Vector, versor y recta tangente
Longitud de arco

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

29 de febrero de 2012

vector velocidad

vector velocidad

- α curva paramétrica C^1

vector velocidad

vector velocidad

- α curva paramétrica C^1
- vector velocidad a α en t:

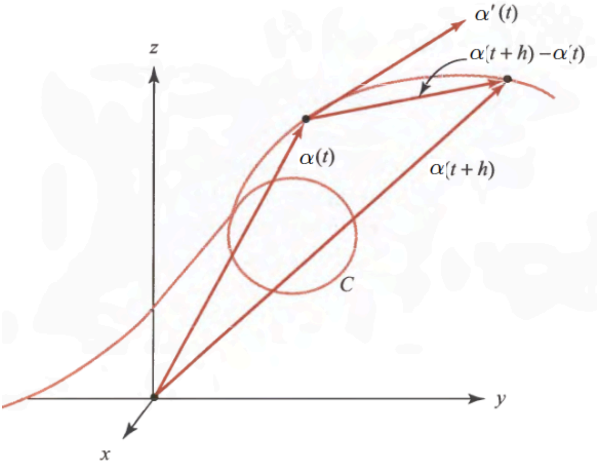
vector velocidad

vector velocidad

- α curva paramétrica C^1
- vector velocidad a α en t:
- $$\alpha'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}$$

vector velocidad

vector velocidad



velocidad

velocidad

- α curva paramétrica C^1

velocidad

velocidad

- α curva paramétrica C^1
- velocidad de α en t

velocidad

velocidad

- α curva paramétrica C^1
- velocidad de α en t
- es el número

$$\|\alpha'(t)\|$$

velocidad

velocidad

- α curva paramétrica C^1
- velocidad de α en t
- es el número

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

Calcular el vector velocidad de $\alpha(t) = (t, t^2, e^t)$ en $t = 0$

ejemplo 1

ejemplo 1

Calcular el vector velocidad de $\alpha(t) = (t, t^2, e^t)$ en $t = 0$

- $\alpha'(t) = (1, 2t, e^t)$

ejemplo 1

ejemplo 1

Calcular el vector velocidad de $\alpha(t) = (t, t^2, e^t)$ en $t = 0$

- $\alpha'(t) = (1, 2t, e^t)$
- en $t = 0$

ejemplo 1

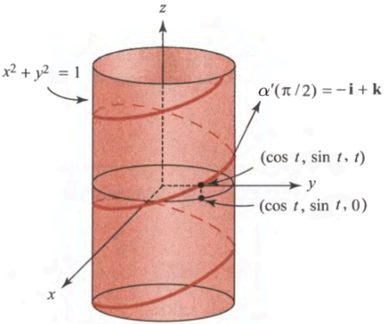
ejemplo 1

Calcular el vector velocidad de $\alpha(t) = (t, t^2, e^t)$ en $t = 0$

- $\alpha'(t) = (1, 2t, e^t)$
- en $t = 0$
- $\alpha'(0) = (1, 0, 1)$

ejemplo 2

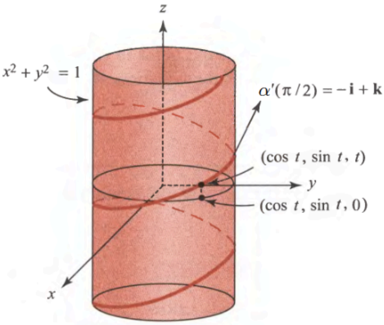
ejemplo 2



- Encontrar $\alpha'(\frac{\pi}{2})$ donde $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$

ejemplo 2

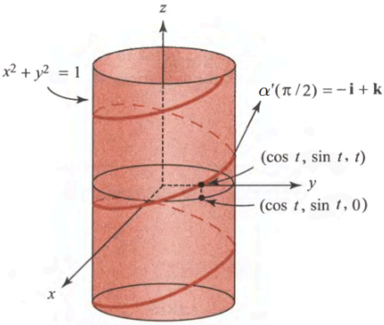
ejemplo 2



- Encontrar $\alpha'(\frac{\pi}{2})$ donde $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$
- $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

