Formas diferenciales

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

4 de junio de 2012

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ qué son?

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ qué son?

$\downarrow$

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ qué son?

$\downarrow$

formas diferenciales

un objeto matemático abstracto

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ para qué sirven?

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ para qué sirven?

$\downarrow$

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ para qué sirven?

$\downarrow$

formas diferenciales

- para unificar teoremas de Gauss, Green, Stokes en una sola fórmula

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ para qué sirven?

$\downarrow$

formas diferenciales

- para unificar teoremas de Gauss, Green, Stokes en una sola fórmula
- y el teorema fundamental del cálculo

formas diferenciales

formas diferenciales

¿ para qué sirven?

$\downarrow$

formas diferenciales

- para unificar teoremas de Gauss, Green, Stokes en una sola fórmula
- y el teorema fundamental del cálculo
- para generalizar estos teoremas a cualquier dimensión

formas diferenciales

cómo se definen

las definiremos axiomáticamente

0-formas

0-forma

- una 0-forma sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto

0-formas

0-forma

- una 0-forma sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto
- es una función

0-formas

0-forma

- una 0-forma sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto
- es una función
- $f : \Omega \to R$ suave (C^1 o más)

suma y producto de 0-formas

suma y producto de 0-formas

- $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ 0-formas

suma y producto de 0-formas

suma y producto de 0-formas

- $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ 0-formas
- $\Rightarrow \boxed{f + g}$ 0-forma

suma y producto de 0-formas

suma y producto de 0-formas

- $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ 0-formas
- $\Rightarrow \boxed{f+g}$ 0-forma
- $\Rightarrow \boxed{f.g}$ 0-forma

ejemplo 1

ejemplo 1

- $f(x, y, z) = xy + yz$ 0-forma

ejemplo 1

ejemplo 1

- $f(x, y, z) = xy + yz$ 0-forma
- $g(x, y, z) = y \sin xz$ 0-forma

ejemplo 1

ejemplo 1

- $f(x,y,z) = xy + yz$ 0-forma
- $g(x,y,z) = y \sin xz$ 0-forma
- $$(f+g)(x,y,z) = xy + yz + y \sin xz$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $f(x, y, z) = xy + yz$ 0-forma
- $g(x, y, z) = y \sin xz$ 0-forma
- $$(f + g)(x, y, z) = xy + yz + y \sin xz$$
- $$(f.g)(x, y, z) = y^2 x \sin xz + y^2 z \sin xz$$

1-formas básicas

1-forma básica

- una 1-forma básica se define como:

1-formas básicas

1-forma básica

- una 1-forma básica se define como:
  1. dx

1-formas básicas

1-forma básica

- una 1-forma básica se define como:
  1. dx
  2. dy

1-formas básicas

1-forma básica

- una 1-forma básica se define como:
  1. dx
  2. dy
  3. dz

1-formas

1-formas

- una 1-forma sobre Ω

1-formas

1-formas

- una 1-forma sobre Ω
- es una combinación lineal:

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

1-formas

1-formas

- una 1-forma sobre Ω
- es una combinación lineal:

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

- con $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$

suma de 1-formas

suma de 1-formas

- $\omega_1 = P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz$

suma de 1-formas

suma de 1-formas

- $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$
- $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$

suma de 1-formas

suma de 1-formas

- $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$
- $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$
- suma de ω_1 y ω_2

suma de 1-formas

suma de 1-formas

- $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$
- $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$
- suma de ω_1 y ω_2
- $$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2)dx + (Q_1 + Q_2)dy + (R_1 + R_2)dz$$

producto por una 0-forma

producto por una 0-forma

- $\omega = Pdz + Qdy + Rdz$

producto por una 0-forma

producto por una 0-forma

- $\omega = Pdz + Qdy + Rdz$
- f 0-forma

producto por una 0-forma

producto por una 0-forma

- $\omega = Pdz + Qdy + Rdz$
- f 0-forma
- producto de f por ω

producto por una 0-forma

producto por una 0-forma

- $\omega = Pdz + Qdy + Rdz$
- f 0-forma
- producto de f por ω
- $$f.\omega = fPdx + fQdy + fRdz$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega_1 = (x + y^2)dx + zydy + e^{xyz}dz$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega_1 = (x + y^2)dx + zydy + e^{xyz}dz$
- $\omega_2 = \sin ydx + \sin xdy$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega_1 = (x + y^2)dx + zydy + e^{xyz}dz$
- $\omega_2 = \sin y dx + \sin x dy$
- $\Rightarrow$

