

Equivalencia entre campos irrotacionales y campos conservativos

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

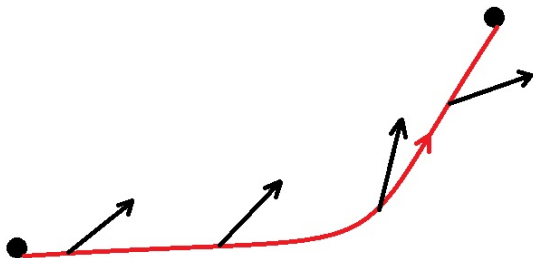
IMERL

12 de marzo de 2012

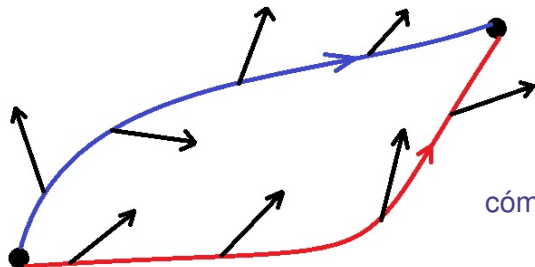
●○○○○○

○○○○○○○○○○○○○○○○○○

○○○



$$\int_{C_1} \mathbf{X} d\alpha$$



$$\int_{C_1} \mathbf{X} d\alpha \stackrel{?}{=} \int_{C_2} \mathbf{X} d\alpha$$

cómo distinguir cuándo?

un caso positivo

teorema (campos conservativos)

- **X** campo conservativo

un caso positivo

teorema (campos conservativos)

- $\mathbf{X}$ campo conservativo
- $\mathbf{X} = \nabla f$

un caso positivo

teorema (campos conservativos)

- $\mathbf{X}$ campo conservativo
- $\mathbf{X} = \nabla f$
- $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva C^1

un caso positivo

teorema (campos conservativos)

- $\mathbf{X}$ campo conservativo
- $\mathbf{X} = \nabla f$
- $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ curva C^1
- $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} \mathbf{X} d\alpha = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

teorema campos conservativos

demostración

- x regla de la cadena

teorema campos conservativos

demostración

- x regla de la cadena



$$\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

teorema campos conservativos

demostración

- x regla de la cadena



$$\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))\alpha'(t)$$

teorema campos conservativos

demostración

- x regla de la cadena



$$\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))\alpha'(t)$$



$$\int_{\alpha} \mathbf{X} d\alpha = \int_a^b \frac{d}{dt}f(\alpha(t)) dt$$

teorema campos conservativos

demostración

- x regla de la cadena



$$\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))\alpha'(t)$$

- x teorema fundamental del cálculo

$$\int_{\alpha} \mathbf{X}d\alpha = \int_a^b \frac{d}{dt}f(\alpha(t))dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

teorema campos conservativos

demostración

- x regla de la cadena



$$\frac{d}{dt}f(\alpha(t)) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))\alpha'(t)$$

- x teorema fundamental del cálculo

$$\int_{\alpha} \mathbf{X}d\alpha = \int_a^b \frac{d}{dt}f(\alpha(t))dt = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$



ejemplo

ejemplo

- $\alpha(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin^3(\frac{t\pi}{2}), 0)$ con $t \in [0, 1]$

ejemplo

ejemplo

- $\alpha(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin^3(\frac{t\pi}{2}), 0)$ con $t \in [0, 1]$
- calcular $\int_{\alpha} ydx + xdy$

ejemplo

ejemplo

- $\alpha(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin^3(\frac{t\pi}{2}), 0)$ con $t \in [0, 1]$
- calcular $\int_{\alpha} ydx + xdy$
- $\mathbf{X} \stackrel{?}{=} \nabla f$

ejemplo

ejemplo

- $\alpha(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin^3(\frac{t\pi}{2}), 0)$ con $t \in [0, 1]$
- calcular $\int_{\alpha} ydx + xdy$
- $\mathbf{X} \stackrel{?}{=} \nabla f \quad \rightarrow f(x, y) = xy$

ejemplo

ejemplo

- $\alpha(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin^3(\frac{t\pi}{2}), 0)$ con $t \in [0, 1]$

