Integrales curvilíneas

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

5 de marzo de 2012

integral a lo largo de una curva

integral a lo largo de una curva

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva paramétrica C^1

integral a lo largo de una curva

integral a lo largo de una curva

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva paramétrica C^1
- $f : \alpha[a, b] \to \mathbb{R}$ continua

integral a lo largo de una curva

integral a lo largo de una curva

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva paramétrica C^1
- $f : \alpha[a, b] \to \mathbb{R}$ continua
- integral de f a lo largo de α

$$\int_\alpha f ds$$

integral a lo largo de una curva

integral a lo largo de una curva

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ curva paramétrica C^1
- $f : \alpha[a, b] \to \mathbb{R}$ continua
- integral de f a lo largo de α

$$\int_{\alpha} f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

interpretación física

interpretación 1

- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable

interpretación física

interpretación 1

- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable
- $f(x, y, z)$ densidad de masa en (x, y, z)

interpretación física

interpretación 1

- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable
- $f(x, y, z)$ densidad de masa en (x, y, z)
- $\Rightarrow \int_\alpha fds$ masa total del cable α

interpretación física

interpretación 2

- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable

interpretación física

interpretación 2

- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable
- $f(x, y, z)$ temperatura en (x, y, z)

interpretación física

interpretación 2

- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable
- $f(x, y, z)$ temperatura en (x, y, z)
- $\Rightarrow$temperatura promedio del cable α:

interpretación física

interpretación 2

- $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ cable
- $f(x, y, z)$ temperatura en (x, y, z)
- $\Rightarrow$temperatura promedio del cable α:

$$\frac{1}{\text{long}(\alpha)} \int_{\alpha} f ds$$

notación

notación

$$ds = \|\alpha'(t)\| dt$$

justificación

justificación

- función longitud de arco:

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$$

justificación

justificación

- función longitud de arco:

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$$

-

$$\Delta s = s(t_i) - s(t_{i-1})$$

justificación

justificación

- función longitud de arco:

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$$

-

$$\Delta s = s(t_i) - s(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(\xi)\| d\xi$$

justificación

justificación

- función longitud de arco:

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi$$

-

$$\Delta s = s(t_i) - s(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t$$

justificación

justificación

- $$\Delta s = s(t_i) - s(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t$$

- $$\Delta s \quad = \quad \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t$$

justificación

justificación

- $$\Delta s = s(t_i) - s(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t$$

- $$\begin{array}{ccccc} & \Delta s & = & \|\alpha'(\xi_i)\|\Delta t & \\ \Delta t \to 0 & \downarrow & & \downarrow & \Delta t \to 0 \end{array}$$

justificación

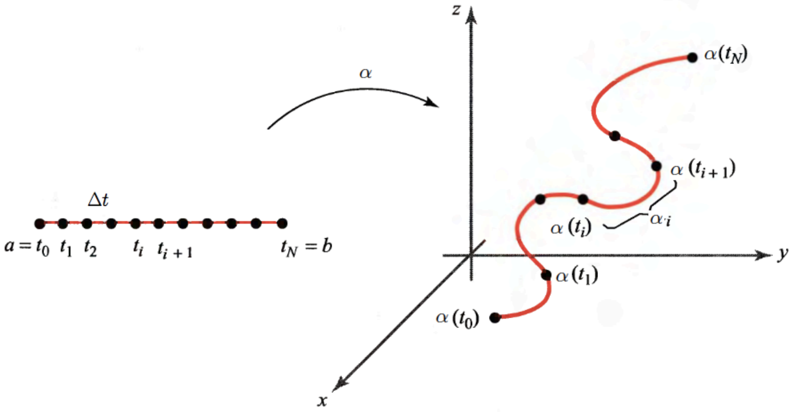
justificación

- $$\Delta s = s(t_i) - s(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \|\alpha'(\xi_i)\| \Delta t$$

