# Superficies paramétricas

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

14 de marzo de 2012

# parametrización de una superficie

## definición (parametrización de una superficie)

# parametrización de una superficie

## definición (parametrización de una superficie)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua e inyectiva

# parametrización de una superficie

## definición (parametrización de una superficie)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua e inyectiva
- parametrización de una superficie si

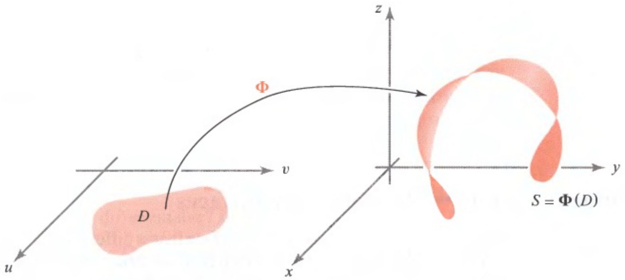
# parametrización de una superficie

## definición (parametrización de una superficie)

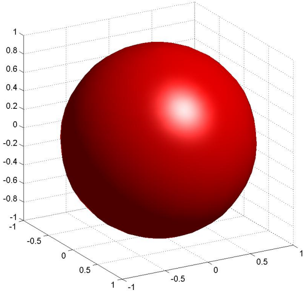
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ continua e inyectiva
- parametrización de una superficie si
- $\Phi(u, v) = (x, y, z)$ con

$$(S) \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

# parametrización de una superficie

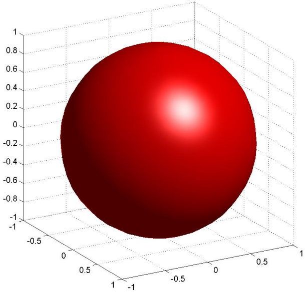


# esfera




esfera centro 0 radio $r$

# esfera

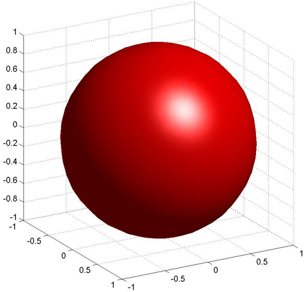



$$\begin{cases} x = r\cos u \cos v \\ y = r\sin u \cos v \\ z = r\sin v \end{cases}$$

$$u \in (0, 2\pi),\ v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

esfera centro 0 radio $r$

## esfera



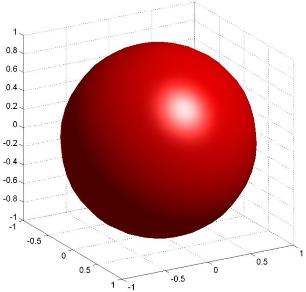

$$\begin{cases} x = r\cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases}$$

$u \in (0, 2\pi),\ v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

falta una curva

esfera centro 0 radio $r$

# esfera




esfera centro 0 radio $r$

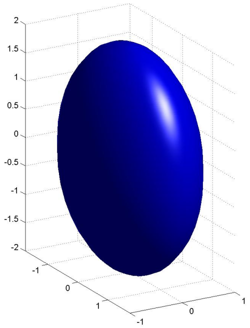
$$\begin{cases} x = r\cos u \cos v \\ y = r \sin u \cos v \\ z = r \sin v \end{cases}$$

$u \in (0, 2\pi),\ v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

falta una curva

parametrizar la curva que falta

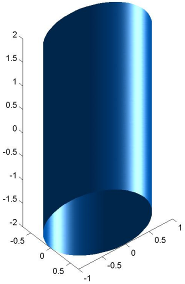
# ejercicio




parametrizar el elipsoide

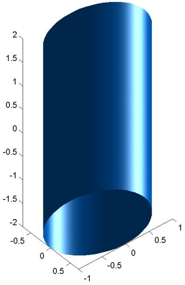
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

