Área de superficies paramétricas

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

19 de marzo de 2012

área de superficie paramétrica

definición (área)

área de superficie paramétrica

definición (área)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular

área de superficie paramétrica

definición (área)

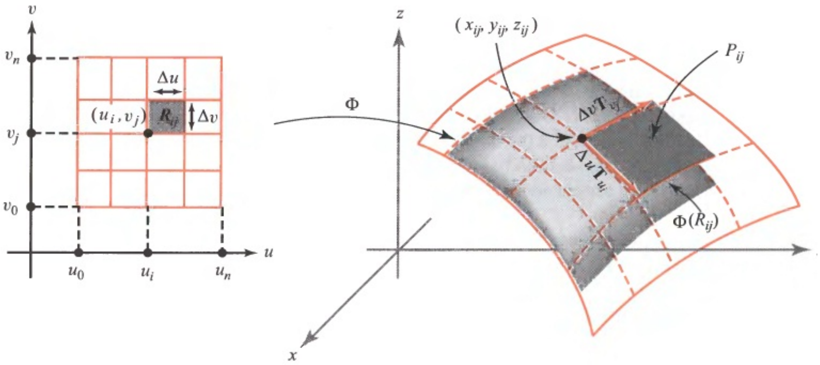
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- área de la superficie $\Phi(D)$:

área de superficie paramétrica

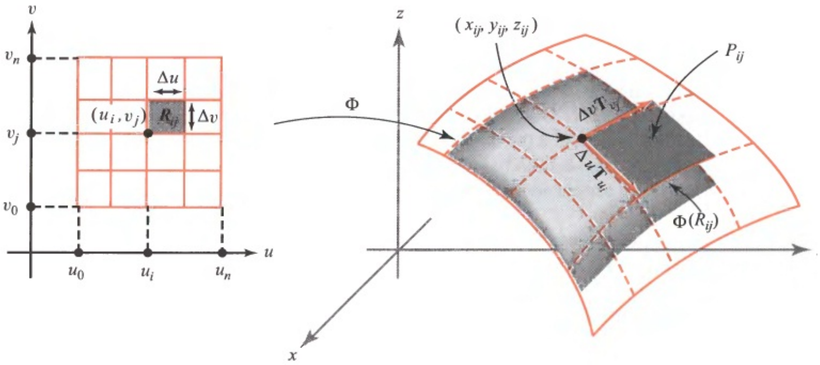
definición (área)

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular
- área de la superficie $\Phi(D)$:
- $$A(\Phi(D)) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$$

justificación

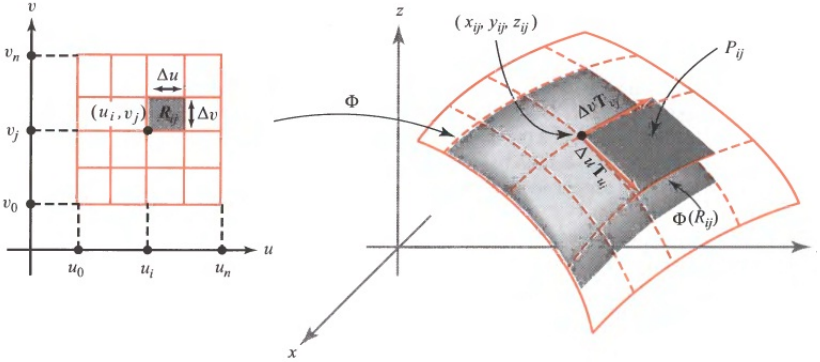


justificación



$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\triangle u \Phi_u \wedge \triangle v \Phi_v(u_i, v_j)\|$$

justificación



$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\triangle u \Phi_u \wedge \triangle v \Phi_v(u_i, v_j)\| = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

justificación

$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

justificación

$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

$$A(\Phi(D)) = \lim_{R_{ij} \to 0} \sum_{i,j} \Phi(R_{ij})$$

justificación

$$\Phi(R_{ij}) \approx \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i, v_j)\| \triangle u \triangle v$$