ejemplo 2

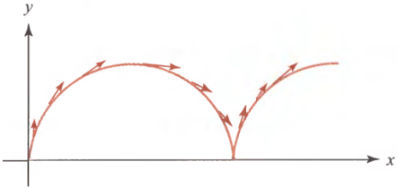
ejemplo 2



- Encontrar $\alpha'(\frac{\pi}{2})$ donde $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$
- $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$
- $\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 1)$

ejemplo 3

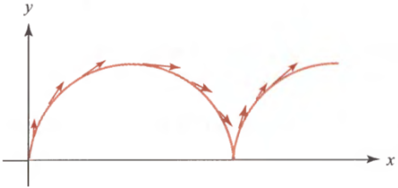
ejemplo 3



- trayectoria de un punto en el borde de una rueda de radio 1 andando a velocidad $v = 1$

ejemplo 3

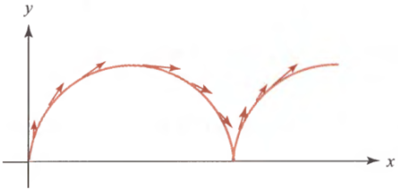
ejemplo 3



- trayectoria de un punto en el borde de una rueda de radio 1 andando a velocidad $v = 1$
- calcular $\alpha'(t)$

ejemplo 3

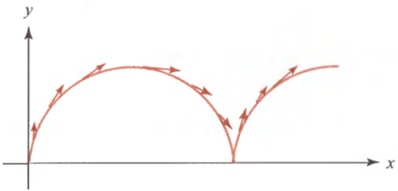
ejemplo 3



- trayectoria de un punto en el borde de una rueda de radio 1 andando a velocidad $v = 1$
- calcular $\alpha'(t)$
- ¿cuándo se anula el vector velocidad?

ejemplo 3

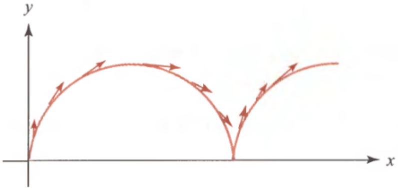
ejemplo 3



- trayectoria de un punto en el borde de una rueda de radio 1 andando a velocidad $v = 1$
- calcular $\alpha'(t)$
- ¿cuándo se anula el vector velocidad?
- ¿ el vector velocidad se hace vertical en algún momento?

ejemplo 3

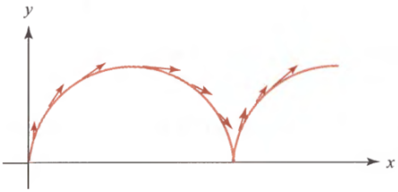
ejemplo 3



- calcular $\alpha'(t)$
- ¿cuándo se anula el vector velocidad?
- ¿ el vector velocidad se hace vertical en algún momento?
- $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

ejemplo 3

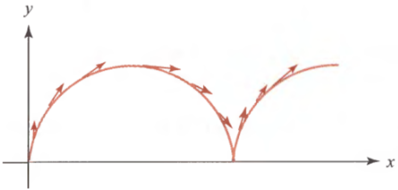
ejemplo 3



- ¿cuándo se anula el vector velocidad?
- ¿ el vector velocidad se hace vertical en algún momento?
- $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
- $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

ejemplo 3

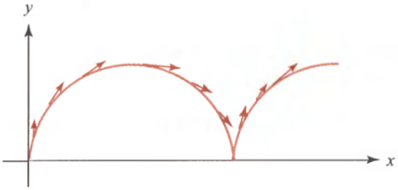
ejemplo 3



- ¿ el vector velocidad se hace vertical en algún momento?
- $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
- $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$
- $\alpha'(t) = (0, 0)$ si $t = 2k\pi$

ejemplo 3

ejemplo 3



- ¿ el vector velocidad se hace vertical en algún momento?
- $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
- $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$
- $\alpha'(t) = (0, 0)$ si $t = 2k\pi$
- NO

