Ley de Gauss

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

30 de mayo de 2012

ley de Gauss

ley de Gauss

- S superficie cerrada en $\mathbb{R}^3$

ley de Gauss

ley de Gauss

- S superficie cerrada en $\mathbb{R}^3$
- entonces

ley de Gauss

ley de Gauss

- S superficie cerrada en $\mathbb{R}^3$
- entonces
- $$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3}.n\,dS = 0 \qquad \text{si} \quad \vec{0} \notin \operatorname{int} S$$

ley de Gauss

ley de Gauss

- S superficie cerrada en $\mathbb{R}^3$
- entonces
- $$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3}.n\,dS = 0 \qquad \text{si} \quad \vec{0} \notin \operatorname{int} S$$
- $$\iint_S \frac{\vec{r}}{r^3}.n\,dS = 4\pi \qquad \text{si} \quad \vec{0} \in \operatorname{int} S$$

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y div $X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y div $X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$
- recordar:

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y div $X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$
- recordar:
- $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, $r_z = \frac{z}{r}$

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y div $X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$
- recordar:
- $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, $r_z = \frac{z}{r}$
- $\Rightarrow \left(\frac{x}{r^3}\right)_x =$

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y div $X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$
- recordar:
- $r_x = \frac{x}{r}, r_y = \frac{y}{r}, r_z = \frac{z}{r}$
- $\Rightarrow \left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{r^3 - 3xr^2 r_x}{r^6}$

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y div $X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$
- recordar:
- $r_x = \frac{x}{r}, r_y = \frac{y}{r}, r_z = \frac{z}{r}$
- $\Rightarrow \left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{r^3 - 3xr^2 r_x}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y $\operatorname{div} X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$
- recordar:
- $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, $r_z = \frac{z}{r}$
- $\Rightarrow \left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{r^3 - 3xr^2 r_x}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- $\operatorname{div} X = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5}$

demostración

demostración

- $X = \frac{\vec{r}}{r^3}$ es C^1 y div $X \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus 0$
- recordar:
- $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, $r_z = \frac{z}{r}$
- $\Rightarrow \left(\frac{x}{r^3}\right)_x = \frac{r^3 - 3xr^2 r_x}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$
- div $X = \frac{3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \notin \text{int}\, S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \notin \text{int}\, S$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \notin \text{int } S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \notin \text{int } S$
- por Gauss:

demostración

demostración - caso $\vec{0} \notin \text{int } S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \notin \text{int } S$
- por Gauss:
- $$\iint_S X.n \, dS =$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \notin \text{int}\, S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \notin \text{int}\, S$
- por Gauss:
- $$\iint_S X.n\, dS = \iiint_{\text{int}\, S} \text{div}\, X\, dV$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \notin \text{int } S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \notin \text{int } S$
- por Gauss:
- $$\iint_S X.n\, dS = \iiint_{\text{int } S} \text{div } X\, dV = 0$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \text{int } S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \in \text{int } S$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \in \operatorname{int} S$
- $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset \operatorname{int} S$

demostración

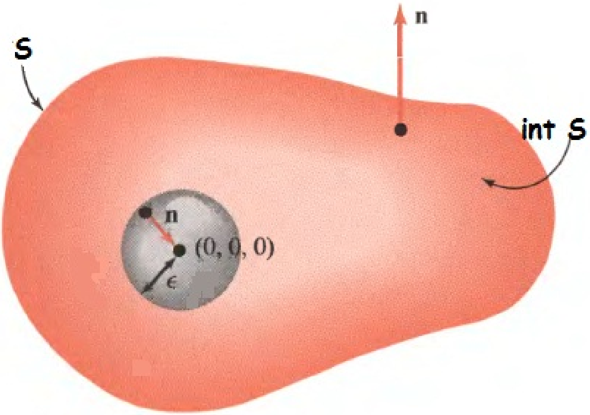
demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- S superficie cerrada tal que $\vec{0} \in \operatorname{int} S$
- $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset \operatorname{int} S$
- probaremos que

$$\iint_S X.n\, dS = \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.n\, dS$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \text{int}\, S$