$$A(\Phi(D)) = \lim_{R_{ij}\to 0} \sum_{i,j} \Phi(R_{ij}) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$$

la esfera

la esfera

la esfera

la esfera

- $$\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi),\ v \in (0, \pi)$$

la esfera

la esfera

- $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos v \end{cases}$ con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, \pi)$
- $A(S^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$

la esfera

la esfera

- $\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases}$ con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (0, \pi)$
- $A(S^2) = \int\int_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u \sin v, r\cos u \sin v, 0)$

la esfera

la esfera

- $$\begin{cases} x = r\cos u \sin v \\ y = r\sin u \sin v \\ z = r\cos v \end{cases} \quad \text{con } u \in (0, 2\pi),\ v \in (0, \pi)$$
- $A(S^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u \sin v, r\cos u \sin v, 0)$
- $\Phi_v = (r\cos u \cos v, r\sin u \cos v, -r\sin v)$

la esfera

la esfera

la esfera

la esfera

- $$\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \sin v & r\cos u \sin v & 0 \\ r\cos u \cos v & r\sin u \cos v & -r\sin v \end{vmatrix} =$$

la esfera

la esfera

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \sin v & r\cos u \sin v & 0 \\ r\cos u \cos v & r\sin u \cos v & -r\sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$

la esfera

la esfera

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \sin v & r\cos u \sin v & 0 \\ r\cos u \cos v & r\sin u \cos v & -r\sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|^2 = r^4(\sin^4 v + \sin^2 v \cos^2 v) = r^4 \sin^2 v$

la esfera

la esfera

- $\Phi_u \wedge \Phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \sin v & r\cos u \sin v & 0 \\ r\cos u \cos v & r\sin u \cos v & -r\sin v \end{vmatrix} =$
- $= (-r^2 \cos u \sin^2 v, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|^2 = r^4(\sin^4 v + \sin^2 v \cos^2 v) = r^4 \sin^2 v$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = r^2 \sin v$

la esfera

la esfera

la esfera

la esfera

- $A(S^2) = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v dv$

la esfera

la esfera

- $A(S^2) = r^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v dv$
- $$A(S^2) = 4\pi r^2$$

el toro

el toro

el toro

el toro

- $$\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \quad \text{con } u, v \in (0, 2\pi) \\ z = r\sin u \end{cases}$$

el toro

el toro

- $\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ con $u, v \in (0, 2\pi)$
- $A(T^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$

el toro

el toro

- $\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ con $u, v \in (0, 2\pi)$
- $A(T^2) = \iint_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$

el toro

el toro

- $\begin{cases} x = (a + r\cos u)\cos v \\ y = (a + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ con $u, v \in (0, 2\pi)$
- $A(T^2) = \int\int_D \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du\, dv$
- $\Phi_u = (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u)$
- $\Phi_v = (-(a + r\cos u)\sin v, (a + r\cos u)\cos v, 0)$

el toro

el toro

el toro

el toro

- $\Phi_u \wedge \Phi_v =$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r \sin u \cos v & -r \sin u \sin v & r \cos u \\ -(a + r \cos u) \sin v & (a + r \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

el toro

el toro

- $\Phi_u \wedge \Phi_v =$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u \cos v & -r \sin u \sin v & r\cos u \\ -(a+r\cos u)\sin v & (a+r\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$
- $= r(a+r\cos u)(\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$

el toro

el toro

- $\Phi_u \wedge \Phi_v =$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -r\sin u\cos v & -r\sin u\sin v & r\cos u \\ -(a+r\cos u)\sin v & (a+r\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$
- $= r(a+r\cos u)(\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$
- $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = r(a+r\cos u)$

el toro

el toro

el toro

el toro

- $A(T^2) = r \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (a + r\cos u) du$

el toro

el toro

- $A(T^2) = r \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} (a + r\cos u) du$
-
$$A(T^2) = (2\pi r)(2\pi a)$$