versor tangente

versor tangente

versor tangente

versor tangente

- α curva paramétrica C^1

versor tangente

versor tangente

- α curva paramétrica C^1
- $\alpha'(t) \neq 0$

versor tangente

versor tangente

- α curva paramétrica C^1
- $\alpha'(t) \neq 0$
- versor tangente en t

versor tangente

versor tangente

- α curva paramétrica C^1
- $\alpha'(t) \neq 0$
- versor tangente en t
- $$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

ejemplo

ejemplo

- cicloide $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

ejemplo

ejemplo

- cicloide $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
- versor tangente:

$$v(t) = \frac{(1 - \cos t, \sin t)}{\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}}$$

ejemplo

ejemplo

- cicloide $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$
- versor tangente:

$$v(t) = \frac{(1 - \cos t, \sin t)}{\sqrt{2 - 2\cos t}}$$

recta tangente

recta tangente

- α curva paramétrica C^1

recta tangente

recta tangente

- α curva paramétrica C^1
- $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$

recta tangente

recta tangente

- α curva paramétrica C^1
- $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$
- recta tangente a α en $\alpha(t_0)$:

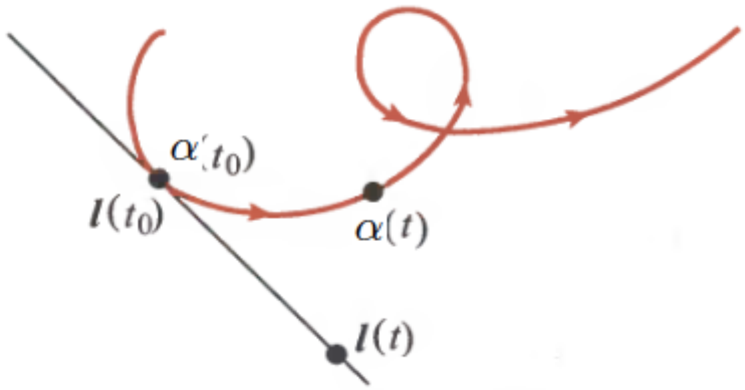
recta tangente

recta tangente

- α curva paramétrica C^1
- $\alpha'(t_0) \neq \vec{0}$
- recta tangente a α en $\alpha(t_0)$:
- $$\mathbf{l}(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha'(t_0)$$

recta tangente

recta tangente a α en $\alpha(t_0)$



ejemplo 1

ejemplo 1

- α curva que pasa en $t = 0$ por $(3, 6, 5)$ con vector tangente $(1, -1, 0)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- α curva que pasa en $t = 0$ por $(3, 6, 5)$ con vector tangente $(1, -1, 0)$
- calcular la recta tangente

ejemplo 1

ejemplo 1

- α curva que pasa en $t = 0$ por $(3, 6, 5)$ con vector tangente $(1, -1, 0)$
- calcular la recta tangente
- $$\mathbf{l}(t) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0)$$

interpretación física

interpretación física

es la trayectoria que seguiría el punto si se “liberara” de la curva en el instante t_0

ejemplo 2

ejemplo 2

- una partícual que sigue la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ se va por la tangente en el instante $t = 1$

ejemplo 2

ejemplo 2

- una partícual que sigue la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ se va por la tangente en el instante $t = 1$
- ¿dónde está en $t = 3$?

ejemplo 2

ejemplo 2

- una partícual que sigue la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ se va por la tangente en el instante $t = 1$
- ¿dónde está en $t = 3$?
- $\alpha'(1) = (e^1, -e^{-1}, -\sin 1)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- una partícual que sigue la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ se va por la tangente en el instante $t = 1$
- ¿dónde está en $t = 3$?
- $\alpha'(1) = (e^1, -e^{-1}, -\sin 1)$
- $\mathbf{l}(t) = (e^1, e^{-1}, \cos 1) + (t - 1)(e^1, -e^{-1}, -\sin 1)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- una partícual que sigue la curva $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ se va por la tangente en el instante $t = 1$
- ¿dónde está en $t = 3$?
- $\alpha'(1) = (e^1, -e^{-1}, -\sin 1)$
- $\mathbf{l}(t) = (e^1, e^{-1}, \cos 1) + (t-1)(e^1, -e^{-1}, -\sin 1)$
- la trayectoria está en $\mathbf{l}(3) = (3e^1, -e^{-1}, \cos 1 - 2\sin 1)$