# cilindro




cilindro elíptico centro 0, radios $a$ y $b$

# cilindro

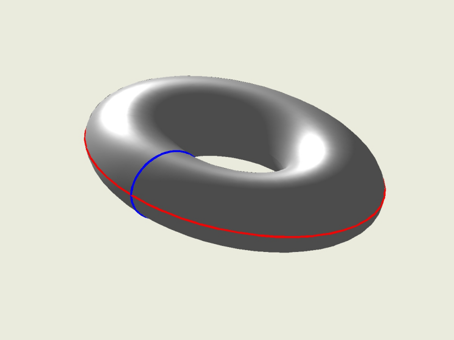



$$\begin{cases} x = a\cos u \\ y = b\sin u \\ z = v \end{cases}$$

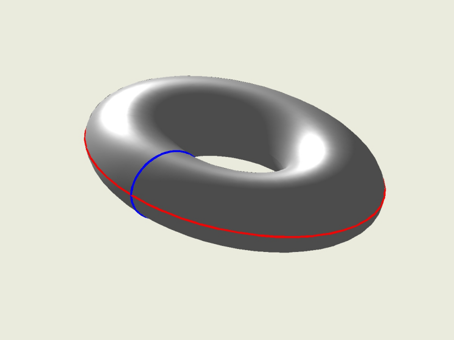
$$u \in (0, 2\pi),\ v \in (-1, 1)$$

cilindro elíptico centro 0, radios $a$ y $b$

# toro



# toro



$$\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$$

$$u \in (-\pi, \pi),\ v \in (0, 2\pi)$$

# observación

**observación**

hay infinitas formas de parametrizar una misma superficie

# vectores tangentes

## definición (vectores tangentes)

# vectores tangentes

## definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$

# vectores tangentes

## definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y

# vectores tangentes

## definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en $(u_0, v_0)$

# vectores tangentes

## definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en $(u_0, v_0)$
- llamamos vectores tangentes en las direcciones $u$ y $v$:

# vectores tangentes

## definición (vectores tangentes)

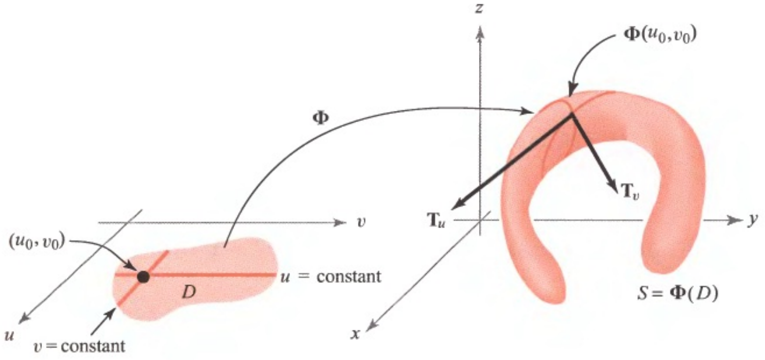
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en $(u_0, v_0)$
- llamamos vectores tangentes en las direcciones $u$ y $v$:
- $$\Phi_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$$

# vectores tangentes

## definición (vectores tangentes)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ y
- $v \mapsto \Phi(u_0, v)$ curvas diferenciables en $(u_0, v_0)$
- llamamos vectores tangentes en las direcciones $u$ y $v$:
- $$\Phi_u(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u)$$
- $$\Phi_v(u_0, v_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)$$

# vectores tangentes en las direcciones $u$ y $v$



# vector tangente a la superficie

## vector tangente a la superficie

# vector tangente a la superficie

## vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$

# vector tangente a la superficie

## vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $t \mapsto \Phi(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ curva en la superficie

# vector tangente a la superficie

## vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $t \mapsto \Phi(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ curva en la superficie
- vector tangente a $\alpha$

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_0} = \dot{\alpha}(t_0)$$

# vector tangente a la superficie

## vector tangente a la superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $t \mapsto \Phi(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ curva en la superficie
- vector tangente a $\alpha$