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \sin y)dx + (zy + \sin x)dy + e^{xyz}dz$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega_2 = \sin y dx + \sin x dy$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega_2 = \sin y dx + \sin x dy$
- $f(x, y, z) = x$

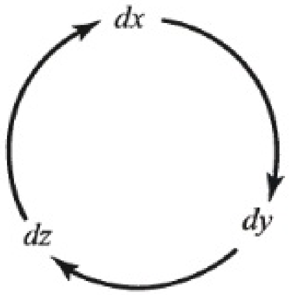
ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega_2 = \sin y dx + \sin x dy$
- $f(x, y, z) = x$
- $\Rightarrow$
$$f\omega_2 = x \sin y dx + x \sin x dy$$

2-formas básicas

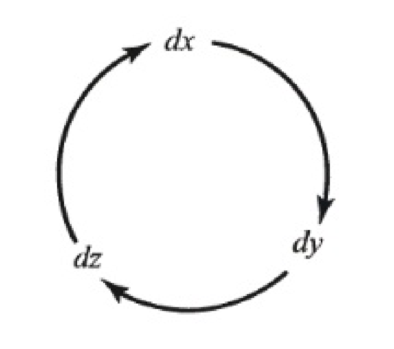
2-formas básicas



- una 2-forma básica es:

2-formas básicas

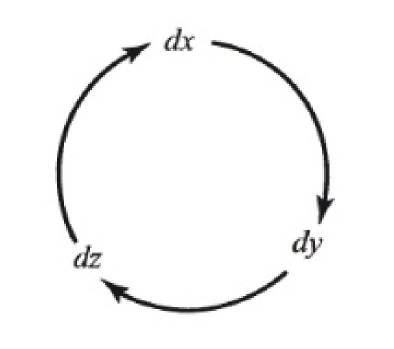
2-formas básicas



- una 2-forma básica es:
  1. dxdy

2-formas básicas

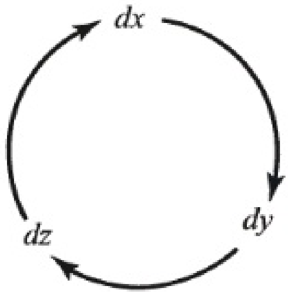
2-formas básicas



- una 2-forma básica es:
  1. dxdy
  2. dydz

2-formas básicas

2-formas básicas



- una 2-forma básica es:
  1. dxdy
  2. dydz
  3. dzdx

2-formas

2-forma

- una 2-forma

2-formas

2-forma

- una 2-forma
- es una combinación lineal

$$\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$$

2-formas

2-forma

- una 2-forma
- es una combinación lineal

$$\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$$

- con $F, G, H : \Omega \to \mathbb{R}$

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\eta_1 = F_1 dxdxy + G_1 dydz + H_1 dzdx$

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\eta_1 = F_1 dxdxy + G_1 dydz + H_1 dzdx$
- $\eta_2 = F_2 dxdxy + G_2 dydz + H_2 dzdx$

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\eta_1 = F_1 dxdxy + G_1 dydz + H_1 dzdx$
- $\eta_2 = F_2 dxdxy + G_2 dydz + H_2 dzdx$
- suma de 2-formas

suma de 2-formas

suma de 2-formas

- $\eta_1 = F_1 dxdxy + G_1 dydz + H_1 dzdx$
- $\eta_2 = F_2 dxdxy + G_2 dydz + H_2 dzdx$
- suma de 2-formas
- $$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2)dxdy + (G_1 + G_2)dydz + (H_1 + H_2)dzdx$$

producto por 0-forma

producto por 0-forma

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$

producto por 0-forma

producto por 0-forma

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- f 0-forma

producto por 0-forma

producto por 0-forma

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- f 0-forma
- producto de η por f

producto por 0-forma

producto por 0-forma

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- f 0-forma
- producto de η por f
- $$f.\eta = fFdxdxy + fGdydz + fHdzdx$$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\eta_1 = x^2 dxdy + y^3 xdydz + \sin zydzdx$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\eta_1 = x^2 dxdy + y^3 xdydz + \sin zydzdx$
- $\eta_2 = ydydz$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\eta_1 = x^2 dxdy + y^3 xdydz + \sin zydzdx$
- $\eta_2 = ydydz$
- $\Rightarrow$

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2 dxdy + (y^3 x + y)dydz + \sin zydzdx$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta_2 = ydydz$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta_2 = ydydz$
- $f(x, y, z) = xy$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta_2 = ydydz$
- $f(x, y, z) = xy$
- $\Rightarrow$
$$f\eta_2 = xy^2dydz$$

