Rotor y campos conservativos

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

7 de marzo de 2012

el operador nabla

el operador nabla

- el operador nabla

el operador nabla

el operador nabla

- el operador nabla
- es

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ejemplo

ejemplo

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable

ejemplo

ejemplo

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $\Rightarrow$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

ejemplo

ejemplo

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $\Rightarrow$
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$
- gradiente de f

rotor de un campo

rotor de $\mathbf{X}$

- $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo diferenciable

rotor de un campo

rotor de $\mathbf{X}$

- $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo diferenciable
- rotor de $\mathbf{X}$

rotor de un campo

rotor de $\mathbf{X}$

- $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo diferenciable
- rotor de $\mathbf{X}$
- $$\nabla \wedge \mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix}$$

rotor de un campo

rotor de $\mathbf{X}$

- $\mathbf{X} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo diferenciable
- rotor de $\mathbf{X}$
- $$\nabla \wedge \mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \left(\frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z}, \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x}, \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \right)$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X}(x, y, z) = (x, xy, 1)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X}(x, y, z) = (x, xy, 1)$
- $$\text{rot } \mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & xy & 1 \end{vmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X}(x, y, z) = (x, xy, 1)$
- $$\text{rot}\, \mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, y)$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (xy, -\sin z, 1)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (xy, -\sin z, 1)$
-
$$\operatorname{rot}\mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & -\sin z & 1 \end{vmatrix}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (xy, -\sin z, 1)$
-
$$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & -\sin z & 1 \end{vmatrix} = (\cos z, 0, -x)$$

ejemplo 3

campo plano

- $\mathbf{X} = (P, Q)$ campo plano

ejemplo 3

campo plano

- $\mathbf{X} = (P, Q)$ campo plano
- $$\text{rot}\,\mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

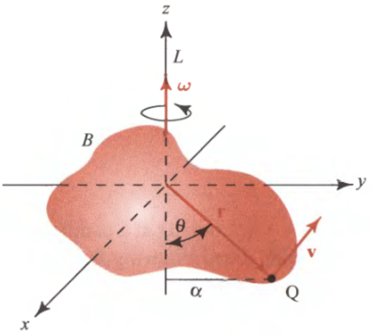
ejemplo 3

campo plano

- $\mathbf{X} = (P, Q)$ campo plano
-
$$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

el rotor y las rotaciones

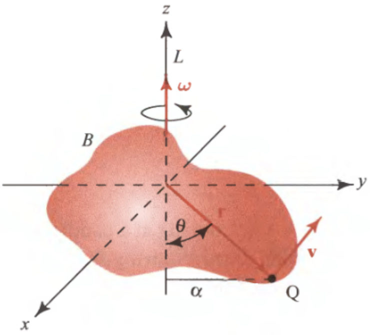
el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



- **v** velocidad de Q

el rotor y las rotaciones

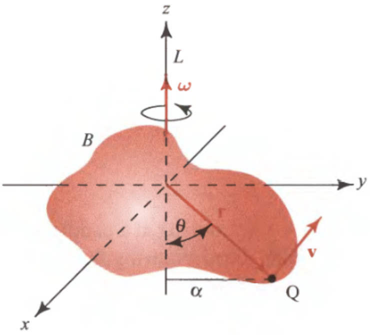
el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



- $\mathbf{v}$ velocidad de Q
- $\vec{\omega}$ vector velocidad angular de Q

el rotor y las rotaciones

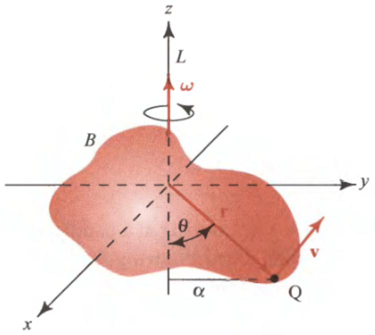
el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



- $\mathbf{v}$ velocidad de Q
- $\vec{\omega}$ vector velocidad angular de Q
- $\mathbf{r}$ vector posición de Q

el rotor y las rotaciones

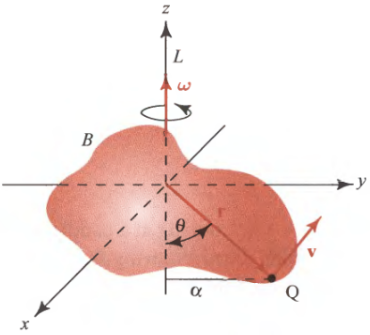
el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