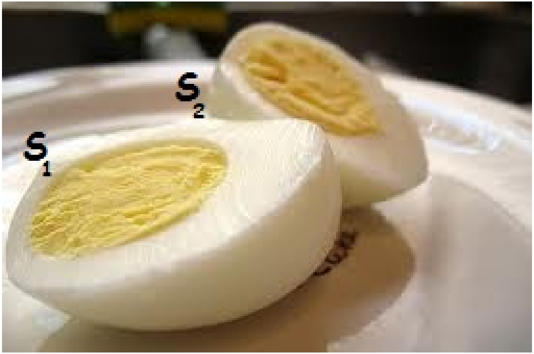
demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \text{int}\, S$

realizamos un corte

demostración

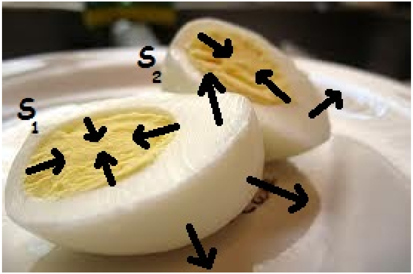
demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$



realizamos un corte

demostración

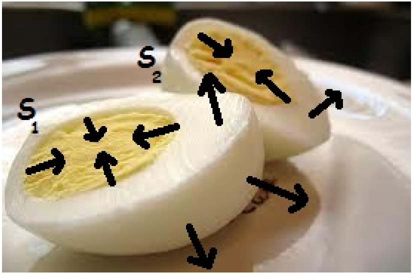
demostración - caso $\vec{0} \in \text{int}\, S$



vectores normales

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

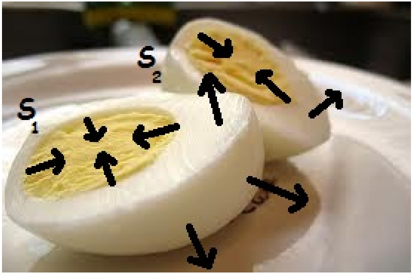


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\, dS =$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \text{int } S$

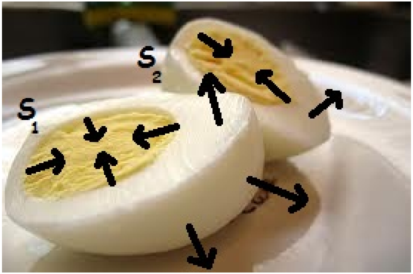


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\, dS = \iiint_{V_1} \operatorname{div} X\, dV$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

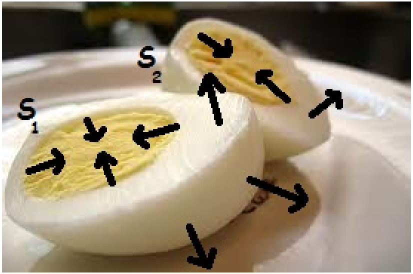


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\,dS = \iiint_{V_1} \operatorname{div} X\,dV = 0$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \text{int}\, S$

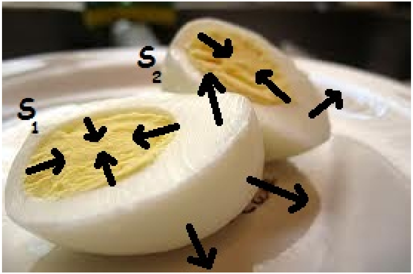


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\, dS = \iiint_{V_1} \text{div}\, X\, dV = 0$
- $\iint_{S_2} X.n\, dS =$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

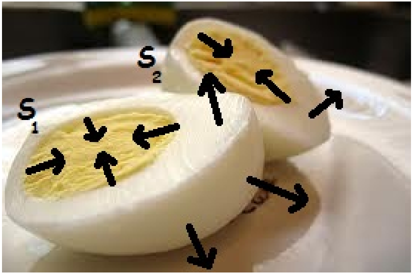


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\, dS = \iiint_{V_1} \operatorname{div} X\, dV = 0$
- $\iint_{S_2} X.n\, dS = \iiint_{V_2} \operatorname{div} X.ndV$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

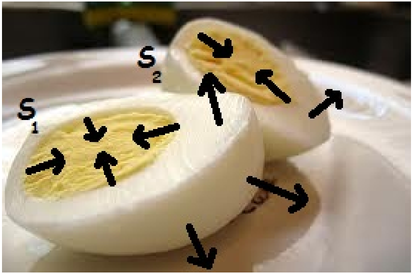


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\, dS = \iiint_{V_1} \operatorname{div} X\, dV = 0$
- $\iint_{S_2} X.n\, dS = \iiint_{V_2} \operatorname{div} X.n dV = 0$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