otra forma de verlo

notación

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2}$$

otra forma de verlo

notación

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2}$$

donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

otra forma de verlo

notación

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2}$$

donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$$

otra forma de verlo

notación

$$\|\Phi_u \wedge \Phi_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2}$$

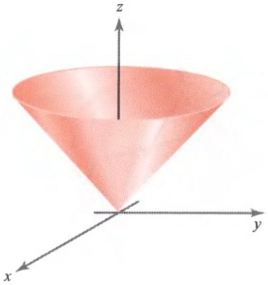
donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$$

el cono

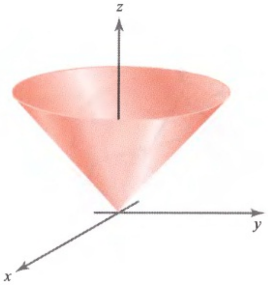
el cono



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

el cono

el cono

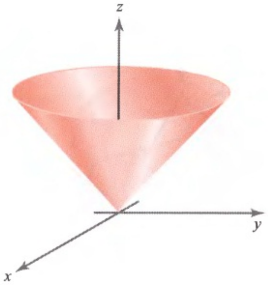


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

el cono

el cono

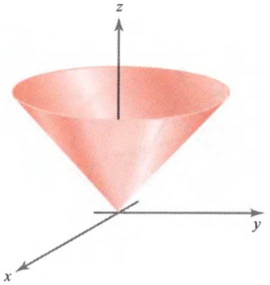


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

el cono

el cono

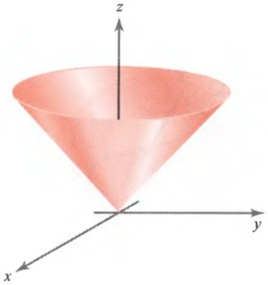


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

el cono

el cono

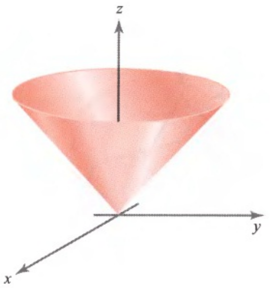


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\theta$$

el cono

el cono

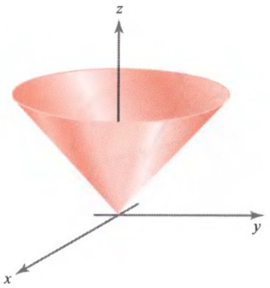


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{array}$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix}$$

el cono

el cono

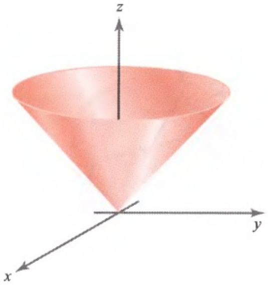


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r\sin\theta$$

el cono

el cono

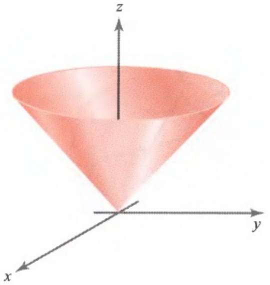


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{array}$$

$$\Rightarrow \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| = \sqrt{2r^2}$$

el cono

el cono

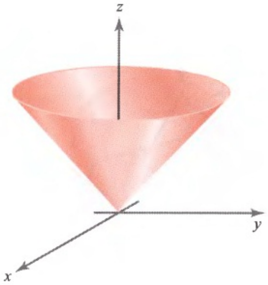


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = r \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{array}$$

$$\Rightarrow \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

el cono

el cono

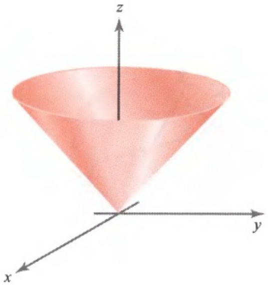


$$\Rightarrow \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

$$\text{área}(S) = \iint \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr d\theta$$

el cono

el cono



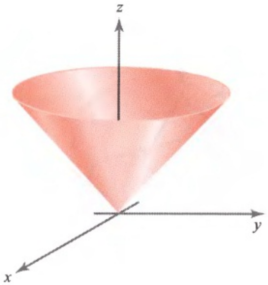
$$\Rightarrow \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