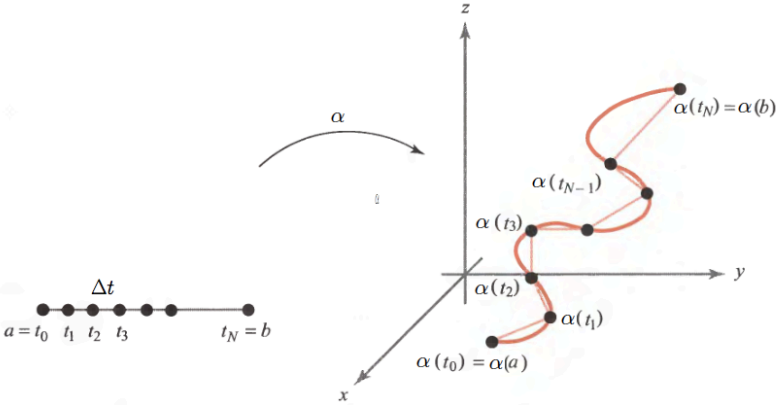
longitud de arco

problema

¿ cómo calculamos la longitud de una curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$?

longitud de arco

aproximación



longitud de arco

aproximación

- longitud de la poligonal que aproxima la curva

longitud de arco

aproximación

- longitud de la poligonal que aproxima la curva
- $$\mathrm{long}(P_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

longitud de arco

aproximación

- longitud de la poligonal que aproxima la curva
- $$\mathrm{long}(P_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$
- x TVM: $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

longitud de arco

aproximación

- longitud de la poligonal que aproxima la curva
- $$\text{long}(P_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$
- x TVM: $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)\Delta t$

longitud de arco

aproximación

- longitud de la poligonal que aproxima la curva
- $$\text{long}(P_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t$$
- x TVM: $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \alpha'(\xi_i)\Delta t$

aproximación

aproximación

- cuando $\Delta t \to 0$

aproximación

aproximación

- cuando $\Delta t \to 0$
- tenemos

$$\text{long}(P_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t$$

aproximación

aproximación

- cuando $\Delta t \to 0$
- tenemos

$$\operatorname{long}(P_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t \to \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

longitud de arco

longitud de arco

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva C^1

longitud de arco

longitud de arco

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva C^1
- longitud de arco de α:

longitud de arco

longitud de arco

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva C^1
- longitud de arco de α:
- $$\text{long}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

ejemplo 1

longitud de una circunferencia de radio r

- Calcular la long de arco de una circunferencia de radio r

ejemplo 1

longitud de una circunferencia de radio r

- Calcular la long de arco de una circunferencia de radio r
- $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

ejemplo 1

longitud de una circunferencia de radio r

- Calcular la long de arco de una circunferencia de radio r
- $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

ejemplo 1

longitud de una circunferencia de radio *r*

- Calcular la long de arco de una circunferencia de radio r
- $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
- $$\mathrm{long}(\alpha) =$$

ejemplo 1

longitud de una circunferencia de radio r

- Calcular la long de arco de una circunferencia de radio r
- $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
- $$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt$$

ejemplo 1

longitud de una circunferencia de radio r

- Calcular la long de arco de una circunferencia de radio r
- $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
- $$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt$$

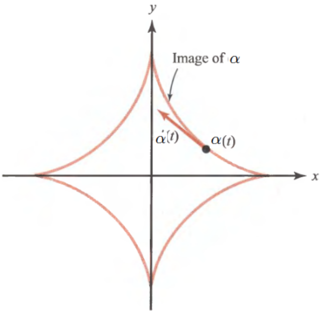
ejemplo 1

longitud de una circunferencia de radio r

- Calcular la long de arco de una circunferencia de radio r
- $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
- $$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

ejemplo 2

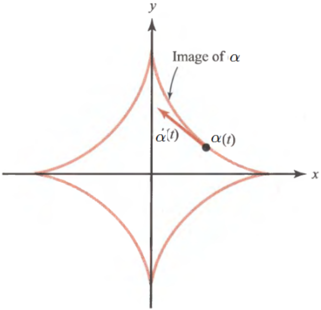
longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- Calcular la longitud de la curva