- $$\begin{array}{ccc} \Delta s & = & \|\alpha'(\xi_i)\|\Delta t \\ {\scriptstyle \Delta t\to 0} \quad \downarrow & & \downarrow \quad {\scriptstyle \Delta t\to 0} \\ ds & = & \|\alpha'(t)\| dt \end{array}$$

justificación

gráficamente



justificación integral sobre una curva

justificación integral sobre una curva

- aproximación de integral de f sobre α

justificación integral sobre una curva

justificación integral sobre una curva

- aproximación de integral de f sobre α
- $\rightarrow$ suponer f constante en α_i

justificación integral sobre una curva

justificación integral sobre una curva

- aproximación de integral de f sobre α
- $\rightarrow$ suponer f constante en α_i
- $$\text{aprox} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\text{long}(\alpha_i)$$

justificación integral sobre una curva

justificación integral sobre una curva

- aproximación de integral de *f* sobre α
- $\rightarrow$ suponer *f* constante en α_i
- $$\text{aprox} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\text{long}(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s$$

justificación integral sobre una curva

justificación integral sobre una curva

- aproximación de integral de f sobre α
- $\rightarrow$ suponer f constante en α_i
- $$\text{aprox} = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\text{long}(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s$$
- $$\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s \rightarrow \int_\alpha f ds$$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t) \|\alpha'(t)\| dt$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\|\alpha'(t)\| dt$
- $$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 + 1}$$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t) \|\alpha'(t)\| dt$
- $$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 + 1} = \sqrt{2}$$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\|\alpha'(t)\| dt$
- $$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 + 1} = \sqrt{2}$$
- $$\int_\alpha f ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) dt$$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\|\alpha'(t)\| dt$
- $$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 + 1} = \sqrt{2}$$
- $$\int_\alpha f ds = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt$$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\|\alpha'(t)\| dt$
- $$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 + 1} = \sqrt{2}$$
- $$\int_\alpha f ds = \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

ejemplo

calculando la integral sobre una curva

- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$ hélice $t \in [0, 2\pi]$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- calcular $\int_\alpha f ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\|\alpha'(t)\|dt$
- $$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 + 1} = \sqrt{2}$$
- $$\int_\alpha f ds = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{2\pi^3}{3}\right)$$

integrales sobre curvas planas

interpretación

- $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva plana

integrales sobre curvas planas

interpretación

- $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ curva plana
- $f : \alpha(I) \to \mathbb{R}^+$ integrable

integrales sobre curvas planas

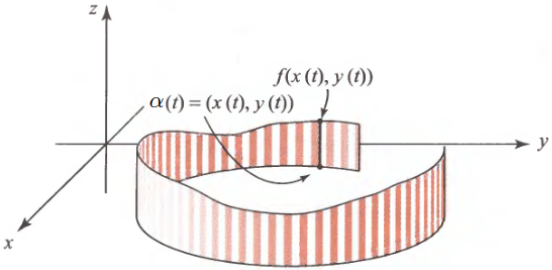
interpretación

- $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ curva plana
- $f : \alpha(I) \to \mathbb{R}^+$ integrable
- $\int_\alpha f ds$ área de la cerca delimitada por f y α:

integrales sobre curvas planas

interpretación

- $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ curva plana
- $f : \alpha(I) \to \mathbb{R}^+$ integrable
- $\int_\alpha f ds$ área de la cerca delimitada por f y α:



ejemplo

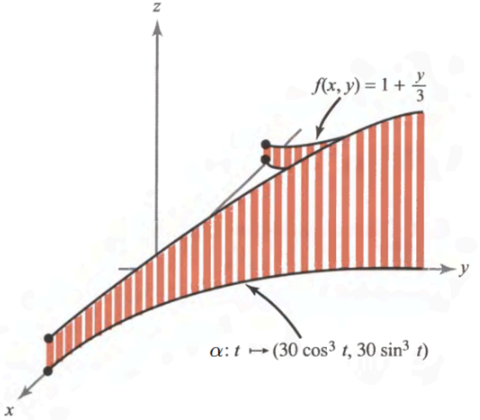
ejemplo

- Juan tiene que pintar ambos lados de la siguiente cerca:

ejemplo

ejemplo

- Juan tiene que pintar ambos lados de la siguiente cerca:



la cerca que tiene que pintar Juan

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$
- $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$
- $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$
- $$\text{área(cerca)} = \int_\alpha f ds$$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$
- $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$
- $$\text{área(cerca)} = \int_\alpha f ds = \int_0^\pi f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\| dt$$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x,y) = 1 + \frac{y}{3}$
- $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$
- $$= \int_0^{\pi} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \int_0^{\pi}(1 + 10\sin^3 t)90|\sin t\cos t|dt$$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$
- $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$
- $$= \int_0^{\pi} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\| dt = 90 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 10\sin^3 t) \sin t \cos t dt$$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$
- $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$
- $$\text{área(cerca)} = 90\left(\frac{\sin^2 t}{2} + 2\sin^5 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $f(x, y) = 1 + \frac{y}{3}$
- $\alpha(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$
- $$\text{área(cerca)} = 225\mathrm{m}^2$$

