X \, d\vec{S}$ x Stokes
- $$\operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (ye^z, xe^z, xye^z)$
- demostrar que la integral a lo largo de cualquier curva simple cerrada que bordea una superficie S vale 0
- $\int_\alpha X d\alpha = \iint_S \operatorname{rot} X \, d\vec{S}$ x Stokes
- $$\operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\square$

ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar $\int_\alpha -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$

ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar $\int_\alpha -y^3dx + x^3dy - z^3dz$
- donde α es la $\cap$ del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$

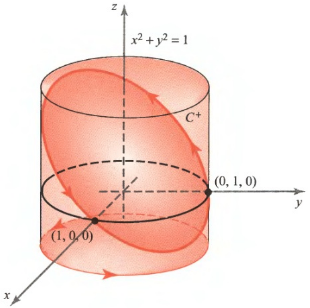
ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar $\int_{\alpha} -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$
- donde α es la $\cap$ del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$
- la orientación corresponde al sentido antihorario en el plano xy

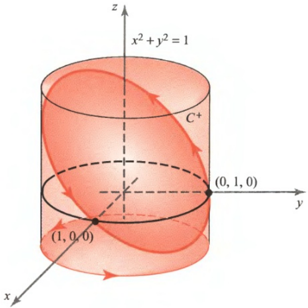
ejemplo 2

ejemplo 2



ejemplo 2

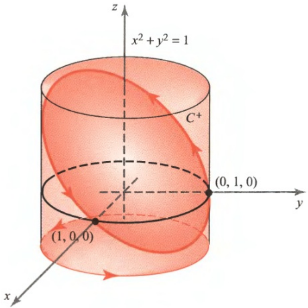
ejemplo 2



- S dada por $z = 1 - x - y$

ejemplo 2

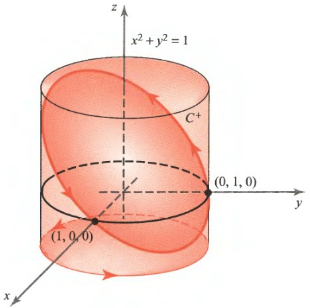
ejemplo 2



- S dada por $z = 1 - x - y$
- sobre

ejemplo 2

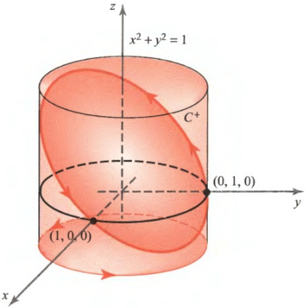
ejemplo 2



- S dada por $z = 1 - x - y$
- sobre
- $$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ejemplo 2

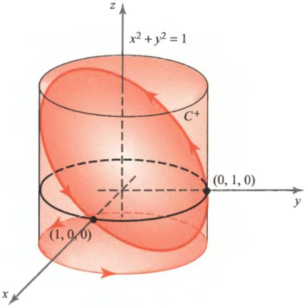
ejemplo 2



$$\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S} = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy$$

ejemplo 2

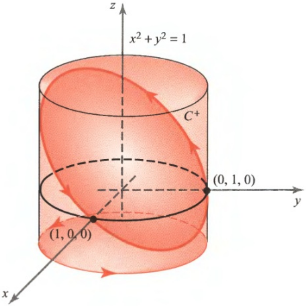
ejemplo 2



$$\iint_S \text{rot}\, X d\vec{S} = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy$$
$$= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr$$

ejemplo 2

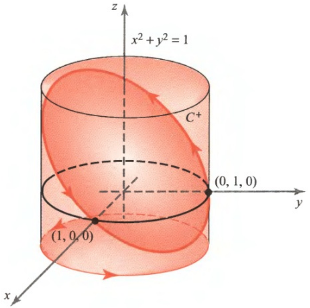
ejemplo 2



$$\begin{aligned}\iint_S \text{rot}\, X d\vec{S} &= 3 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy \\ &= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr \\ &= 6\pi \int_0^1 r^3 dr\end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$
\begin{aligned}
\iint_S \text{rot}\, X d\vec{S} &= 3 \iint_D (x^2 + y^2) dxdy \\
&= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta dr \\
&= 6\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