ejemplo 2

longitud de la hipocicloide de 4 puntas

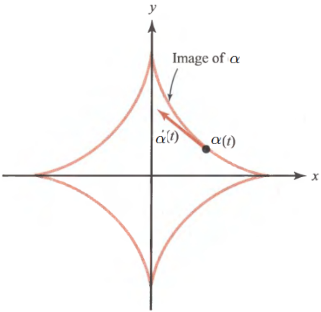


- Calcular la longitud de la curva
-

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

ejemplo 2

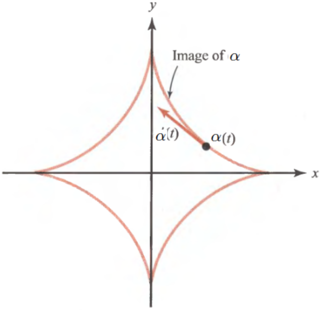
longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- Calcular la longitud de la curva
- $$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$
- $\alpha'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$

ejemplo 2

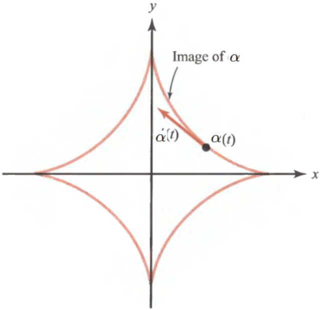
longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- $$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$
- $\alpha'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$
- $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{9(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)}$

ejemplo 2

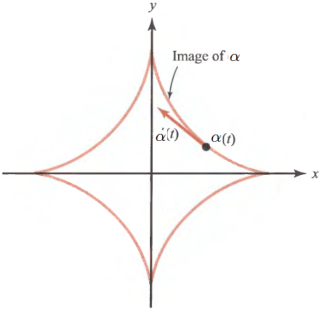
longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- $$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$
- $\alpha'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$
- $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{9(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)}$
- $\|\alpha'(t)\| = 3|\cos t \sin t|$

ejemplo 2

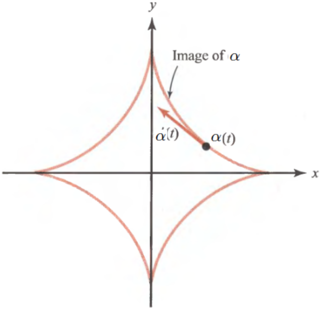
longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- $\alpha'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$
- $\|\alpha'(t)\| =$ $\sqrt{9(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)}$
- $\|\alpha'(t)\| = 3|\cos t \sin t|$
- $$\text{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t| dt$$

ejemplo 2

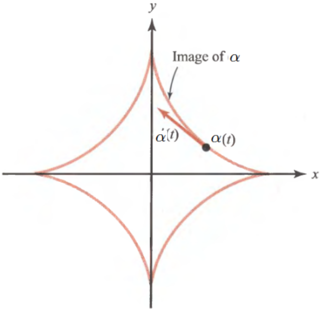
longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- $\|\alpha'(t)\| = 3|\cos t \sin t|$
- $$\operatorname{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t| dt$$
- $$\operatorname{long}(\alpha) = 4.3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt$$

ejemplo 2

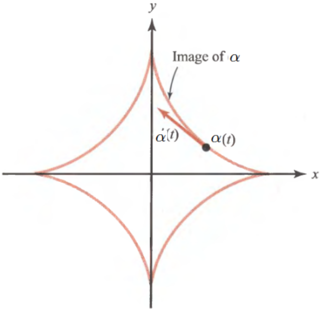
longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- $$\operatorname{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t| dt$$
- $$\operatorname{long}(\alpha) = 4.3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt$$
- $$\operatorname{long}(\alpha) = 6 \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ejemplo 2

longitud de la hipocicloide de 4 puntas



- $$\mathrm{long}(\alpha) = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t|dt$$
- $$\mathrm{long}(\alpha) = 4.3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt$$
- $$\mathrm{long}(\alpha) = 6\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3$$

ejemplo 2

hipocicloide de 4 puntas