- calcular $\int_{\alpha} ydx + xdy$

- $\mathbf{X} \stackrel{?}{=} \nabla f \rightarrow f(x, y) = xy$

- $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} ydx + xdy = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0))$$

ejemplo

ejemplo

- $\alpha(t) = (\frac{t^4}{4}, \sin^3(\frac{t\pi}{2}), 0)$ con $t \in [0, 1]$
- calcular $\int_{\alpha} ydx + xdy$
- $\mathbf{X} \stackrel{?}{=} \nabla f \rightarrow f(x, y) = xy$
- $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} ydx + xdy = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = \frac{1}{4}$$

observación

observación

- X conservativo

observación

observación

- X conservativo
- $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} X d\alpha$$

no depende de la trayectoria.

problema

problema

¿ cuándo un campo X es conservativo?

teorema equivalencia irrotacional=conservativo

el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido

- $X : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable

teorema equivalencia irrotacional=conservativo

el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido

- $X : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable
- son equivalentes:

teorema equivalencia irrotacional=conservativo

el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido

- $X : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable
- son equivalentes:

1

$$\int_C X d\alpha = 0 \quad \forall C \text{ cerrada}$$

teorema equivalencia irrotacional=conservativo

el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido

- $X : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable
- son equivalentes:

1

$$\int_C X d\alpha = 0 \quad \forall C \text{ cerrada}$$

2

$$\int_{C_1(p,q)} X d\alpha = \int_{C_2(p,q)} X d\alpha \quad \forall C_i(p,q)$$

teorema equivalencia irrotacional=conservativo

el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido

- $X : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable
- son equivalentes:

1

$$\int_C X d\alpha = 0 \quad \forall C \text{ cerrada}$$

2

$$\int_{C_1(p,q)} X d\alpha = \int_{C_2(p,q)} X d\alpha \quad \forall C_i(p,q)$$

3

$X = \nabla f$ es conservativo

teorema equivalencia irrotacional=conservativo

el rotor y las rotaciones - aplicación - fluido

- $X : \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable
- son equivalentes:

1

$$\int_C X d\alpha = 0 \quad \forall C \text{ cerrada}$$

2

$$\int_{C_1(p,q)} X d\alpha = \int_{C_2(p,q)} X d\alpha \quad \forall C_i(p,q)$$

3

$X = \nabla f$ es conservativo

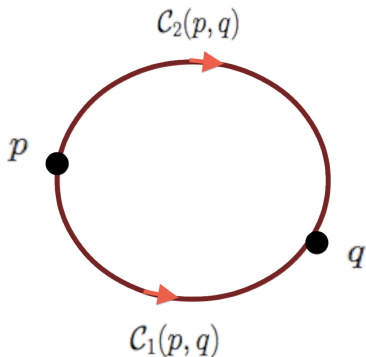
4

X es irrotacional: $\text{rot}(X) \equiv \vec{0}$

demostración

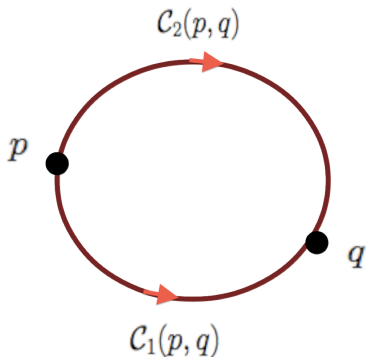
demostración (1) $\Rightarrow$ (2)

● (?)



$$\int_{C_1(p,q)} X d\alpha = \int_{C_2(p,q)} X d\alpha$$

demostración

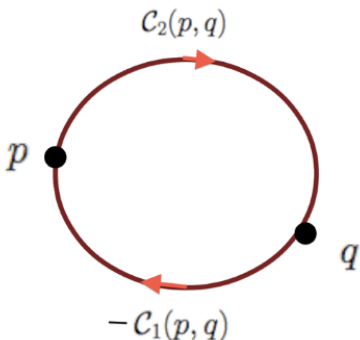
demostración (1) $\Rightarrow$ (2)

$$\int_{C_1(p,q)} X d\alpha = \int_{C_2(p,q)} X d\alpha$$



$$\int_{C_1(p,q) - C_2(p,q)} X d\alpha = 0$$

demostración

demostración (1) $\Rightarrow$ (2)

● (?)