- **v** velocidad de Q
- $\vec{\omega}$ vector velocidad angular de Q
- **r** vector posición de Q
- $\alpha = r \sin\theta$

el rotor y las rotaciones

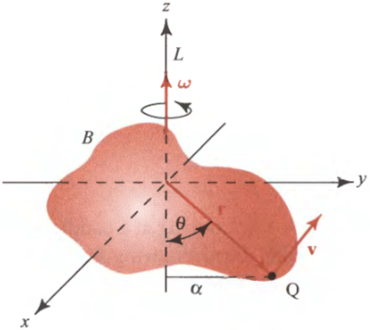
el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



- **v** velocidad de Q
- $\vec{\omega}$ vector velocidad angular de Q
- **r** vector posición de Q
- $\alpha = r \sin\theta$
- $\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha$

el rotor y las rotaciones

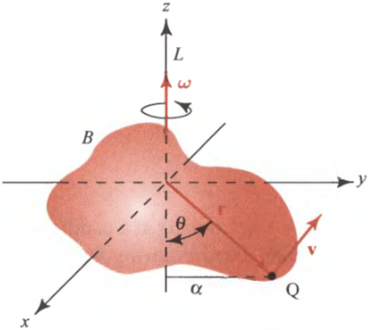
el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



- $\mathbf{v}$ velocidad de Q
- $\vec{\omega}$ vector velocidad angular de Q
- $\mathbf{r}$ vector posición de Q
- $\alpha = r \sin\theta$
- $\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha = \omega r \sin\theta$

el rotor y las rotaciones

el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido

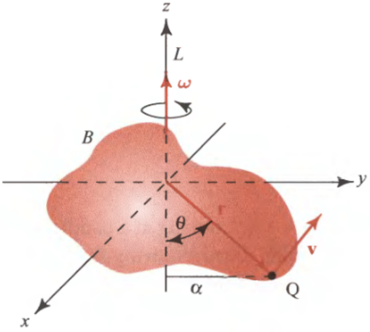


- $\vec{\omega}$ vector velocidad angular de Q
- $\mathbf{r}$ vector posición de Q
- $\alpha = r \sin\theta$
- $\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha = \omega r \sin\theta$
- $\Rightarrow$

  $\mathbf{v} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r}$

el rotor y las rotaciones

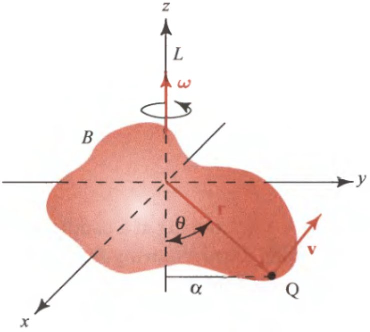
el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



- $\vec{\omega}$ vector velocidad angular de Q
- $\mathbf{r}$ vector posición de Q
- $\alpha = r \sin\theta$
- $\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha = \omega r \sin\theta$
- $\Rightarrow$ $\mathbf{v} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} = (-\omega y, \omega x, 0)$

el rotor y las rotaciones

el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido

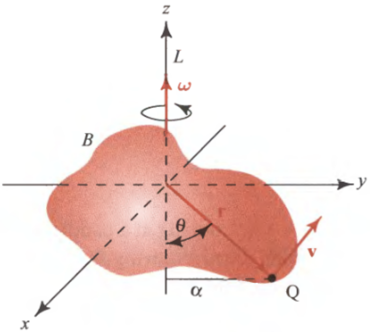


- $\alpha = r \sin\theta$
- $\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha = \omega r \sin\theta$
- $\Rightarrow \mathbf{v} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} = (-\omega y, \omega x, 0)$
- $\Rightarrow$

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}$$

el rotor y las rotaciones

el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



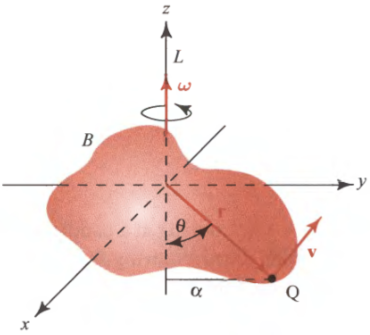
- $\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha = \omega r \sin\theta$
- $\Rightarrow \mathbf{v} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} = (-\omega y, \omega x, 0)$
- $\Rightarrow$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}$$