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $$\text{área(cerca)} = 225\text{m}^2$$
- Pintado de ambos lados: área a pintar=450 m^2

ejemplo

ejemplo

- suponiendo que le pagan \$100 el m^2 y que los materiales son gratis, ¿cuánto espera ganar Juan si hace bien su trabajo?
- $$\text{área(cerca)} = 225\text{m}^2$$
- Pintado de ambos lados: área a pintar=450 m^2
- A \$100 el m^2: Presupuesto: \$45.000

campo vectorial

campo vectorial

- un campo vectorial en $\mathbb{R}^{2,3}$

campo vectorial

campo vectorial

- un campo vectorial en $\mathbb{R}^{2,3}$
- es una función $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{2,3}$

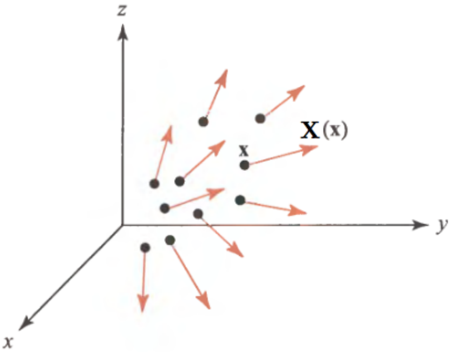
campo vectorial

campo vectorial

- un campo vectorial en $\mathbb{R}^{2,3}$
- es una función $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^{2,3}$
- donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^{2,3}$

ejemplos

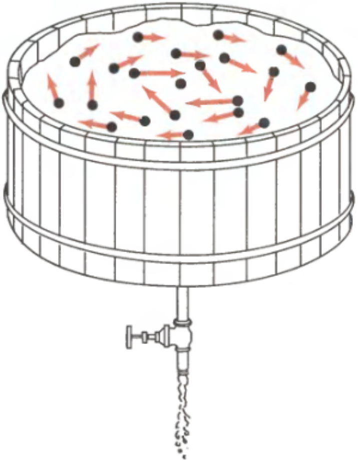
ejemplos



a cada punto del espacio le corresponde un vector

ejemplos

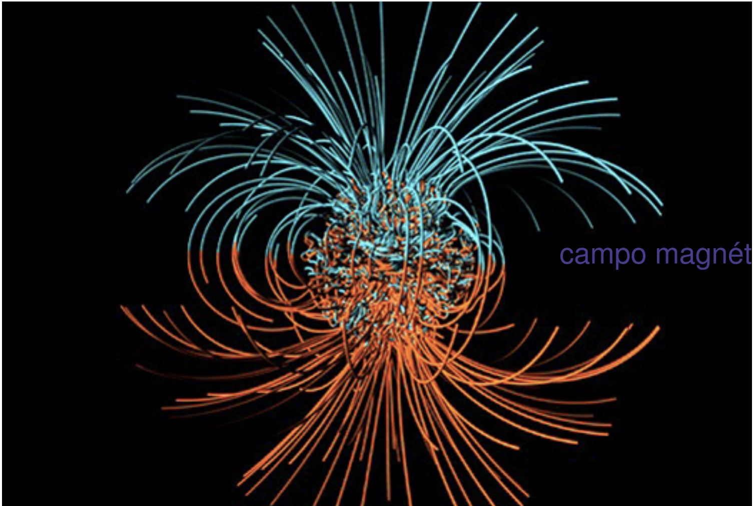
ejemplos



campo vectorial que describe el flujo de agua en un recipiente

ejemplos

ejemplos



campo magnético

circulación de un campo vectorial

circulación de un campo

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^{2,3}$ campo vectorial

circulación de un campo vectorial

circulación de un campo

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^{2,3}$ campo vectorial
- $\alpha : I \to \Omega$ curva

circulación de un campo vectorial

circulación de un campo

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^{2,3}$ campo vectorial
- $\alpha : I \to \Omega$ curva
- circulación de X a lo largo de α:

circulación de un campo vectorial

circulación de un campo

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^{2,3}$ campo vectorial
- $\alpha : I \to \Omega$ curva
- circulación de X a lo largo de α:

$$\int_{\alpha} X d\alpha$$

circulación de un campo vectorial

circulación de un campo

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^{2,3}$ campo vectorial
- $\alpha : I \to \Omega$ curva
- circulación de X a lo largo de α:

$$\int_\alpha X d\alpha = \int_I X(\alpha(t))\alpha'(t)dt$$

interpretación física

interpretación física

- X campo de fuerzas

interpretación física

interpretación física

- X campo de fuerzas
- (x, y, z) partícula que se desplaza a lo largo de α

interpretación física

interpretación física

- X campo de fuerzas
- (x, y, z) partícula que se desplaza a lo largo de α
- trabajo de la fuerza X a lo largo de α

interpretación física

trabajo de una fuerza

- trabajo de una fuerza en un segmento recto

$$X.\Delta\alpha = \text{(fuerza).(desplazamientto)}$$

interpretación física

trabajo de una fuerza

- trabajo de una fuerza en un segmento recto

$$X.\Delta\alpha = (\text{fuerza}).(\text{desplazamientto})$$

- $\Delta\alpha = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})$

interpretación física

trabajo de una fuerza

- trabajo de una fuerza en un segmento recto

$$X.\Delta\alpha = (\text{fuerza}).(\text{desplazamientto})$$

- $\Delta\alpha = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \approx \alpha'(\xi_i)\Delta t$

interpretación física

trabajo de una fuerza

- trabajo de una fuerza en un segmento recto

$$X.\Delta\alpha = (\text{fuerza}).(\text{desplazamientto})$$

- $\Delta\alpha = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \approx \alpha'(\xi_i)\Delta t$
- trabajo a lo largo de una poligonal que aproxima a α

$$\sum_{i=1}^{N} X(\alpha(t_i))\alpha'(\xi_i)\Delta t$$

interpretación física

trabajo de una fuerza

- trabajo de una fuerza en un segmento recto

$$X.\Delta\alpha = (\text{fuerza}).(\text{desplazamientto})$$

- $\Delta\alpha = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \approx \alpha'(\xi_i)\Delta t$
- trabajo a lo largo de una poligonal que aproxima a α

$$\sum_{i=1}^{N} X(\alpha(t_i))\alpha'(\xi_i)\Delta t \longrightarrow_{\Delta\to 0}$$

interpretación física

trabajo de una fuerza

- trabajo de una fuerza en un segmento recto

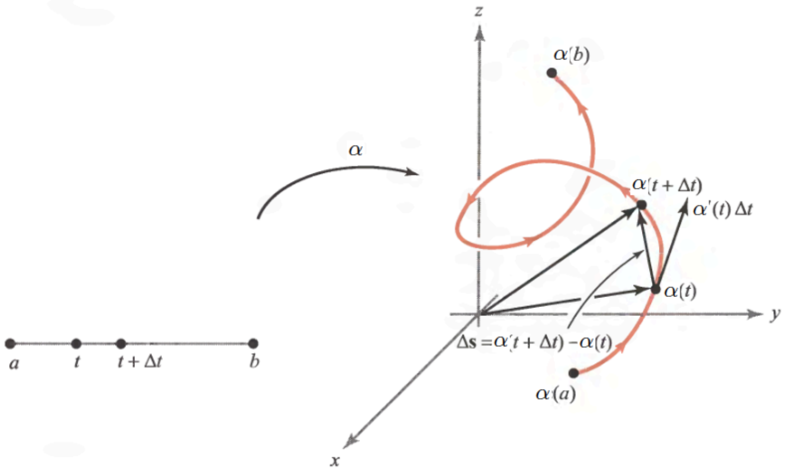
$$X.\Delta\alpha = (\text{fuerza}).(\text{desplazamientto})$$

- $\Delta\alpha = \alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) \approx \alpha'(\xi_i)\Delta t$
- trabajo a lo largo de una poligonal que aproxima a α

$$\sum_{i=1}^{N} X(\alpha(t_i))\alpha'(\xi_i)\Delta t \longrightarrow_{\Delta\to 0} \int_I X(\alpha(t))\alpha'(t)dt$$

interpretación física

interpretación física



ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x, y, z) = (x, y, z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x, y, z) = (x, y, z)$
- $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x, y, z) = (x, y, z)$
- $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- calcular la circulación de X a lo largo de α

