Producto exterior y derivación de formas diferenciales

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

11 de junio de 2012

producto exterior

producto exterior

- ω k-forma

producto exterior

producto exterior

- ω *k*-forma
- η *l*-forma

producto exterior

producto exterior

- ω k-forma
- η l-forma
- $0 \leq k + l \leq 3$

producto exterior

producto exterior

- ω k-forma
- η l-forma
- $0 \leq k + l \leq 3$
- el producto exterior $\omega \wedge \eta$ se define axiomáticamente:

producto exterior

producto exterior

1. cero: 0 k-forma: $0 + \omega = \omega$,

ω k-forma

producto exterior

producto exterior

1. cero: 0 k-forma: $0 + \omega = \omega$, $\quad 0 \wedge \eta = 0$

η l-forma tal que $0 \leq k + l \leq 3$

producto exterior

producto exterior

1. cero: 0 k-forma: $0 + \omega = \omega, \qquad 0 \wedge \eta = 0$
2. distributiva: $(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta)$

f 0-forma

producto exterior

producto exterior

1. cero: 0 k-forma: $0+\omega=\omega, \qquad 0\wedge\eta=0$
2. distributiva: $(f\omega_1+\omega_2)\wedge\eta=f(\omega_1\wedge\eta)+(\omega_2\wedge\eta)$
3. anticonmutativa: $\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}(\eta\wedge\omega)$

ω k-forma, η l-forma

producto exterior

producto exterior

1. cero: 0 k-forma: $0 + \omega = \omega, \qquad 0 \wedge \eta = 0$
2. distributiva: $(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta)$
3. anticonmutativa: $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$
4. asociativa: $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$

k_1, k_2, k_3-formas con $0 \leq k_1 + k_2 + k_3 \leq 3$

producto exterior

producto exterior

5. producto por 0-formas: $f \wedge \omega = f\omega$

producto exterior

producto exterior

5. producto por 0-formas: $f \wedge \omega = f\omega$
6. producto entre 1-formas:

producto exterior

producto exterior

5. producto por 0-formas: $f \wedge \omega = f\omega$
6. producto entre 1-formas:
   - $dx \wedge dy = dxdy$

producto exterior

producto exterior

5. producto por 0-formas: $f \wedge \omega = f\omega$
6. producto entre 1-formas:
   - $dx \wedge dy = dxdy$
   - $dy \wedge dz = dydz$

producto exterior

producto exterior

5. producto por 0-formas: $f \wedge \omega = f\omega$
6. producto entre 1-formas:
   - $dx \wedge dy = dxdy$
   - $dy \wedge dz = dydz$
   - $dz \wedge dx = dzdx$

producto exterior

producto exterior

5. producto por 0-formas: $f \wedge \omega = f\omega$
6. producto entre 1-formas:
   - $dx \wedge dy = dxdy$
   - $dy \wedge dz = dydz$
   - $dz \wedge dx = dzdx$
   - $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$

producto exterior

producto exterior

5. producto por 0-formas: $f \wedge \omega = f\omega$
6. producto entre 1-formas:
   - $dx \wedge dy = dxdy$
   - $dy \wedge dz = dydz$
   - $dz \wedge dx = dzdx$
   - $dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$
   - $dx \wedge (dy \wedge dz) = dxdydz$

ejemplo 1

ejemplo 1

- mostrar que $dx \wedge dydz = dxdydz$

ejemplo 1

ejemplo 1

- mostrar que $dx \wedge dydz = dxdydz$
-
$$dx \wedge dydz =$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- mostrar que $dx \wedge dydz = dxdydz$
- $$dx \wedge dydz = dx \wedge (dy \wedge dz)$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- mostrar que $dx \wedge dydz = dxdydz$
- $$dx \wedge dydz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dxdydz$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega = xdx + ydy$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- calcular $\omega \wedge \eta$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- calcular $\omega \wedge \eta$

- $$\omega \wedge \eta = (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz)$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- calcular $\omega \wedge \eta$

- $$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz) \\ &= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) \\ & \quad xyz(dy \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \end{aligned}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\omega = xdx + ydy$
- $\eta = zydx + xzdy + xydz$
- calcular $\omega \wedge \eta$

