Integral de funciones escalares sobre superficies

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

21 de marzo de 2012

integral de función escalar sobre S

integral de función escalar sobre S

integral de función escalar sobre S

integral de función escalar sobre S

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular $\Phi(D) = S$

integral de función escalar sobre S

integral de función escalar sobre S

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular $\Phi(D) = S$
- $f : S \to \mathbb{R}$ continua

integral de función escalar sobre S

integral de función escalar sobre S

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular $\Phi(D) = S$
- $f : S \to \mathbb{R}$ continua
- integral de f sobre S

$$\iint_S f dS$$

integral de función escalar sobre S

integral de función escalar sobre S

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ superficie regular $\Phi(D) = S$
- $f : S \to \mathbb{R}$ continua
- integral de f sobre S

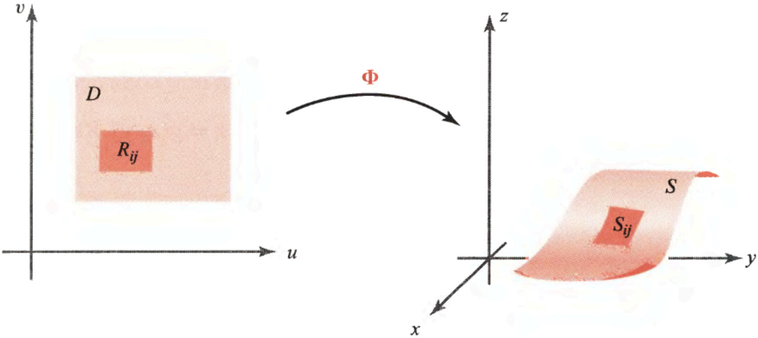
$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

observación

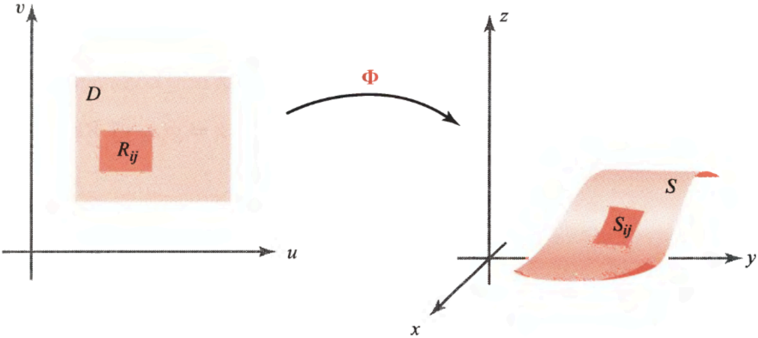
observación

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\phi(u,v))\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv$$

justificación



justificación



$$\Phi(R_{ij}) = S_{ij}$$

justificación

justificación

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i,j} f(\Phi(u_i, v_j))\text{área}(S_{ij}) = (*)$$

justificación

justificación

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i,j} f(\Phi(u_i, v_j))\text{área}(S_{ij}) = (*)$$

$$\text{área}(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

justificación

justificación

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i,j} f(\Phi(u_i, v_j))\text{área}(S_{ij}) = (*)$$

$$\text{área}(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i^*, v_j^*)\| \Delta u \Delta v$$

justificación

justificación

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i,j} f(\Phi(u_i, v_j))\text{área}(S_{ij}) = (*)$$

$$\text{área}(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i^*, v_j^*)\| \Delta u \Delta v$$

cuando $\Delta u, \Delta v \to 0$

justificación

justificación

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i,j} f(\Phi(u_i, v_j))\text{área}(S_{ij}) = (*)$$

$$\text{área}(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i^*, v_j^*)\| \Delta u \Delta v$$

cuando $\Delta u, \Delta v \to 0$

$$(*) \to \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

justificación

justificación

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i,j} f(\Phi(u_i, v_j))\text{área}(S_{ij}) = (*)$$

$$\text{área}(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv = \|\Phi_u \wedge \Phi_v(u_i^*, v_j^*)\| \Delta u \Delta v$$

cuando $\Delta u, \Delta v \to 0$

$$(*) \to \iint_D f(\Phi(u, v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