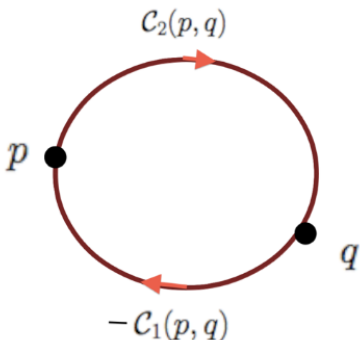
$$\int_{C_1(p, q)} X d\alpha = \int_{C_2(p, q)} X d\alpha$$

● $\iff$

$$\int_{C_1(p, q) - C_2(p, q)} X d\alpha = 0$$

● pero $C_1(p, q) - C_2(p, q)$
curva cerrada

demostración

demostración (1) $\Rightarrow$ (2)

● (?)

$$\int_{C_1(p,q)} X d\alpha = \int_{C_2(p,q)} X d\alpha$$

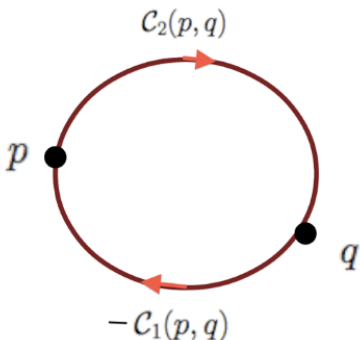
● $\iff$

$$\int_{C_1(p,q)-C_2(p,q)} X d\alpha = 0$$

● pero $C_1(p, q) - C_2(p, q)$
curva cerrada

● sale por (1)

demostración

demostración (1) $\Rightarrow$ (2)

● (?)

$$\int_{C_1(p,q)} X d\alpha = \int_{C_2(p,q)} X d\alpha$$

● $\iff$

$$\int_{C_1(p,q) - C_2(p,q)} X d\alpha = 0$$

● pero $C_1(p, q) - C_2(p, q)$
curva cerrada

● sale por (1)

demostración

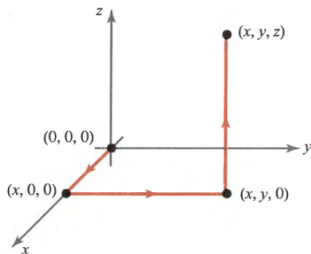
demostración (2) $\Rightarrow$ (3)

- suponemos $\int_{\alpha} X d\alpha$ no depende de α

demostración

demostración (2) $\Rightarrow$ (3)

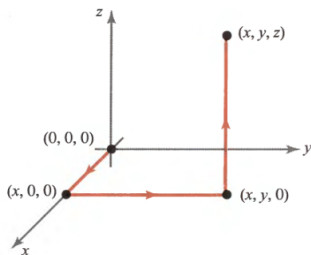
- suponemos $\int_{\alpha} X d\alpha$ no depende de α
- $f(x, y, z) := \int_{C(x, y, z)} X d\alpha$

curva $C(x, y, z)$

demostración

demostración (2) $\Rightarrow$ (3)

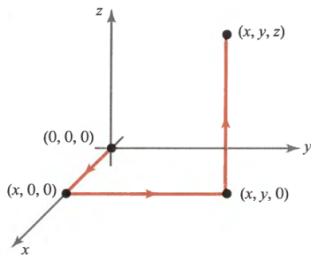
$$\bullet f(x, y, z) = \int_0^x X_1(t, 0, 0)dt + \int_0^y X_2(x, t, 0)dt + \int_0^z X_3(x, y, t)dt$$

curva $\mathcal{C}(x, y, z)$

demostración

demostración (2) $\Rightarrow$ (3)

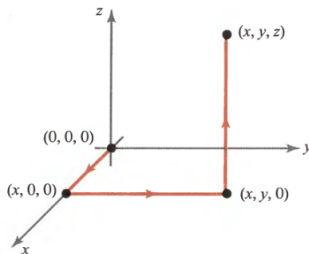
- $f(x, y, z) = \int_0^x X_1(t, 0, 0)dt + \int_0^y X_2(x, t, 0)dt + \int_0^z X_3(x, y, t)dt$
- $\Rightarrow f_z = X_3$

curva $\mathcal{C}(x, y, z)$

demostración

demostración (2) $\Rightarrow$ (3)