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x, y, z) = (x, y, z)$
- $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- calcular la circulación de X a lo largo de α
- $$\int_\alpha X d\alpha$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x, y, z) = (x, y, z)$
- $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- calcular la circulación de X a lo largo de α
- $$\int_\alpha X d\alpha = \int_0^{2\pi} (\sin t, \cos t, t)(\cos t, -\sin t, 1) dt$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x, y, z) = (x, y, z)$
- $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- calcular la circulación de X a lo largo de α
- $$\int_{\alpha} X d\alpha = \int_{0}^{2\pi} (\sin t, \cos t, t)(\cos t, -\sin t, 1) dt = \int_{\alpha} t dt$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x, y, z) = (x, y, z)$
- $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- calcular la circulación de X a lo largo de α
- $$\int_\alpha X d\alpha = \int_\alpha t dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X(x,y,z) = (x,y,z)$
- $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
- calcular la circulación de X a lo largo de α
- $$\int_\alpha X d\alpha = \int_\alpha t dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

notación

notación

$$\int_{\alpha} X d\alpha$$

notación

notación

$$\int_\alpha X d\alpha = \int_I \left(X_1 \frac{dx}{dt} + X_2 \frac{dy}{dt} + X_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

notación

notación

$$\int_\alpha X d\alpha = \int_I \left(X_1 \frac{dx}{dt} + X_2 \frac{dy}{dt} + X_3 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_\alpha X_1 dx + X_2 dy + X_3 dz$$

notación

notación

$$\int_\alpha X d\alpha = \int_\alpha X_1\, dx + X_2 dy + X_3 dz$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar

$$\int_\alpha x^2 dx + xydy + dz = *$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar
$$\int_{\alpha} x^2dx + xydy + dz = *$$
- donde $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$ en $[0, 1]$

ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar
$$\int_{\alpha} x^2 dx + xydy + dz = *$$
- donde $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$ en $[0, 1]$
- $$* = \int_0^1 (t^2 + t^3.2t + 0)dt$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar
$$\int_\alpha x^2 dx + xydy + dz = *$$
- donde $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$ en $[0, 1]$
- $$* = \int_0^1 (t^2 + t^3.2t + 0)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\Big|_0^1$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- evaluar
$$\int_\alpha x^2dx + xydy + dz = *$$
- donde $\alpha(t) = (t, t^2, 1)$ en $[0, 1]$
-
$$* = \int_0^1 (t^2 + t^3.2t + 0)dt = \left.\frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

reparametrización

reparametrización

- $\alpha : [a, b] \to R^{2,3}$ curva paramétrica

reparametrización

reparametrización

- $\alpha : [a, b] \to R^{2,3}$ curva paramétrica
- $h : [c, d] \to [a, b]$ función C^1 tal que $h'(t) \neq 0 \ \forall t$

reparametrización

reparametrización

- $\alpha : [a, b] \to R^{2,3}$ curva paramétrica
- $h : [c, d] \to [a, b]$ función C^1 tal que $h'(t) \neq 0\ \forall t$
- reparametrización de α es $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^{2,3}$

$$\beta = \alpha \circ h$$

orientación

orientación

- β preserva orientación

orientación

orientación

- β preserva orientación
- si $h'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$

orientación

orientación

- β preserva orientación
- si $h'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$
- β revierte orientación si

orientación

orientación

- β preserva orientación
- si $h'(t) > 0$ para todo $t \in [c, d]$
- β revierte orientación si
- $h'(t) < 0$ para todo $t \in [c, d]$

propoosición

proposición

- β reparametrización de α que preserva orientación

propoosición

proposición

- β reparametrización de α que preserva orientación
- $\Rightarrow$
$$\int_\beta X d\beta = \int_\alpha X d\alpha$$

propoosición

proposición

- β reparametrización de α que preserva orientación
- $\Rightarrow$
$$\int_\beta X d\beta = \int_\alpha X d\alpha$$
- β reparametrización de α que revierte orientación

propoosición

proposición

- β reparametrización de α que preserva orientación
- $\Rightarrow$
$$\int_\beta X d\beta = \int_\alpha X d\alpha$$
- β reparametrización de α que revierte orientación
- $\Rightarrow$
$$\int_\beta X d\beta = -\int_\alpha X d\alpha$$

“el” ejemplo

“el” ejemplo

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$

“el” ejemplo

“el” ejemplo

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$
- definimos $-\alpha$ como $-\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$

“el” ejemplo

“el” ejemplo

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$
- definimos $-\alpha$ como $-\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$
- tal que $-\alpha(t) = \alpha(a + b - t)$

“el” ejemplo

“el” ejemplo

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$
- definimos $-\alpha$ como $-\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$
- tal que $-\alpha(t) = \alpha(a + b - t)$
- $-\alpha$ reparametrización que revierte orientación

"el" ejemplo

"el" ejemplo

- $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$
- definimos $-\alpha$ como $-\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^{2,3}$
- tal que $-\alpha(t) = \alpha(a + b - t)$
- $-\alpha$ reparametrización que revierte orientación
- $$\int_{-\alpha} X d\alpha = -\int_{\alpha} X d\alpha$$