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_0} = \dot{\alpha}(t_0)$$

llamamos vector tangente a la superficie a todos los $\dot{\alpha}$

# proposición

**proposición**

todos los vectores tangentes a $\Phi(D)$ son combinación lineal de

$$\Phi_u(u_0, v_0) \qquad \text{y} \qquad \Phi_v(u_0, v_0)$$

# proposición

## proposición

todos los vectores tangentes a $\Phi(D)$ son combinación lineal de

$$\Phi_u(u_0, v_0) \qquad \text{y} \qquad \Phi_v(u_0, v_0)$$

concretamente,

# proposición

## proposición

# proposición

## proposición

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$

# proposición

## proposición

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $\dot{\alpha}(t_0)$ vector tangente a $t \mapsto \Phi(u(t), v(t))$

# proposición

## proposición

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $\dot{\alpha}(t_0)$ vector tangente a $t \mapsto \Phi(u(t), v(t))$
- $\Rightarrow$
$$\dot{\alpha}(t_0) = \dot{u}(t_0)\Phi_u(u_0, v_0) + \dot{v}(t_0)\Phi_v(u_0, v_0)$$

# puntos regulares

## definición (punto regular)

# puntos regulares

## definición (punto regular)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$

# puntos regulares

## definición (punto regular)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $\Phi(u_0, v_0)$ punto regular de la superficie $\Phi(D)$

# puntos regulares

## definición (punto regular)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable en $(u_0, v_0)$
- $\Phi(u_0, v_0)$ punto regular de la superficie $\Phi(D)$
- si

$$\Phi_u \wedge \Phi_v \neq \vec{0} \qquad \text{en} \quad (u_0, v_0)$$

# ejemplo

## ejemplo

# ejemplo

## ejemplo

- considerar

$$(\Phi)\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases}$$

# ejemplo

## ejemplo

- considerar

$$(\Phi)\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases}$$

- qué superficie representa?

# ejemplo

## ejemplo

- considerar

$$(\Phi)\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases}$$

- qué superficie representa?
- es diferenciable?

# ejemplo

## ejemplo

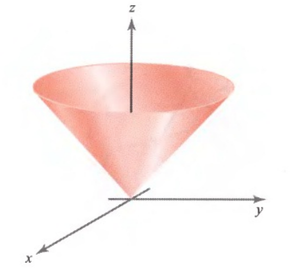
- considerar

$$(\Phi)\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = u \end{cases}$$

- qué superficie representa?
- es diferenciable?
- es regular?

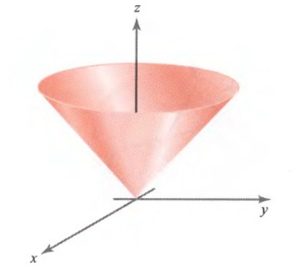
# ejemplo

## cono



# ejemplo

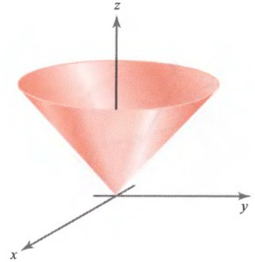
## cono




- 
- diferenciable

# ejemplo

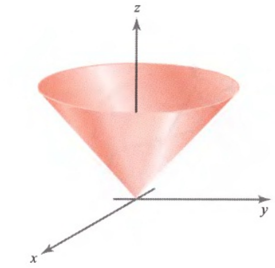
## cono




- 
- diferenciable $\surd$

# ejemplo

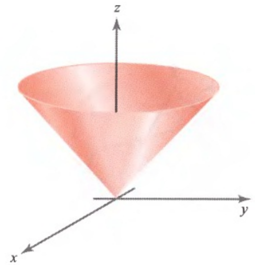
## cono

- 

- diferenciable $\surd$
- regular

# ejemplo

## cono




- 
- diferenciable $\surd$
- regular fuera de $(0,0,0)$

# versores normales

## definición (versor normal)

# versores normales

## definición (versor normal)

- $\Phi$ superficie paramétrica

# versores normales

## definición (versor normal)

- $\Phi$ superficie paramétrica
- regular en $(u_0, v_0)$

# versores normales

## definición (versor normal)

- $\Phi$ superficie paramétrica
- regular en $(u_0, v_0)$
- llamamos versores normales a los vectores $\vec{n}$ y $-\vec{n}$