3-formas básicas

3-formas básicas

- la 3-forma básica

3-formas básicas

3-formas básicas

- la 3-forma básica
- es

$$dxdydz$$

3-formas

3-forma

- una 3-forma

3-formas

3-forma

- una 3-forma
- es una expresión

$$\nu = fdxdydz$$

3-formas

3-forma

- una 3-forma
- es una expresión
$$\nu = fdxdydz$$
- donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ suave

suma de 3-formas

suma de 3-formas

- $\nu_1 = f_1 dxdydz$

suma de 3-formas

suma de 3-formas

- $\nu_1 = f_1 dxdydz$
- $\nu_2 = f_2 dxdydz$

suma de 3-formas

suma de 3-formas

- $\nu_1 = f_1 dxdydz$
- $\nu_2 = f_2 dxdydz$
- $$\nu_1 + \nu_2 = (f_1 + f_2) dxdydz$$

producto por una 0-forma

producto por una 0-forma

- $\nu = fdxdydz$

producto por una 0-forma

producto por una 0-forma

- $\nu = fdxdydz$
- g 0-forma

producto por una 0-forma

producto por una 0-forma

- $\nu = f dxdydz$
- g 0-forma
- $$g\nu = gf\, dxdydz$$

ejemplo 6

ejemplo 6

- $\nu_1 = ydxdydz$

ejemplo 6

ejemplo 6

- $\nu_1 = ydxdydz$
- $\nu_2 = e^{x^2}dxdydz$

ejemplo 6

ejemplo 6

- $\nu_1 = ydxdydz$
- $\nu_2 = e^{x^2}dxdydz$
- $\Rightarrow$
$$\nu_1 + \nu_2 = (y + e^{x^2})dxdydz$$

ejemplo 7

ejemplo 7

- $\nu_1 = ydxdydz$

ejemplo 7

ejemplo 7

- $\nu_1 = ydxdydz$
- $f(x, y, z) = xyz$

ejemplo 7

ejemplo 7

- $\nu_1 = ydxdydz$
- $f(x, y, z) = xyz$
- $\Rightarrow$

$$f\nu_1 = xy^2zdxdydz$$

observación

observación

no se puede sumar una i-forma con una j-forma si $i \neq j$

observación 2

observación

- cada forma tiene un espacio natural de acción

observación 2

observación

- cada forma tiene un espacio natural de acción
- 0-formas $\leftrightarrow$ puntos

observación 2

observación

- cada forma tiene un espacio natural de acción
- 0-formas $\leftrightarrow$ puntos
- 1-formas $\leftrightarrow$ curvas

observación 2

observación

- cada forma tiene un espacio natural de acción
- 0-formas $\leftrightarrow$ puntos
- 1-formas $\leftrightarrow$ curvas
- 2-formas $\leftrightarrow$ superficies

observación 2

observación

- cada forma tiene un espacio natural de acción
- 0-formas $\leftrightarrow$ puntos
- 1-formas $\leftrightarrow$ curvas
- 2-formas $\leftrightarrow$ superficies
- 3-formas $\leftrightarrow$ subregiones elementales de $\mathbb{R}^3$

integral de 1-formas sobre curvas

integral de 1-formas sobre curvas

- $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$

integral de 1-formas sobre curvas

integral de 1-formas sobre curvas

- $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$
- $\mathcal{C}$ curva

integral de 1-formas sobre curvas

integral de 1-formas sobre curvas

- $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$
- $\mathcal{C}$ curva
- $$\int_{\mathcal{C}} \omega =$$

integral de 1-formas sobre curvas

integral de 1-formas sobre curvas

- $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$
- $\mathcal{C}$ curva
- $$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy + Rdz$$

ejemplo 8

ejemplo 8

- $\omega = xydx + y^2dy + dz$

ejemplo 8

ejemplo 8

- $\omega = xydx + y^2dy + dz$
- $\mathcal{C}$ parametrizada por $(t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$

ejemplo 8

ejemplo 8

- $\omega = xydx + y^2dy + dz$
- $\mathcal{C}$ parametrizada por $(t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$
- evaluar $\int_{\mathcal{C}} \omega$

ejemplo 8

ejemplo 8

- $\omega = xydx + y^2dy + dz$
- $\mathcal{C}$ parametrizada por $(t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$
- evaluar $\int_{\mathcal{C}} \omega$

$$\int_{\mathcal{C}} \omega =$$

ejemplo 8

ejemplo 8

- $\omega = xydx + y^2dy + dz$
- $\mathcal{C}$ parametrizada por $(t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$
- evaluar $\int_{\mathcal{C}} \omega$