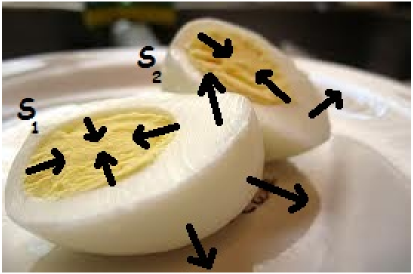


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\, dS = \iiint_{V_1} \operatorname{div} X\, dV = 0$
- $\iint_{S_2} X.n\, dS = \iiint_{V_2} \operatorname{div} X.n dV = 0$
- $\Rightarrow \iint_{S_1} X.n\, dS + \iint_{S_2} X.n\, dS$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \text{int } S$

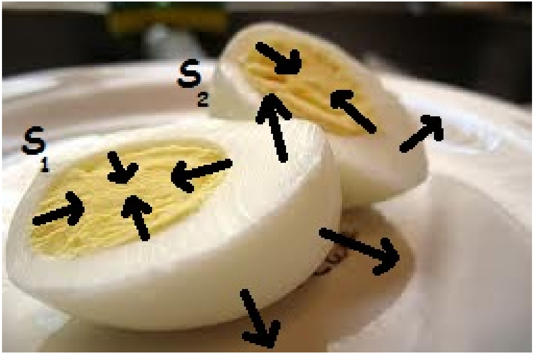


vectores normales

- Gauss: $\iint_{S_1} X.n\, dS = \iiint_{V_1} \text{div}\, X\, dV = 0$
- $\iint_{S_2} X.n\, dS = \iiint_{V_2} \text{div}\, X.ndV = 0$
- $\Rightarrow \iint_{S_1} X.n\, dS + \iint_{S_2} X.n\, dS = 0$

demostración

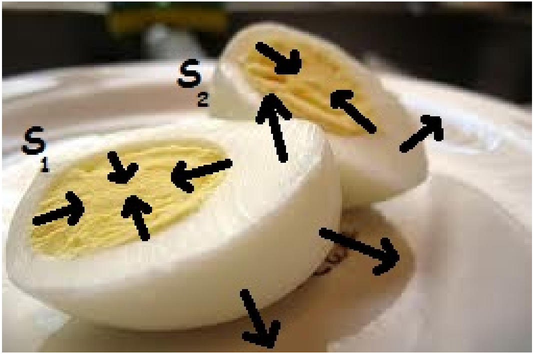
demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$



- $\iint_{S_1 \cup S_2} X.n \, dS =$

demostración

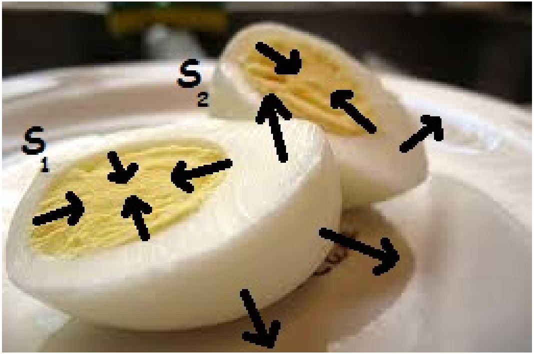
demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$



- $\iint_{S_1 \cup S_2} X.n\, dS = \iint_{S \cup -\partial B_\varepsilon(0)} X.n\, dS$

demostración

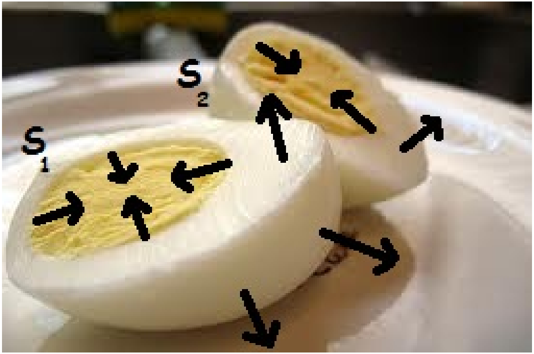
demostración - caso $\vec{0} \in \text{int}\, S$



- $\iint_{S_1 \cup S_2} X.n\, dS = \iint_{S \cup -\partial B_\varepsilon(0)} X.n\, dS$
- $\Rightarrow \iint_S X.n\, dS - \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.n\, dS$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \mathrm{int}\, S$



- $\iint_{S_1 \cup S_2} X.n\, dS = \iint_{S \cup -\partial B_\varepsilon(0)} X.n\, dS$
- $\Rightarrow \iint_S X.n\, dS - \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.n\, dS = 0$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\,dS$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\, dS$
- $$\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}.N\, dS \quad =$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\,dS$
- $$\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}.N\,dS = \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\,dS$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \text{int } S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\, dS$
- $$\begin{aligned} \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}.N\, dS &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3} \frac{\vec{r}}{r}\, dS \\ &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS \end{aligned}$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\,dS$
- $$\begin{aligned} \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}.N\,dS &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\,dS \\ &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\,dS \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\text{área}(\partial B_\varepsilon(0)) \end{aligned}$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\, dS$
-