- $$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (xdx + ydy) \wedge (zydx + xzdy + xydz) \\ &= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) \\ &\quad xyz(dy \wedge dy) + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\ &= (x^2z - y^2z)dxdy + xy^2dydz - x^2ydzdx \end{aligned}$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega = xdx - ydy$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$
- calcular $\omega \wedge \eta$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$
- calcular $\omega \wedge \eta$

$$\omega \wedge \eta = (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdxdy)$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$
- calcular $\omega \wedge \eta$

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdxdy) \\
&= x^2(dx \wedge dydz) - xy(dy \wedge dydz) \\
&\quad +xz(dx \wedge dxdy) - yz(dy \wedge dxdy)
\end{aligned}
$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- $\omega = xdx - ydy$
- $\eta = xdydz + zdxdy$
- calcular $\omega \wedge \eta$

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (xdx - ydy) \wedge (xdydz + zdxdy) \\
&= x^2(dx \wedge dydz) - xy(dy \wedge dydz) \\
&\quad +xz(dx \wedge dxdy) - yz(dy \wedge dxdy) \\
&= x^2 dxdydz
\end{aligned}
$$

derivada

derivada

- la derivada de una k-forma es una $(k+1)$-forma

derivada

derivada

- la derivada de una k-forma es una $(k+1)$-forma
- para $0 \leq k \leq 2$.

derivada

derivada

- la derivada de una k-forma es una $(k+1)$-forma
- para $0 \leq k \leq 2$.
- si $k = 3$ la derivada de una 3-forma es cero

derivada

derivada

1. f 0-forma:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

derivada

derivada

1. f 0-forma:
$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$
2. linealidad: $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$

derivada

derivada

1. f 0-forma:
$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$
2. linealidad: $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
3. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k (\omega \wedge d\eta)$

ω k-forma

derivada

derivada

1. f 0-forma:
$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$
2. linealidad: $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
3. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta)$
4. $d^2 = 0$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$
- calcular $d\omega$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$
- calcular $d\omega$

$$d\omega = d(Pdx + Qdy)$$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$
- calcular $d\omega$

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d(Pdx + Qdy) \\
&= d[(P \wedge dx) + (Q \wedge dy)]
\end{aligned}
$$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$
- calcular $d\omega$

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d(Pdx + Qdy) \\
&= d[(P \wedge dx) + (Q \wedge dy)] \\
&= (dP \wedge dx) + (P \wedge d^2x) + (dQ \wedge dy) + (Q \wedge d^2y)
\end{aligned}
$$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$
- calcular $d\omega$

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d(Pdx + Qdy) \\
&= d[(P \wedge dx) + (Q \wedge dy)] \\
&= (dP \wedge dx) + (P \wedge d^2x) + (dQ \wedge dy) + (Q \wedge d^2y) \\
&= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dy
\end{aligned}
$$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$
- calcular $d\omega$

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d(Pdx + Qdy) \\
&= (dP \wedge dx) + (P \wedge d^2 x) + (dQ \wedge dy) + (Q \wedge d^2 y) \\
&= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dy \\
&= (Q_x - P_y) dxdy - Q_z dydz + P_z dzdx
\end{aligned}
$$

ejemplo 4

ejemplo 4

- $\omega = Pdx + Qdy$
- calcular $d\omega$

$$
\begin{aligned}
d\omega &= d(Pdx + Qdy) \\
&= (dP \wedge dx) + (P \wedge d^2x) + (dQ \wedge dy) + (Q \wedge d^2y) \\
&= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dy \\
&= (Q_x - P_y) dxdy - Q_z dydz + P_z dzdx \qquad \square
\end{aligned}
$$

proposición

proposición

- $d(dxdy) = 0$

proposición

proposición

- $d(dxdy) = 0$
- $d(dydz) = 0$

proposición

proposición

- $d(dxdy) = 0$
- $d(dydz) = 0$
- $d(dzdx) = 0$

demostración

demostración

$$d(dxdy) = d(dx \wedge dy)$$

demostración

demostración

$$
\begin{aligned}
d(dxdy) &= d(dx \wedge dy) \\
&= (d^2x \wedge dy) - (dx \wedge d^2y)
\end{aligned}
$$

demostración

demostración

$$\begin{aligned} d(dxdy) &= d(dx \wedge dy) \\ &= (d^2x \wedge dy) - (dx \wedge d^2y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