$$\text{área}(S) = \iint \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr d\theta$$

$$\text{área}(S) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{2} d\theta dr$$

el cono

el cono



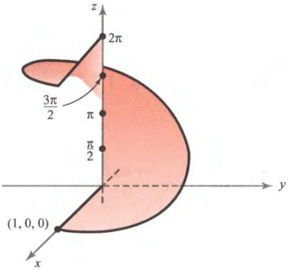
$$\Rightarrow \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

$$\text{área}(S) = \iint \|\Phi_r \wedge \Phi_\theta\| dr d\theta$$

$$\text{área}(S) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{2} d\theta dr = \sqrt{2}\pi$$

helicoide

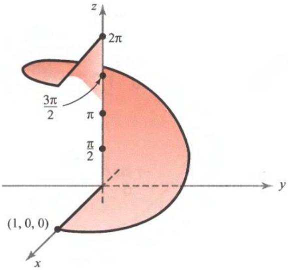
helicoide



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{array}$$

helicoide

helicoide



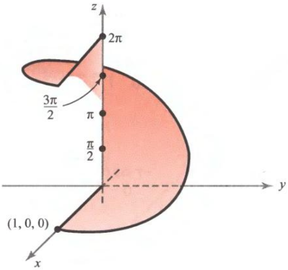
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0, 2\pi) \end{array}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

como en el cono

helicoide

helicoide

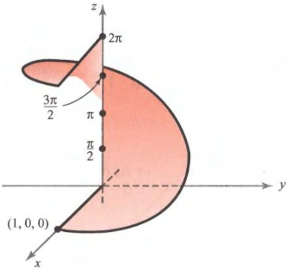


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{array}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

helicoide

helicoide

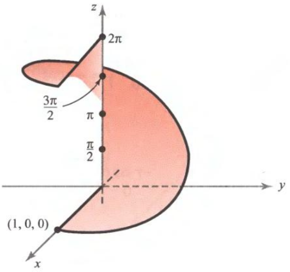


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta$$

helicoide

helicoide

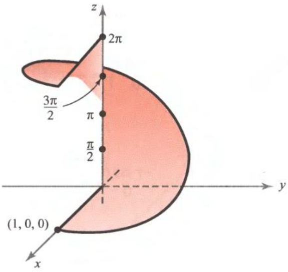


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0,2\pi) \end{array}$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix}$$

helicoide

helicoide

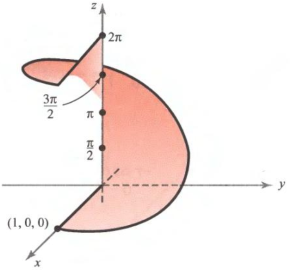


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} r \in (0,1) \\ \theta \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -\cos\theta$$

helicoide

helicoide

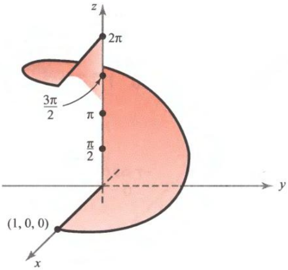


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{c} r \in (0,1) \\ \theta \in (0, 2\pi) \end{array}$$

$$\text{área}(S) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, dr$$

helicoide

helicoide



$$\text{área}(S) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2+1}\,dr$$

$$\text{área}(S) = \pi\left(r\sqrt{1+r^2} + \sinh^{-1}(r)\right)_0^{2\pi}$$

$$\text{área}(S) = \pi(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}))$$

área de una gráfica

área de una gráfica

- S superficie dada por $z = g(x, y)$, entonces:

área de una gráfica

área de una gráfica

- S superficie dada por $z = g(x, y)$, entonces:
- $$\text{área}(S) = \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v) \end{cases}$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} =$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} =$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = -g_u$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = -g_u$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} =$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = -g_u$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = -g_v$$