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}.N\, dS &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\, dS \\
&= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\text{área}(\partial B_\varepsilon(0)) = \frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2
\end{aligned}
$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\, dS$
- $$\begin{aligned} \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}.N\, dS &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\, dS \\ &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\text{área}(\partial B_\varepsilon(0)) = \frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 \end{aligned}$$
- $\Rightarrow$ $$\iint_S X.N\, dS = 4\pi$$

demostración

demostración - caso $\vec{0} \in \operatorname{int} S$

- x último, calculamos $\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} X.N\, dS$
-

$$\begin{aligned}\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}.N\, dS &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\vec{r}}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}\, dS \\ &= \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\, dS \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\text{área}(\partial B_\varepsilon(0)) = \frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$

$$\iint_S X.N\, dS = 4\pi \square$$

interpretación física

carga eléctrica

flujo eléctrico a través de la superficie

interpretación física

carga puntual q en $\vec{0}$

$$\psi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi r}$$

interpretación física

carga puntual q en $\vec{0}$

$$\psi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi r}$$

campo eléctrico correspondiente

$$E = -\nabla\psi$$

interpretación física

carga puntual q en $\vec{0}$

$$\psi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi r}$$

campo eléctrico correspondiente

$$E = -\nabla\psi = \frac{q}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

interpretación física

interpretación física

- $\iint_S E.n\,dS$ flujo eléctrico total saliente de S

interpretación física

interpretación física

- $\iint_S E.n\,dS$ flujo eléctrico total saliente de S
- x ley de gauss:

$$\iint_S \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3}.ndS =$$

interpretación física

interpretación física

- $\iint_S E.n\, dS$ flujo eléctrico total saliente de S
- x ley de gauss:

$$\iint_S \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3}.ndS = \begin{cases} q & \text{si carga dentro int } S \end{cases}$$

interpretación física

interpretación física

- $\iint_S E.n\, dS$ flujo eléctrico total saliente de S
- x ley de gauss:

$$\iint_S \frac{q\vec{r}}{4\pi r^3}.ndS = \begin{cases} q & \text{si carga dentro int } S \\ 0 & \text{si carga fuera de int } S \end{cases}$$

interpretación física

interpretación física - carga continua

- distribución de carga continua en int S

interpretación física

interpretación física - carga continua

- distribución de carga continua en int S
- ρ densidad de carga

interpretación física

interpretación física - carga continua

- distribución de carga continua en int S
- ρ densidad de carga
- entonces

$$\operatorname{div} E = \rho$$

interpretación física

interpretación física - carga continua

- distribución de carga continua en int S
- ρ densidad de carga
- entonces

$$\text{div } E = \rho$$

- x teorema de gauss

$$\iint_S \vec{E}.N\, dS =$$

interpretación física

interpretación física - carga continua

- distribución de carga continua en int S
- ρ densidad de carga
- entonces

$$\text{div } E = \rho$$

- x teorema de gauss

$$\iint_S \vec{E}.N\, dS = \iiint_{\text{int } S} \rho\, dV$$

interpretación física

interpretación física - carga continua

- distribución de carga continua en int S
- ρ densidad de carga
- entonces

$$\mathrm{div}\, E = \rho$$

- x teorema de gauss

$$\iint_S \vec{E}.N\, dS = \iiint_{\mathrm{int}\, S} \rho\, dV = Q_{\mathrm{total}}$$

interpretación física

carga total

carga total en el interior de una superficie

interpretación física

carga total

carga total en el interior de una superficie

$$=$$

flujo saliente del campo eléctrico a través de la superficie

ecuación de poisson

ecuación de Poisson

aparece en:

ecuación de poisson

ecuación de Poisson

aparece en:

- problemas electrostáticos

ecuación de poisson

ecuación de Poisson

aparece en:

- problemas electrostáticos
- ingeniería mecánica

ecuación de poisson

ecuación de Poisson

aparece en:

- problemas electrostáticos
- ingeniería mecánica
- problemas de potencial gravitatorio

ecuación de Poisson

- ρ densidad de carga sobre un abierto W

ecuación de Poisson

- ρ densidad de carga sobre un abierto W
- potencial eléctrico en $\vec{x}$:

ecuación de Poisson

- ρ densidad de carga sobre un abierto W
- potencial eléctrico en $\vec{x}$:

potencial eléctrico

$$\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV$$

ecuación de Poisson

ecuación de Poisson

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} = -\rho$$

ecuación de Poisson

probaremos primero:

fórmula

$$\iint_{\partial W} \nabla\psi . n \, dS = - \iiint_{W} \rho \, dV$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
-

$$\nabla\psi(\vec{x}) \quad = $$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
-

$$\nabla\psi(\vec{x}) = \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}}\left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|}\right) dV(\vec{y})$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
-

$$\begin{aligned} \nabla \psi(\vec{x}) &= \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}} \left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} \right) dV(\vec{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_W \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \end{aligned}$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
- $$\begin{aligned} \nabla\psi(\vec{x}) &= \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}}\left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|}\right) dV(\vec{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \end{aligned}$$
- $$\iint_{\partial W} \nabla\psi.n\, dS \quad =$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
- $$\begin{aligned} \nabla\psi(\vec{x}) &= \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}}\left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|}\right) dV(\vec{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \end{aligned}$$
- $$\iint_{\partial W} \nabla\psi.n\,dS = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial W}\left(\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y})\right) dS(\vec{x})$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
- $$\begin{aligned} \nabla\psi(\vec{x}) &= \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}} \left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|}\right) dV(\vec{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \nabla\psi.n\,dS &= -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial W}\left(\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y})\right) dS(\vec{x}) \\ \text{(x Fubini)} &= \end{aligned}$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
-
$$\begin{aligned} \nabla\psi(\vec{x}) &= \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}} \left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} \right) dV(\vec{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_W \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \end{aligned}$$
-
$$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \nabla\psi.n\,dS &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial W} \left(\iiint_W \rho(\vec{y}) \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \right) dS(\vec{x}) \\ \text{(x Fubini)} &= -\iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi} \left(\iint_{\partial W} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dS(\vec{x}) \right) dV(\vec{y}) \end{aligned}$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
- $$\begin{aligned} \nabla\psi(\vec{x}) &= \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}}\left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|}\right) dV(\vec{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \nabla\psi.n\, dS &= -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial W}\left(\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y})\right) dS(\vec{x}) \\ \text{(x Fubini)} &= -\iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi}\left(\iint_{\partial W}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dS(\vec{x})\right) dV(\vec{y}) \\ &= -\iiint_W \rho\, dV \end{aligned}$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- potencial eléctrico $\psi(\vec{x}) = \iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|} dV(\vec{y})$
- $$\begin{aligned} \nabla\psi(\vec{x}) &= \iiint_W \rho(\vec{y}).\nabla_{\vec{x}}\left(\frac{1}{4\pi\|\vec{x}-\vec{y}\|}\right) dV(\vec{y}) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y}) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \iint_{\partial W} \nabla\psi.n\,dS &= -\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial W}\left(\iiint_W \rho(\vec{y})\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dV(\vec{y})\right) dS(\vec{x}) \\ \text{(x Fubini)} &= -\iiint_W \frac{\rho(\vec{y})}{4\pi}\left(\iint_{\partial W}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} dS(\vec{x})\right) dV(\vec{y}) \\ &= -\iiint_W \rho\, dV \Box \end{aligned}$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- $\iint_{\partial W} \nabla \psi . N \, dS = - \iiint_W \rho \, dV$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- $\iint_{\partial W} \nabla\psi . N\, dS = -\iiint_W \rho\, dV$
- gauss $\iint_{\partial W} \nabla\psi . N\, dS = \iiint_W \operatorname{div} \nabla\psi\, dV$
-

$$\operatorname{div} \nabla\psi = -\rho$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- $\iint_{\partial W} \nabla\psi.N\, dS = -\iiint_W \rho\, dV$
- gauss $\iint_{\partial W} \nabla\psi.N\, dS = \iiint_W \operatorname{div} \nabla\psi\, dV$
- $\Rightarrow$ para toda región W:

$$\iiint_W \triangle\psi\, dV = -\iiint_W \rho\, dV$$

- $$\operatorname{div} \nabla\psi = -\rho$$

ecuación de Poisson

ecuación de poisson

- $\iint_{\partial W} \nabla\psi . N\, dS = -\iiint_W \rho\, dV$
- gauss $\iint_{\partial W} \nabla\psi . N\, dS = \iiint_W \operatorname{div} \nabla\psi\, dV$
- $\Rightarrow$ para toda región W:

$$\iiint_W \triangle\psi\, dV = -\iiint_W \rho\, dV$$

- por TVM
-

$$\operatorname{div} \nabla\psi = -\rho$$