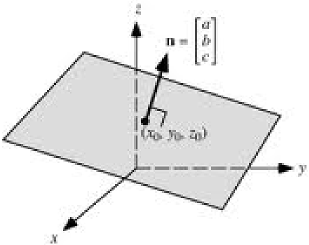
# versores normales

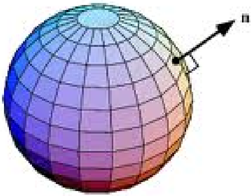
## definición (versor normal)

- $\Phi$ superficie paramétrica
- regular en $(u_0, v_0)$
- llamamos versores normales a los vectores $\vec{n}$ y $-\vec{n}$
- donde

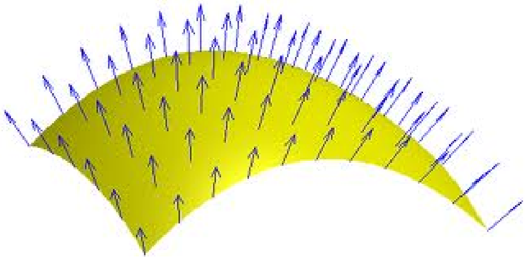
$$\vec{n} = \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}$$

# vector normal



# vector normal



# ejemplo

## ejemplo

# ejemplo

## ejemplo

- $S$ superficie dada por el gráfico de una función diferenciable

# ejemplo

## ejemplo

- $S$ superficie dada por el gráfico de una función diferenciable
- $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

# ejemplo

## ejemplo

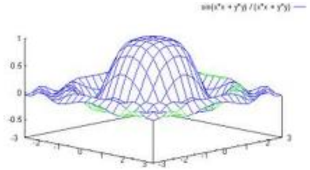
- $S$ superficie dada por el gráfico de una función diferenciable
- $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
-
$$(S) \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

# ejemplo

## ejemplo

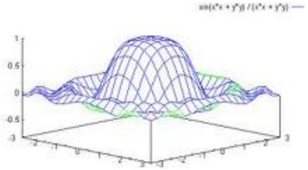
# ejemplo

## ejemplo

- 

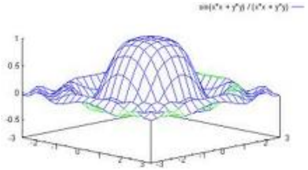
# ejemplo

## ejemplo

- 
- $S$ es regular

# ejemplo

## ejemplo

- 
- $S$ es regular
- $$\vec{n} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\|(-f_u, -f_v, 1)\|}$$

# orientación

## definición (orientación)

# orientación

## definición (orientación)

- $\Phi$ diferenciable y regular en $D$

# orientación

## definición (orientación)

- $\Phi$ diferenciable y regular en $D$
- orientación de $\Phi$

# orientación

## definición (orientación)

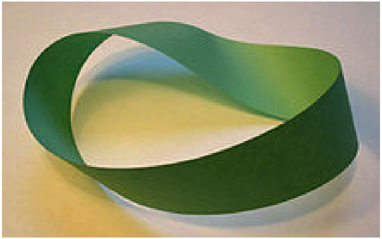
- $\Phi$ diferenciable y regular en $D$
- orientación de $\Phi$
- elección continua de $\vec{n}$ o $-\vec{n}$