demostración

demostración

$$
\begin{aligned}
d(dxdy) &= d(dx \wedge dy) \\
&= (d^2x \wedge dy) - (dx \wedge d^2y) \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

$$d\eta = d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx)$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

$$\begin{aligned} d\eta &= d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx) \\ &= dF \wedge dxdy + dG \wedge dydz + dH \wedge dzdx \end{aligned}$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

$$\begin{aligned} d\eta &= d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx) \\ &= dF \wedge dxdy + dG \wedge dydz + dH \wedge dzdx \end{aligned}$$

$$dF \wedge dxdy = (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \wedge dxdy$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

$$\begin{aligned} d\eta &= d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx) \\ &= dF \wedge dxdy + dG \wedge dydz + dH \wedge dzdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF \wedge dxdy &= (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \wedge dxdy \\ &= F_z dzdxdy \end{aligned}$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

$$
\begin{aligned}
d\eta &= d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx) \\
&= dF \wedge dxdy + dG \wedge dydz + dH \wedge dzdx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dF \wedge dxdy &= (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \wedge dxdy \\
&= F_z dzdxdy = F_z dxdydz
\end{aligned}
$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

$$
\begin{aligned}
d\eta &= d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx) \\
&= dF \wedge dxdy + dG \wedge dydz + dH \wedge dzdx \\
&= (F_z + G_x + H_y)dxdydz
\end{aligned}
$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- $\eta = Fdxdy + Gdydz + Hdzdx$
- calcular $d\eta$

$$\begin{aligned} d\eta &= d(Fdxdy + Gdydz + Hdzdx) \\ &= dF \wedge dxdy + dG \wedge dydz + dH \wedge dzdx \\ &= (F_z + G_x + H_y)dxdydz \qquad \square \end{aligned}$$

teorema de green

teorema de green

- D región de Green

teorema de green

teorema de green

- D región de Green
- $\omega = Pdx + Qdy$ 1-forma

teorema de green

teorema de green

- D región de Green
- $\omega = Pdx + Qdy$ 1-forma
- $\Rightarrow$
$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega$$

teorema de stokes

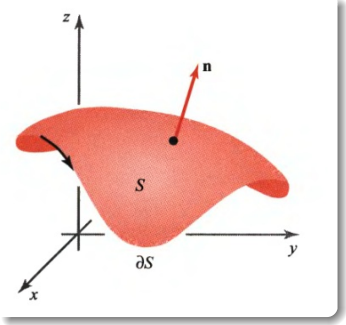
teorema de stokes

- S superficie orientada

teorema de stokes

teorema de stokes

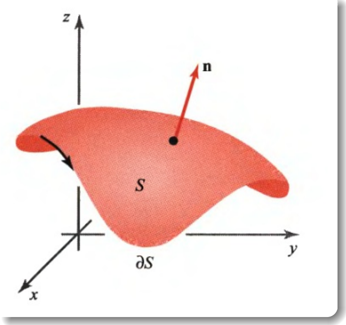
- S superficie orientada
- ∂S orientada en forma coherente



teorema de stokes

teorema de stokes

- S superficie orientada
- ∂S orientada en forma coherente
- ω 1-forma

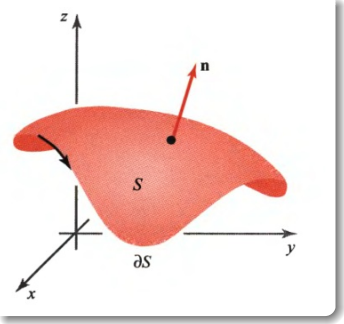


teorema de stokes

teorema de stokes

- S superficie orientada
- ∂S orientada en forma coherente
- ω 1-forma
- $\Rightarrow$

$$\int_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega$$



teorena de gauss

teorema de gauss

- W^3

teorena de gauss

teorema de gauss

- W^3
- ∂W orientado con normal exterior

teorena de gauss

teorema de gauss

- W^3
- ∂W orientado con normal exterior
- η 2-forma

teorena de gauss

teorema de gauss

- W^3
- ∂W orientado con normal exterior
- η 2-forma
- $\Rightarrow$

$$\iint_{\partial W} \eta = \iiint_W d\eta$$

fin

fin

gracias!