- $\text{rot } \mathbf{v} = (0, 0, 2\omega)$

el rotor y las rotaciones

el rotor y las rotaciones - aplicación - sólido rígido



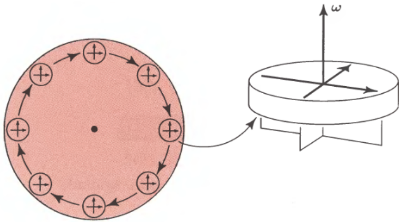
- $\|\mathbf{v}\| = \omega\alpha = \omega r \sin\theta$
- $\Rightarrow \mathbf{v} = \vec{\omega} \wedge \mathbf{r} = (-\omega y, \omega x, 0)$
- $\Rightarrow$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}$$

- $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (0, 0, 2\omega) = 2\vec{\omega}$

el rotor y las rotaciones

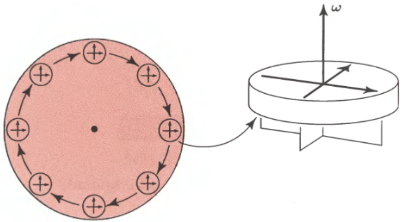
el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido



- **X** velocidad en (x, y, z)

el rotor y las rotaciones

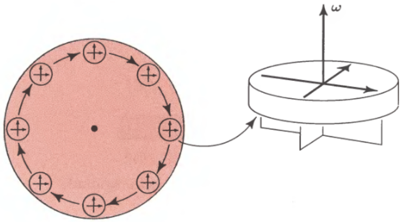
el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido



- $\mathbf{X}$ velocidad en (x, y, z)
- $\nabla \wedge \mathbf{X} = 2$ velocidad angular

el rotor y las rotaciones

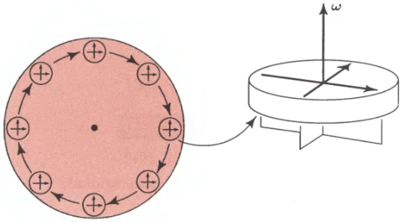
el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido



- $\mathbf{X}$ velocidad en (x, y, z)
- $\nabla \wedge \mathbf{X} = 2$ velocidad angular
- $\nabla \wedge \mathbf{X}(x, y, z) = \vec{0} \Rightarrow$ el fluido no tiene remolinos en (x, y, z)

el rotor y las rotaciones

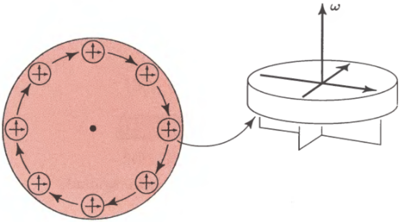
el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido



- $\nabla \wedge \mathbf{X} = 2$ velocidad angular
- $\nabla \wedge \mathbf{X}(x, y, z) = \vec{0} \Rightarrow$ el fluido no tiene remolinos en (x, y, z)
- la ruedita gira con el fluido, pero no alrededor de su eje

el rotor y las rotaciones

el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido



- $\nabla \wedge \mathbf{X}(x, y, z) = \vec{0} \Rightarrow$ el fluido no tiene remolinos en (x, y, z)
- la ruedita gira con el fluido, pero no alrededor de su eje
- esto es lo que pasa con un líquido que se desagota

campo irrotacional

campo irrotacional

- $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial

campo irrotacional

campo irrotacional

- $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial
- $\mathbf{X}$ campo irrotacional

campo irrotacional

campo irrotacional

- $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial
- $\mathbf{X}$ campo irrotacional
- si

$$\operatorname{rot} \mathbf{X} \equiv \vec{0}$$

ejemplo

ejemplo

- $$\mathbf{X}(x,y,z) = \frac{(y,-x,0)}{x^2+y^2}$$

  es irrotacional en su dominio

ejemplo

ejemplo

- $$\mathbf{X}(x, y, z) = \frac{(y, -x, 0)}{x^2 + y^2}$$

  es irrotacional en su dominio

- $$\text{rot } \mathbf{X} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right)$$

ejemplo

ejemplo

- $$\mathbf{X}(x,y,z) = \frac{(y,-x,0)}{x^2+y^2}$$

  es irrotacional en su dominio

- $$\operatorname{rot}\mathbf{X} = \left(0,0,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