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_0^1 (t^5 2t + t^6 3t^2) dt$$

ejemplo 8

ejemplo 8

- $\omega = xydx + y^2dy + dz$
- $\mathcal{C}$ parametrizada por $(t^2, t^3, 1)$ con $t \in [0, 1]$
- evaluar $\int_{\mathcal{C}} \omega$

$$\int_{\mathcal{C}} \omega = \int_0^1 (t^5 2t + t^6 3t^2) dt = \frac{13}{21}$$

integral de 2-formas sobre superficies

integral de 2-formas sobre superficies

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$

integral de 2-formas sobre superficies

integral de 2-formas sobre superficies

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- S superficie parametrizada por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$

integral de 2-formas sobre superficies

integral de 2-formas sobre superficies

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- S superficie parametrizada por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$
- $$\iint_S \eta =$$

integral de 2-formas sobre superficies

integral de 2-formas sobre superficies

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- S superficie parametrizada por $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$
- $$\iint_S \eta = \iint_S Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$$

integral de 2-formas sobre superficies

integral de 2-formas sobre superficies

- $$\iint_S Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$$

integral de 2-formas sobre superficies

integral de 2-formas sobre superficies

- $$\iint_S Fdxdy + Gdydz + Hdzdx = \iint_S (F, G, H).ndS = (*)$$

- $$(*) = \iint_S \left(F\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + G\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + H\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right) dudv$$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\int\int_S \eta$

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$
- $\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

- $\Phi(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u,v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$
- $\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$
-
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} =$$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

- $\Phi(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u,v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$
- $\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$
- $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix}$$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$
- $\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dudv$
- $$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = \sin u \cos u$$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$
- $\iint_S \eta = \iint_D \cos^3 u \sin u du dv$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$
- $\iint_S \eta = \iint_D \cos^3 u \sin u du dv = -2\pi \left. \frac{\cos^4 u}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$

ejemplo 9

ejemplo 9

- $\eta = z^2 dxdy$
- S semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$
- encontrar $\iint_S \eta$

- $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$
  $(u, v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$
- $\iint_S \eta = \iint_D \cos^3 u \sin u\, dudv = -2\pi \left. \frac{\cos^4 u}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

integral de 3-forma sobre región de $\mathbb{R}^3$

integral de 3-forma sobre región de $\mathbb{R}^3$

- $\nu = f dx dy dz$

integral de 3-forma sobre región de $\mathbb{R}^3$

integral de 3-forma sobre región de $\mathbb{R}^3$

- $\nu = fdxdydz$
- $$\iiint_R \nu = \iiint_R f(x, y, z)dxdydz$$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x + z)dxdydz$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x+z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x + z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x+z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

$$\iiint_R \nu \quad =$$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x+z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

$$\iiint_R \nu \;=\; \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+z)dxdydz$$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x + z)dxdydz$
- $R = [0, 1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

$$\begin{aligned}\iiint_R \nu &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + z)dxdydz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (x + z)dxdz\end{aligned}$$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x+z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

$$\begin{aligned}\iiint_R \nu &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+z)dxdydz \\ &= \int_0^1\int_0^1 (x+z)dxdz = \int_0^1 \left(xz + \frac{z^2}{2}\right)_0^1 dx\end{aligned}$$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x+z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

$$\begin{aligned}\iiint_R \nu &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x+z)dxdydz \\ &= \int_0^1\int_0^1 (x+z)dxdz = \int_0^1 \left(xz + \frac{z^2}{2}\right)_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(z + \frac{1}{2}\right) dz\end{aligned}$$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x+z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

$$
\begin{aligned}
\iiint_R \nu &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+z)dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (x+z)dxdz = \int_0^1 \left(xz + \frac{z^2}{2} \right)_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(z + \frac{1}{2} \right) dz = \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2} \right)_0^1
\end{aligned}
$$

ejemplo 10

ejemplo 10

- $\nu = (x+z)dxdydz$
- $R = [0,1]^3$
- calcular $\iiint_R \nu$

$$
\begin{aligned}
\iiint_R \nu &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+z)dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (x+z)dxdz = \int_0^1 \left(xz + \frac{z^2}{2} \right)_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(z + \frac{1}{2} \right) dz = \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z}{2} \right)_0^1 = 1
\end{aligned}
$$