área de una gráfica

demostración

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u,v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = -g_u$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = -g_v$$

$$\text{área}(S) = \iint_D \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dxdy$$

ejemplo

ejemplo

- S superficie dada por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 < 1$

ejemplo

ejemplo

- S superficie dada por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 < 1$
- $$\text{área}(S) = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

superficies de revolución

superficies de revolución

S se obtiene de girar la gráfica de $y = f(x)$

superficies de revolución

superficies de revolución

S se obtiene de girar la gráfica de $y = f(x)$

- alrededor del eje x

superficies de revolución

superficies de revolución

S se obtiene de girar la gráfica de $y = f(x)$

- alrededor del eje x
- $$\text{área}(S) = 2\pi \iint_a^b |f'(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

superficies de revolución

superficies de revolución

S se obtiene de girar la gráfica de $y = f(x)$

- alrededor del eje x
- alrededor del eje y
- $$\text{área}(S) = 2\pi \iint_a^b |f'(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

superficies de revolución

superficies de revolución

S se obtiene de girar la gráfica de $y = f(x)$

- alrededor del eje x
- $$\text{área}(S) = 2\pi \iint_a^b |f'(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

- alrededor del eje y
- $$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x

superficies de revolución

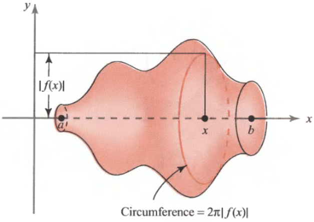
demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\left\{\begin{array}{l} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{array}$$

superficies de revolución

demostración

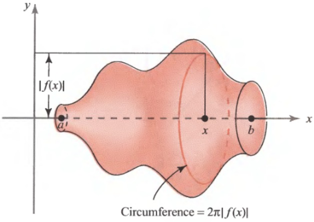
- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{array}$$



superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} u \in [a,b] \\ v \in [0,2\pi] \end{array}$$

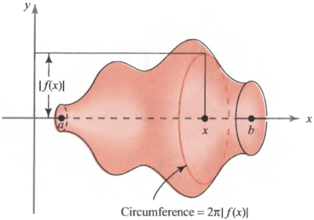


- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} =$

superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{array}$$

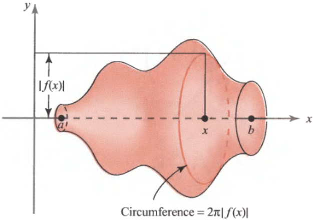


- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(u)\sin v$

superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{array}$$

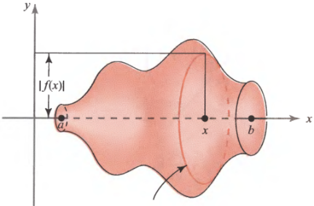


- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(u)\sin v$
- $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} =$

superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{array}$$

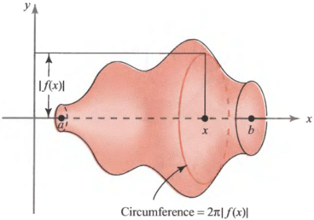


- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(u)\sin v$
- $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = f(u)f'(u)$

superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{l} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{array}$$

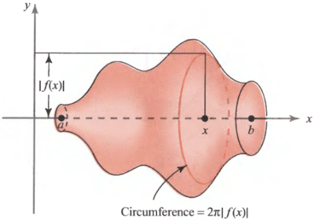


- $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(u)\sin v$
- $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = f(u)f'(u)$
- $\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} =$

superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{matrix} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

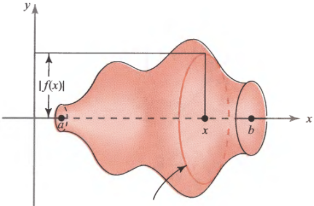


- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -f(u)\sin v$
- $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = f(u)f'(u)$
- $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = f(u)f\cos v$

superficies de revolución

demostración

- $y = f(x)$ gira alrededor del eje x
- $$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} u \in [a, b] \\ v \in [0, 2\pi] \end{array}$$



- $$\text{área}(S) = 2\pi \int_a^b |f(u)|\sqrt{1 + f'(u)^2}du$$