- $$\operatorname{rot}\mathbf{X} = \left(0,0,-\frac{(x^2+y^2)-2x^2+(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

ejemplo

ejemplo

- $$\mathbf{X}(x, y, z) = \frac{(y, -x, 0)}{x^2 + y^2}$$
  es irrotacional en su dominio
- $$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right)$$
- $$\operatorname{rot} \mathbf{X} = \left(0, 0, -\frac{(x^2 + y^2) - 2x^2 + (x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) = \vec{0}$$

campos conservativos

campos conservativos

- **X** campo vectorial

campos conservativos

campos conservativos

- **X** campo vectorial
- **X** campo conservativo o de gradientes

campos conservativos

campos conservativos

- $\mathbf{X}$ campo vectorial
- $\mathbf{X}$ campo conservativo o de gradientes
- si

$$\mathbf{X} = \nabla f$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)?$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)?$
- $f = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)?$
- $f = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
- $f = \int \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)?$
- $f = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
- $f = \int \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
- $f = \int \frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)?$
- $f = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{yz}$
- $f = \int \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
- $f = \int \frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

campos conservativos

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)$?
- $f = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{yz}$
- $f = \int \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{xz}$
- $f = \int \frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)?$
- $f = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{yz}$
- $f = \int \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{xz}$
- $f = \int \frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{xy}$

campos conservativos

ejemplo 1

ejemplo 1

- $\mathbf{X} = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (f_x, f_y, f_z)$?
- $f = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{yz}$
- $f = \int \frac{y dy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{xz}$
- $f = \int \frac{z dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_{xy}$
- $\Rightarrow \nabla f = \mathbf{X}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (y, x, 1)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (y, x, 1) = (f_x, f_y, f_z)$?

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (y, x, 1) = (f_x, f_y, f_z)$?
- $f = yx + C_{yz}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (y, x, 1) = (f_x, f_y, f_z)$?
- $f = yx + C_{yz}$
- $f = yx + C_{xz}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (y, x, 1) = (f_x, f_y, f_z)$?
- $f = yx + C_{yz}$
- $f = yx + C_{xz}$
- $f = z + C_{xy}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (y, x, 1) = (f_x, f_y, f_z)$?
- $f = yx + C_{yz}$
- $f = yx + C_{xz} \qquad \Rightarrow \qquad f(x, y, z) = xy + z$
- $f = z + C_{xy}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- $\mathbf{X} = (y, x, 1) = (f_x, f_y, f_z)?$
- $f = yx + C_{yz}$
- $f = yx + C_{xz} \qquad \Rightarrow \qquad f(x, y, z) = xy + z$
- $f = z + C_{xy}$
- cumple $\nabla f = \mathbf{X}$

potencial escalar

potencial escalar

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial

potencial escalar

potencial escalar

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial
- f potencial escalar de **X**

potencial escalar

potencial escalar

- $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial
- f potencial escalar de $\mathbf{X}$
- si

$$\nabla f = \mathbf{X}$$

campo de gradientes y superficies de nivel

teorema

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable

campo de gradientes y superficies de nivel

teorema

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $(x_0, y_0, z_0) \in S \subset f^{-1}(c)$ superficie de nivel

campo de gradientes y superficies de nivel

teorema

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $(x_0, y_0, z_0) \in S \subset f^{-1}(c)$ superficie de nivel
- $\Rightarrow$
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp S$$

campo de gradientes y superficies de nivel

teorema

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $(x_0, y_0, z_0) \in S \subset f^{-1}(c)$ superficie de nivel
- $\Rightarrow$

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp S$$

vector perpendicular a la superficie de nivel

campo de gradientes y superficies de nivel

teorema

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $(x_0, y_0, z_0) \in S \subset f^{-1}(c)$ superficie de nivel
- $\Rightarrow$
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp S$$

vector perpendicular a la superficie de nivel

- $f(\alpha(t)) = c$ curva contenida en la superficie S

campo de gradientes y superficies de nivel

teorema

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $(x_0, y_0, z_0) \in S \subset f^{-1}(c)$ superficie de nivel
- $\Rightarrow$
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp S$$

vector perpendicular a la superficie de nivel

- $f(\alpha(t)) = c$ curva contenida en la superficie S
- $\alpha(0) = (x_0, y_0, z_0)$