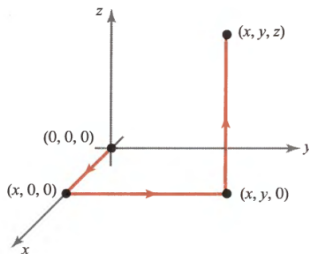
- $\Rightarrow f_z = X_3$
- cambiando $\mathcal{C}$ se prueba $f_y = X_2$ y $f_x = X_1$

curva $\mathcal{C}(x, y, z)$

demostración

demostración (2) $\Rightarrow$ (3)

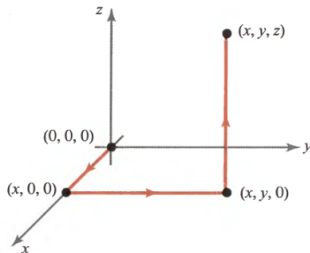
- $\Rightarrow f_z = X_3$
- cambiando $\mathcal{C}$ se prueba $f_y = X_2$ y $f_x = X_1$
- $\Rightarrow \nabla f = X$

curva $\mathcal{C}(x, y, z)$

demostración

demostración (2) $\Rightarrow$ (3)

- $\Rightarrow f_z = X_3$
- cambiando $\mathcal{C}$ se prueba $f_y = X_2$ y $f_x = X_1$
- $\Rightarrow \nabla f = X$



curva $\mathcal{C}(x, y, z)$

demostración

demostración (3) $\Rightarrow$ (4)

- lo vimos la clase pasada:

demostración

demostración (3) $\Rightarrow$ (4)

- lo vimos la clase pasada:
- $X = \nabla f$

demostración

demostración (3) $\Rightarrow$ (4)

- lo vimos la clase pasada:
- $X = \nabla f$
- $\Rightarrow \text{rot}(X)$

demostración

demostración (3) $\Rightarrow$ (4)

- lo vimos la clase pasada:
- $X = \nabla f$
- $\Rightarrow \text{rot}(X) = \nabla \wedge \nabla f$

demostración

demostración (3) $\Rightarrow$ (4)

- lo vimos la clase pasada:
- $X = \nabla f$
- $\Rightarrow \text{rot}(X) = \nabla \wedge \nabla f = \vec{0}$

demostración

demostración (3) $\Rightarrow$ (4)

- lo vimos la clase pasada:
- $X = \nabla f$
- $\Rightarrow \text{rot}(X) = \nabla \wedge \nabla f = \vec{0}$



demostración

demostración

demostración (4) $\Rightarrow$ (1)

● todavía no

demostración

demostración $\textcircled{4} \Rightarrow \textcircled{1}$

- todavía no
- lo veremos en la segunda mitad del curso

demostración

demostración (4) $\Rightarrow$ (1)

- todavía no
- lo veremos en la segunda mitad del curso
- cuando veamos el Teorema de Stokes

demostración

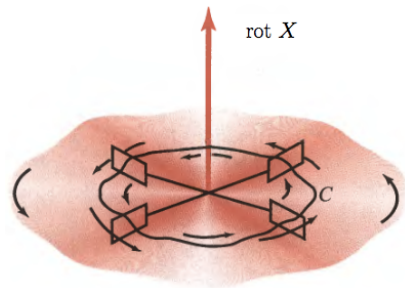
demostración (4) $\Rightarrow$ (1)

- todavía no
- lo veremos en la segunda mitad del curso
- cuando veamos el Teorema de Stokes
- continuará...