ejemplo 3

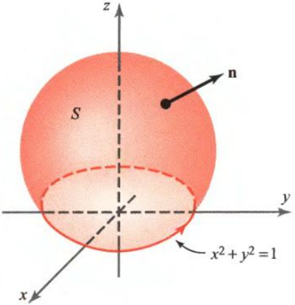
ejemplo 3

- $X = (y, -x, e^{xz})$

ejemplo 3

ejemplo 3

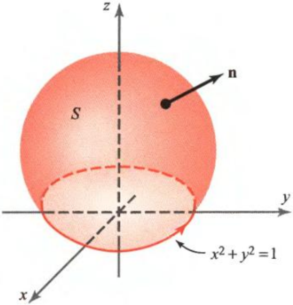
- $X = (y, -x, e^{xz})$
- S la superficie de la figura



ejemplo 3

ejemplo 3

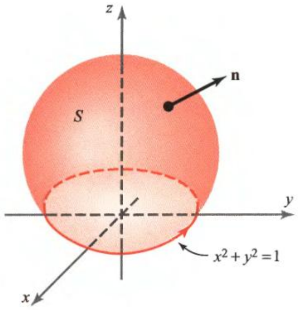
- $X = (y, -x, e^{xz})$
- S la superficie de la figura
- calcular $\iint_S \operatorname{rot} X . d\vec{S}$



ejemplo 3

ejemplo 3

- $X = (y, -x, e^{xz})$
- S la superficie de la figura
- calcular $\iint_S \operatorname{rot} X . d\vec{S}$

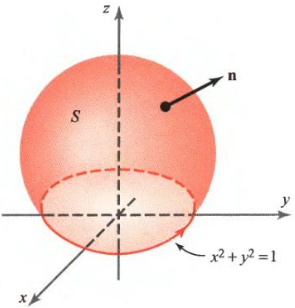


- $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S} = \int_{\partial S} X d\alpha$ x Stokes

ejemplo 3

ejemplo 3

- $X = (y, -x, e^{xz})$
- S la superficie de la figura
- calcular $\int\int_S \text{rot}\, X.d\vec{S}$

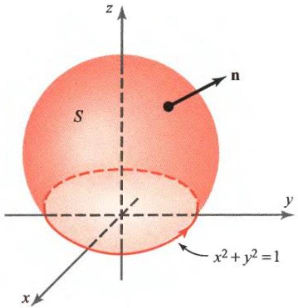


- $\int\int_S \text{rot}\, Xd\vec{S} = \int_{\partial S} Xd\alpha$ x Stokes
- $$\int_\alpha Xd\alpha \quad = \quad \int_\alpha ydx - xdy$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $X = (y, -x, e^{xz})$
- S la superficie de la figura
- calcular $\int\int_S \operatorname{rot} X . d\vec{S}$

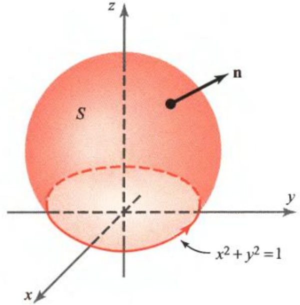


- $\int\int_S \operatorname{rot} X d\vec{S} = \int_{\partial S} X d\alpha$ x Stokes
- $$\begin{aligned} \int_\alpha X d\alpha &= \int_\alpha y dx - x dy \\ &= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \end{aligned}$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $X = (y, -x, e^{xz})$
- S la superficie de la figura
- calcular $\int\int_S \operatorname{rot} X . d\vec{S}$



- $\int\int_S \operatorname{rot} X d\vec{S} = \int_{\partial S} X d\alpha$ x Stokes
- $$\begin{aligned} \int_\alpha X d\alpha &= \int_\alpha y dx - x dy \\ &= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

interpretación física

interpretación física

- X campo de velocidades de un fluido

interpretación física

interpretación física

- X campo de velocidades de un fluido
- n vector unitario

interpretación física

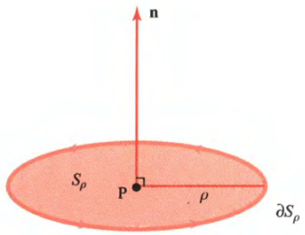
interpretación física

- X campo de velocidades de un fluido
- n vector unitario
- S_ρ disco de centro P y radio ρ perpendicular a n

interpretación física

interpretación física

- X campo de velocidades de un fluido
- n vector unitario
- S_ρ disco de centro P y radio ρ perpendicular a n



interpretación física

interpretación física

- por teorema valor medio:

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{rot} X.ndS = \operatorname{rot} X(Q).n.A(S_\rho) = \operatorname{rot} X(Q).n\pi\rho^2$$

interpretación física

interpretación física

- por teorema valor medio:

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{rot} X.ndS = \operatorname{rot} X(Q).n.A(S_\rho) = \operatorname{rot} X(Q).n\pi\rho^2$$