campo de gradientes y superficies de nivel

teorema

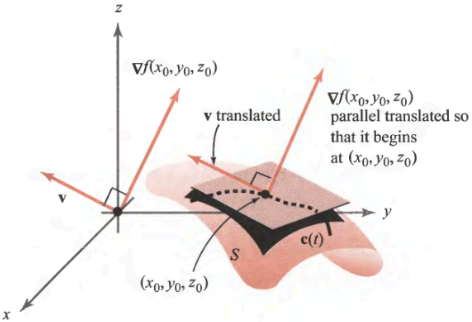
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable
- $(x_0, y_0, z_0) \in S \subset f^{-1}(c)$ superficie de nivel
- $\Rightarrow$
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp S$$

vector perpendicular a la superficie de nivel

- $f(\alpha(t)) = c$ curva contenida en la superficie S
- $\alpha(0) = (x_0, y_0, z_0)$
- $\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0, z_0).\alpha'(0) = 0$

demostración

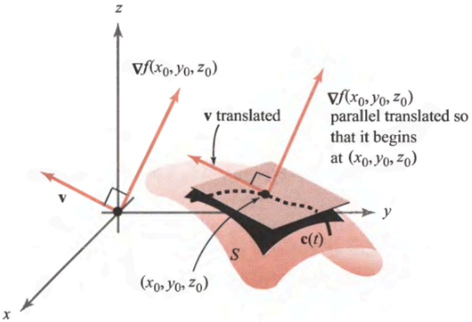
demostración



- $f(\alpha(t)) = c \; \forall t$

demostración

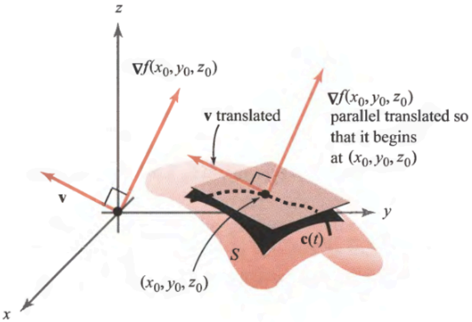
demostración



- $f(\alpha(t)) = c \; \forall t$
- $\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = 0$

demostración

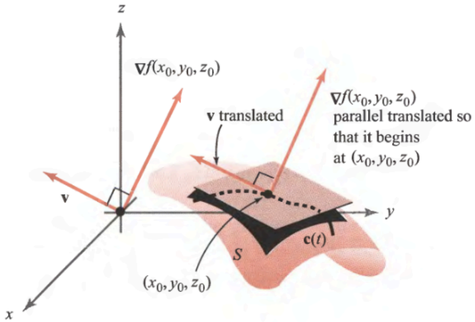
demostración



- $f(\alpha(t)) = c \; \forall t$
- $\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = 0$
- x regla de la cadena

demostración

demostración



- $f(\alpha(t)) = c \; \forall t$
- $\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = 0$
- x regla de la cadena
- $\nabla f(\alpha(0)).\alpha'(0) = 0$

ejemplo 1

ejemplo 1

- encontrar un vector unitario $\perp$ a la superficie $z = x^2 y^2 + y + 1$ en $(0, 0, 1)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- encontrar un vector unitario $\perp$ a la superficie $z = x^2y^2 + y + 1$ en $(0, 0, 1)$
- $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$

ejemplo 1

ejemplo 1

- encontrar un vector unitario $\perp$ a la superficie $z = x^2y^2 + y + 1$ en $(0, 0, 1)$
- $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$
- superficie $S = f^{-1}(0)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- encontrar un vector unitario $\perp$ a la superficie $z = x^2y^2 + y + 1$ en $(0,0,1)$
- $f(x,y,z) = x^2y^2 + y + 1 - z$
- superficie $S = f^{-1}(0)$
- $\Rightarrow \nabla f(0,0,1) \perp S$ en $(0,0,1)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- encontrar un vector unitario $\perp$ a la superficie $z = x^2y^2 + y + 1$ en $(0, 0, 1)$
- $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$
- superficie $S = f^{-1}(0)$
- $\Rightarrow \nabla f(0, 0, 1) \perp S$ en $(0, 0, 1)$
- divido por la norma y obtengo vector unitario

ejemplo 1

ejemplo 1

- encontrar un vector unitario $\perp$ a la superficie $z = x^2y^2 + y + 1$ en $(0, 0, 1)$
- $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$
- superficie $S = f^{-1}(0)$
- $\Rightarrow \nabla f(0, 0, 1) \perp S$ en $(0, 0, 1)$
- divido por la norma y obtengo vector unitario
- respuesta:

$$v = \frac{\nabla f(0, 0, 1)}{\|\nabla f(0, 0, 1)\|}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- encontrar un vector unitario $\perp$ a la superficie $z = x^2y^2 + y + 1$ en $(0,0,1)$
- $f(x,y,z) = x^2y^2 + y + 1 - z$
- superficie $S = f^{-1}(0)$
- $\Rightarrow \nabla f(0,0,1) \perp S$ en $(0,0,1)$
- divido por la norma y obtengo vector unitario
- respuesta:

$$v = \frac{\nabla f(0,0,1)}{\|\nabla f(0,0,1)\|} = \frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$$

ejemplo 2

ejemplo 2 - aplicación - líneas equipotenciales

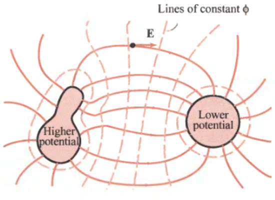
- 2 conductores, uno con carga $\oplus$ otro con carga $\ominus$

ejemplo 2

ejemplo 2 - aplicación - líneas equipotenciales

- 2 conductores, uno con carga $\oplus$ otro con carga $\ominus$
- se establece un potencial eléctrico $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

líneas equipotenciales

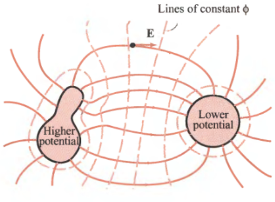


ejemplo 2

ejemplo 2 - aplicación - líneas equipotenciales

- 2 conductores, uno con carga $\oplus$ otro con carga $\ominus$
- se establece un potencial eléctrico $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- superficies de nivel de ϕ: superficies equipotenciales

líneas equipotenciales

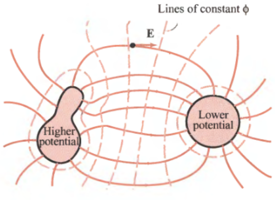


ejemplo 2

ejemplo 2 - aplicación - líneas equipotenciales

- 2 conductores, uno con carga $\oplus$ otro con carga $\ominus$
- se establece un potencial eléctrico $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- superficies de nivel de ϕ: superficies equipotenciales
- el campo eléctrico es $\mathbf{E} = -\nabla\phi$

líneas equipotenciales

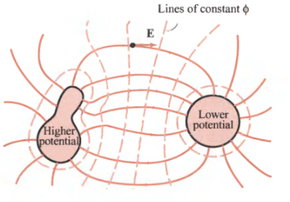


ejemplo 2

ejemplo 2 - aplicación - líneas equipotenciales

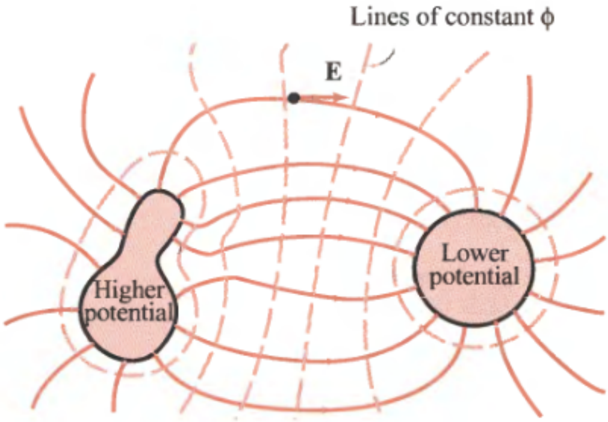
- 2 conductores, uno con carga $\oplus$ otro con carga $\ominus$
- se establece un potencial eléctrico $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- superficies de nivel de ϕ: superficies equipotenciales
- el campo eléctrico es $\mathbf{E} = -\nabla\phi$
- $\mathbf{E} \perp$ (superficies equipotenciales)

líneas equipotenciales



líneas equipotenciales

líneas equipotenciales



el rotor de un gradiente es cero

teorema

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función C^2

el rotor de un gradiente es cero

teorema

- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función C^2
- $\Rightarrow$
$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \vec{0}$$

el rotor del gradiente es cero

demostración

$$\mathrm{rot}(\nabla f) =$$

el rotor del gradiente es cero

demostración

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

el rotor del gradiente es cero

demostración

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy})$$

el rotor del gradiente es cero

demostración

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = \vec{0}$$