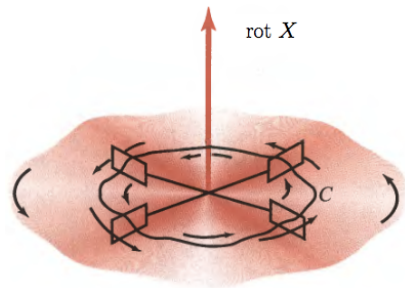
interpretación física

interpretación física

interpretación física

● X vector velocidad

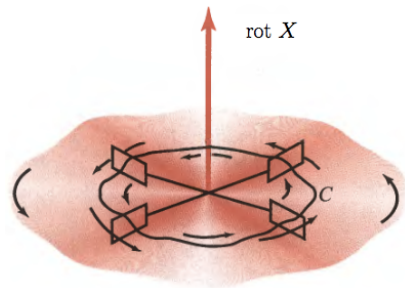
interpretación física



- X vector velocidad
- $X \cdot \Delta\alpha \approx$ componente tgcial de $X \cdot \|\Delta\alpha\|$

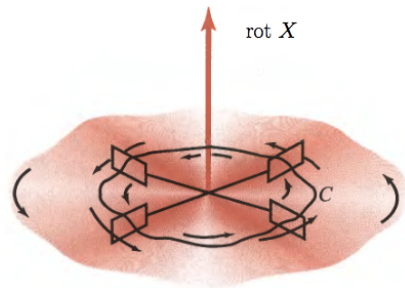
interpretación física

interpretación física



- X vector velocidad
- $X \cdot \Delta\alpha \approx$ componente tgcial de $X \cdot \|\Delta\alpha\|$
- $\int_C X d\alpha$ comp tgcial neta alr de C

interpretación física

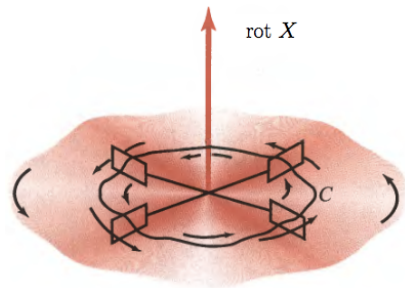


- X vector velocidad
- $X \cdot \Delta\alpha \approx$ componente tgcial de $X \cdot \|\Delta\alpha\|$
- $\int_C X d\alpha$ comp tgcial neta alr de C
- $\int_C X d\alpha \neq 0 \Rightarrow$ la rueda gira alr de su eje

interpretación física

interpretación física

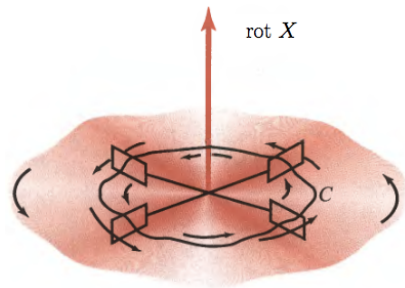
interpretación física



● E campo eléctrico

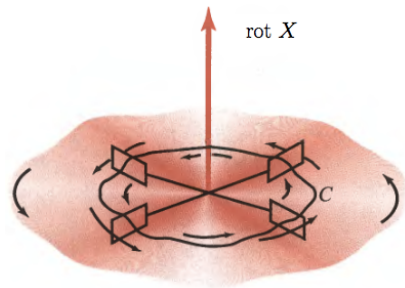
interpretación física

interpretación física



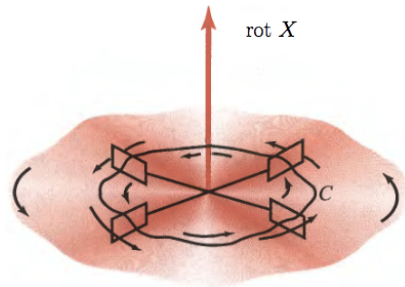
- E campo eléctrico
- la corriente fluye alrededor de C

interpretación física



- E campo eléctrico
- la corriente fluye alrededor de C
- si $\int_C E d\alpha \neq 0$

interpretación física



- E campo eléctrico
- la corriente fluye alrededor de C
- si $\int_C E d\alpha \neq 0$
- o equivalentemente, si $\text{rot}(E) \neq \vec{0}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
-

$$\text{rot}(X) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & y + z \cos yz + x & y \cos yz \end{vmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
-

$$\begin{aligned} \text{rot}(X) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & y + z \cos yz + x & y \cos yz \end{vmatrix} \\ &= (\cos yz - yz \sin yz - \cos yz + yz \sin yz, 0 - 0, 1 - 1) \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
-