- $$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{\partial S_\rho} Xd\alpha \quad = \quad \lim_{\rho\to 0} \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} Xd\vec{S}$$

interpretación física

interpretación física

- por teorema valor medio:

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{rot} X.ndS = \operatorname{rot} X(Q).n.A(S_\rho) = \operatorname{rot} X(Q).n\pi\rho^2$$

- $$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{\partial S_\rho} Xd\alpha &= \lim_{\rho\to 0} \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} Xd\vec{S} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \operatorname{rot} X(Q).n \end{aligned}$$

interpretación física

interpretación física

- por teorema valor medio:

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{rot} X.ndS = \operatorname{rot} X(Q).n.A(S_\rho) = \operatorname{rot} X(Q).n\pi\rho^2$$

- $$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{\partial S_\rho} Xd\alpha &= \lim_{\rho\to 0} \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} Xd\vec{S} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \operatorname{rot} X(Q).n \\ &= \operatorname{rot} X(P).n \end{aligned}$$

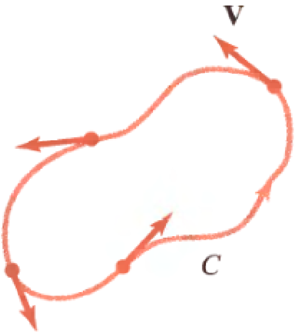
interpretación física

interpretación física

$X(P).n$ es la circulación por unidad de área en P en una superficie perpendicular a n

interpretación física

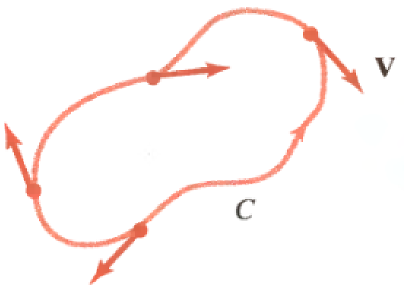
interpretación física



$$\int_C X d\alpha > 0$$

interpretación física

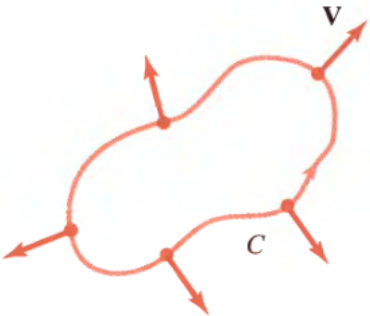
interpretación física



$$\int_C X d\alpha < 0$$

interpretación física

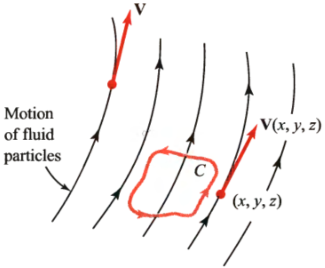
interpretación física



$$\int_C X d\alpha = 0$$

interpretación física

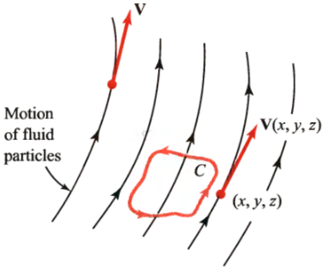
ejemplo 4



- X campo de velocidades de un fluido

interpretación física

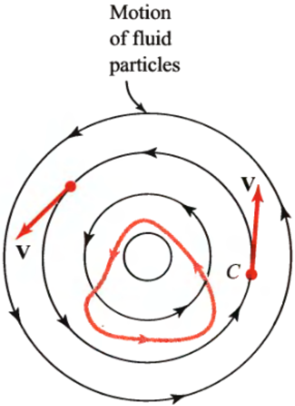
ejemplo 4



- X campo de velocidades de un fluido
- la circulación alrededor de $\mathcal{C}$ es cero

interpretación física

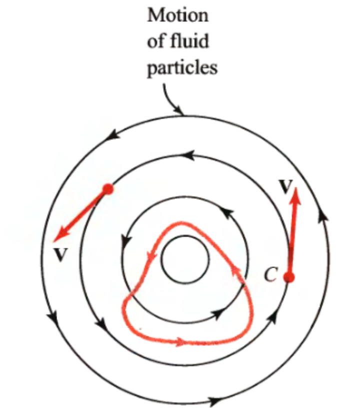
ejemplo 4



- X campo de velocidades de un fluido

interpretación física

ejemplo 4



- X campo de velocidades de un fluido
- la circulación alrededor de $\mathcal{C}$ es distinta de cero