# observación

- la banda de Moebius

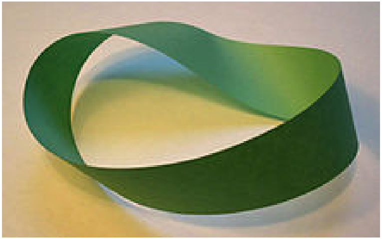
# observación

- la banda de Moebius

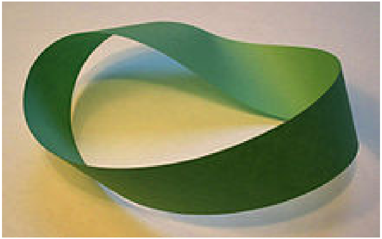


- 

# observación

- la banda de Moebius
- 
- es una superficie no paramétrica

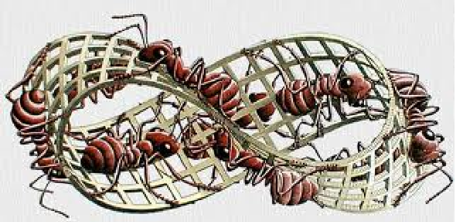
# observación

- la banda de Moebius
- 
- es una superficie no paramétrica
- (se puede armar con 2 superficies paramétricas)

# observación

- la banda de Moebius no es orientable

# observación

- la banda de Moebius no es orientable
- 

# plano tangente

## definición (plano tangente)

# plano tangente

## definición (plano tangente)

- $\Phi$ regular en $(u_0, v_0)$

# plano tangente

## definición (plano tangente)

- $\Phi$ regular en $(u_0, v_0)$
- plano tangente a $\Phi(D)$ en $(u_0, v_0)$

# plano tangente

## definición (plano tangente)

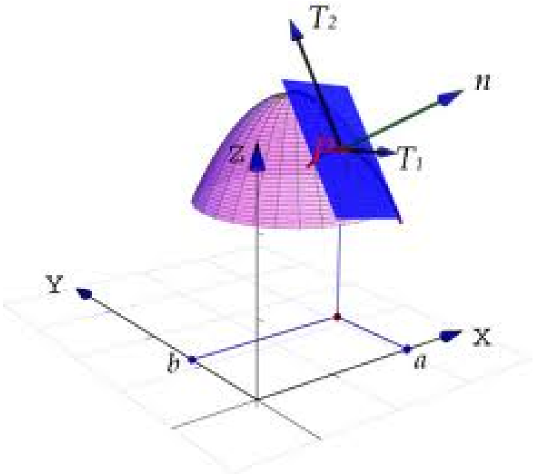
- $\Phi$ regular en $(u_0, v_0)$
- plano tangente a $\Phi(D)$ en $(u_0, v_0)$
- $$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\vec{n} = 0$$

# plano tangente

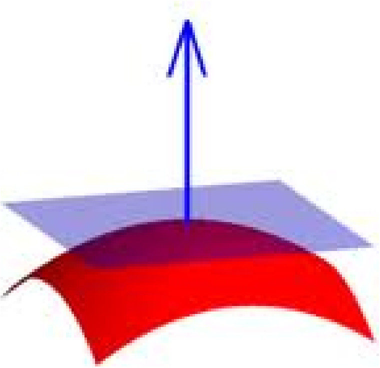
## definición (plano tangente)

- $\Phi$ regular en $(u_0, v_0)$
- plano tangente a $\Phi(D)$ en $(u_0, v_0)$
- $$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\vec{n} = 0$$
- donde $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$

# plano tangente



# plano tangente



# ejemplo

## ejemplo

# ejemplo

## ejemplo

- en el ejemplo de hoy

$$(S)\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

# ejemplo

## ejemplo

- en el ejemplo de hoy

$$(S)\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

- la ecuación del plano tangente en el punto $(u_0, v_0)$

# ejemplo

## ejemplo

- en el ejemplo de hoy

$$(S)\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}$$

- la ecuación del plano tangente en el punto $(u_0, v_0)$
- es

$$(x - u_0, y - v_0, z - f(u_0, v_0))(-f_u, -f_v, 1) = 0$$

# proposición

## proposición

# proposición

## proposición

- el plano tangente es el plano que pasa por $\Phi(u_0, v_0)$ generado por los vectores

$$\Phi_u \qquad \text{y} \qquad \Phi_v$$

# proposición

## proposición

- el plano tangente es el plano que pasa por $\Phi(u_0, v_0)$ generado por los vectores

$$\Phi_u \qquad y \qquad \Phi_v$$

- evaluados en $(u_0, v_0)$