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(X) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & y + z \cos yz + x & y \cos yz \end{vmatrix} \\
 &= (\cos yz - yz \sin yz - \cos yz + yz \sin yz, 0 - 0, 1 - 1) \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
-

$$f = \int_0^x X_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y X_2(x, t, 0) dt + \int_0^z X_3(x, y, t) dt$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
-

$$\begin{aligned}
 f &= \int_0^x X_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y X_2(x, t, 0) dt + \int_0^z X_3(x, y, t) dt \\
 &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos y t dt
 \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
-

$$\begin{aligned}
 f &= \int_0^x X_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y X_2(x, t, 0) dt + \int_0^z X_3(x, y, t) dt \\
 &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos y t dt \\
 &= xy + \sin yz
 \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
-

$$\begin{aligned}
 f &= \int_0^x X_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y X_2(x, t, 0) dt + \int_0^z X_3(x, y, t) dt \\
 &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos y t dt \\
 &= xy + \sin yz
 \end{aligned}$$

- otra forma:

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
- $f(x, y, z) = xy + C_{yz}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
- $f(x, y, z) = xy + C_{yz}$
- $f(x, y, z) = xy + \sin yz + C_{yz}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
- $f(x, y, z) = xy + C_{yz}$
- $f(x, y, z) = xy + \sin yz + C_{yz}$
- $f(x, y) = \sin yz + C_{xy}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $X = (y, z \cos yz + x, y \cos yz)$
- mostrar que X irrotacional y encontrar potencial de X
- $f(x, y, z) = xy + C_{yz}$
- $f(x, y, z) = xy + \sin yz + C_{yz} \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = xy + \sin yz$
- $f(x, y) = \sin yz + C_{xy}$

ejemplo 2

ejemplo 2

- M masa situada en el origen

ejemplo 2

ejemplo 2

- M masa situada en el origen
- m masa colocada en el punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$

ejemplo 2

ejemplo 2

- M masa situada en el origen
- m masa colocada en el punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- campo gravitatorio:

$$X(x, y, z) = -\frac{GMm\mathbf{r}}{r^3}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- campo gravitatorio:

$$X(x, y, z) = -\frac{GMmr}{r^3}$$

- X es irrotacional. Encontrar un potencial para X

ejemplo 2

ejemplo 2



$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \nabla \frac{1}{r^3} \wedge \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \wedge \mathbf{r}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \nabla \frac{1}{r^3} \wedge \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \wedge \mathbf{r}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \nabla \frac{1}{r^3} \wedge \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \wedge \mathbf{r}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{r} = \vec{0}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \nabla \frac{1}{r^3} \wedge \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \wedge \mathbf{r} = \vec{0}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{r} = \vec{0}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$f = \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$f = \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$f = \int \frac{y dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$f = \int \frac{xdx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$f = \int \frac{ydy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$f = \int \frac{zdz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$f = \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_x dx}{r^2}$$



$$f = \int \frac{y dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



$$f = \int \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$f = \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_x dx}{r^2}$$



$$f = \int \frac{y dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_y dy}{r^2}$$



$$f = \int \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$f = \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_x dx}{r^2}$$



$$f = \int \frac{y dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_y dy}{r^2}$$



$$f = \int \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_z dz}{r^2}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



$$f = \int \frac{x dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_x dx}{r^2}$$



$$f = \int \frac{y dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_y dy}{r^2}$$



$$f = \int \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{r_z dz}{r^2}$$



$$f(x, y, z) = -\frac{1}{r}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- campo gravitatorio:

ejemplo 2

ejemplo 2

- campo gravitatorio:



$$X = -\frac{GMmr}{r^3}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- campo gravitatorio:



$$X = -\frac{GMmr}{r^3}$$

- tiene potencial gravitatorio

ejemplo 2

ejemplo 2

- campo gravitatorio:



$$X = -\frac{GMmr}{r^3}$$

- tiene potencial gravitatorio



$$V(r) = \frac{GMm}{r}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- campo gravitatorio:



$$X = -\frac{GMmr}{r^3}$$

- tiene potencial gravitatorio



$$V(r) = \frac{GMm}{r}$$



$$X = \nabla V$$

cuidado

cuidado

si no se cumplen las hipótesis dominio $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$,
entonces:

X irrotacional $\nRightarrow X$ tiene potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar



$$X(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar



$$X(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

- $\text{rot}(X) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje z (clase pasada)

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar



$$X(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

- $\text{rot}(X) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eje } z$ (clase pasada)
- $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar



$$X(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

● $\text{rot}(X) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eje } z$ (clase pasada)

● $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

● $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} X d\alpha =$$

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar



$$X(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

● $\text{rot}(X) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eje } z$ (clase pasada)

● $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

● $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} X d\alpha = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)(-\sin t, \cos t, 0)$$

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar



$$X(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

● $\text{rot}(X) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eje } z$ (clase pasada)

● $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

● $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} X d\alpha = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)(-\sin t, \cos t, 0) = 2\pi \neq 0$$

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar

ejemplo - un campo irrotacional SIN potencial escalar



$$X(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

● $\text{rot}(X) = \vec{0}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus$ eje z (clase pasada)

● $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

● $\Rightarrow$

$$\int_{\alpha} X d\alpha = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t, 0)(-\sin t, \cos t, 0) = 2\pi \neq 0$$

● $\Rightarrow$ no tiene potencial escalar

el caso plano

el caso plano

el caso plano

- $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable (sin puntos excepcionales)

el caso plano

el caso plano

el caso plano

- $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable (sin puntos excepcionales)
- son equivalentes:

el caso plano

el caso plano

el caso plano

- $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable (sin puntos excepcionales)
- son equivalentes:

1

$$\int_C X d\alpha \quad \forall C \text{ cerrada}$$

el caso plano

el caso plano

el caso plano

- $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable (sin puntos excepcionales)
- son equivalentes:

1

$$\int_C X d\alpha \quad \forall C \text{ cerrada}$$

2

$X = \nabla f$ conservativo

el caso plano

el caso plano

el caso plano

- $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable (sin puntos excepcionales)
- son equivalentes:

1

$$\int_C X d\alpha \quad \forall C \text{ cerrada}$$

2

 $X = \nabla f$ conservativo

3

 X irrotacional

el caso plano

ejemplo

ejemplo

Determinar si $X = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$ es de gradientes

- X diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

el caso plano

ejemplo

ejemplo

Determinar si $X = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$ es de gradientes

- X diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ ✓

el caso plano

ejemplo

ejemplo

Determinar si $X = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$ es de gradientes

- X diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ ✓
- $P_y - Q_x = -2x \sin y + 2x \sin y$

el caso plano

ejemplo

ejemplo

Determinar si $X = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$ es de gradientes

- X diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ ✓
- $P_y - Q_x = -2x \sin y + 2x \sin y = 0$

el caso plano

ejemplo

ejemplo

Determinar si $X = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$ es de gradientes

- X diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ ✓
- $P_y - Q_x = -2x \sin y + 2x \sin y = 0$
- $\Rightarrow$ es de gradientes.

el caso plano

ejemplo

ejemplo

- calcular $\int_{\alpha} X d\alpha$ con $\alpha(t) = (e^{t-1}, \sin \frac{\pi}{t})$, $t \in [1, 2]$

el caso plano

ejemplo

ejemplo

- calcular $\int_{\alpha} X d\alpha$ con $\alpha(t) = (e^{t-1}, \sin \frac{\pi}{t})$, $t \in [1, 2]$
- $f = \int 2x \cos y dx = x^2 \cos y + C_y$

el caso plano

ejemplo

ejemplo

- calcular $\int_{\alpha} X d\alpha$ con $\alpha(t) = (e^{t-1}, \sin \frac{\pi}{t}), t \in [1, 2]$
- $f = \int 2x \cos y dx = x^2 \cos y + C_y$
- $f = - \int x^2 \sin y dy = x^2 \cos y + c_x$

el caso plano

ejemplo

ejemplo

- calcular $\int_{\alpha} X d\alpha$ con $\alpha(t) = (e^{t-1}, \sin \frac{\pi}{t})$, $t \in [1, 2]$
- $f = \int 2x \cos y dx = x^2 \cos y + C_y$
- $f = - \int x^2 \sin y dy = x^2 \cos y + C_x$
- $\int_{\alpha} X d\alpha = f(\alpha(2)) - f(\alpha(1))$