$\square$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u, v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\pi)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u, v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\pi)$
- $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u, v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\pi)$
- $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
- calcular $\iint_S f dS$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u, v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\pi)$
- $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
- calcular $\iint_S f dS$
- $$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u, v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\pi)$
- $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
- calcular $\iint_S f dS$
- $$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \sin\theta$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u, v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\pi)$
- $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
- calcular $\iint_S f dS$
- $$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \sin\theta \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(r, \theta)} = -\cos\theta$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u,v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0,1)\times(0,2\pi)$
- $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2}$
- calcular $\iint_S f dS$
- $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \sin\theta \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = -\cos\theta$$
- $$\iint_S f dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\sqrt{1+r^2}\,dr d\theta$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- S helicoide $\Phi(u,v) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0,1)\times(0,2\pi)$
- $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2}$
- calcular $\iint_S f dS$
- $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(r,\theta)} = \sin\theta \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)} = -\cos\theta$$
- $$\iint_S f dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\sqrt{1+r^2}\, dr d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$

ejemplo 2

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$

ejemplo 2

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\int\int_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
-

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} =$$

eje

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
-

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} = -\sin\phi\cos\phi$$

eje

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
-

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\phi\cos\phi \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} =$$

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\int\int_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
-

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\phi\cos\phi \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = -\cos\theta\sin^2\phi$$

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\int\int_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
-

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\phi\cos\phi \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = -\cos\theta\sin^2\phi \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} =$$

ej

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2+y^2+z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta,\phi)=(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)$ en $(0,2\pi)\times(0,\pi)$
-

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}=-\sin\phi\cos\phi \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)}=-\cos\theta\sin^2\phi \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)}=-\sin\theta\sin^2\phi$$

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
- $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\phi\cos\phi \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = -\cos\theta\sin^2\phi \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\theta\sin^2\phi$$
- $$dS = \sqrt{\sin^2\phi\cos\phi + \cos^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\theta\sin^4\phi d\theta d\phi}$$

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
-

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\phi\cos\phi \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = -\cos\theta\sin^2\phi \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} = -\sin\theta\sin^2\phi$$

-

$$dS = \sqrt{\sin^2\phi\cos\phi + \cos^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\theta\sin^4\phi} d\theta d\phi$$

-

$$dS = \sin\phi d\theta d\phi$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
- $$dS = \sin\phi d\theta d\phi$$
- $$\iint_S z^2 dS = \iint_D \cos^2\phi \sin\phi d\theta d\phi$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
- $$dS = \sin\phi d\theta d\phi$$
- $$\iint_S z^2 dS = \iint_D \cos^2\phi \sin\phi d\theta d\phi = 2\pi \left[-\frac{\cos^3}{3}\phi \right]_0^\pi$$

ejemplo 2

ejemplo 2

- S esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2$
- evaluar $\iint_S z^2 dS$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ en $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$
- $$dS = \sin\phi \, d\theta d\phi$$
- $$\iint_S z^2 dS = \iint_D \cos^2\phi \sin\phi \, d\theta d\phi = 2\pi \left[-\frac{\cos^3}{3}\phi \right]_0^\pi = \frac{4\pi}{3}$$

elemento de área

elemento de área

- elemento de área de S

elemento de área

elemento de área

- elemento de área de S
- $$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv$$

integrales de superficie sobre gráficas

integrales de superficie sobre gráficas

- S superficie dada por la gráfica de $z = g(x, y)$

integrales de superficie sobre gráficas

integrales de superficie sobre gráficas

- S superficie dada por la gráfica de $z = g(x, y)$
- f función continua sobre S

integrales de superficie sobre gráficas

integrales de superficie sobre gráficas

- S superficie dada por la gráfica de $z = g(x, y)$
- f función continua sobre S
- entonces:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dxdy$$

ejemplo 3

ejemplo 3

- S superficie dada por $z = x^2 + y$ en $[0, 1] \times [-1, 1]$

ejemplo 3

ejemplo 3

- S superficie dada por $z = x^2 + y$ en $[0, 1] \times [-1, 1]$
- encontrar $\iint_S x dS$

ejemplo 3

ejemplo 3(cont)

$$\iint_S x dS = \iint_D x\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}$$

ejemplo 3

ejemplo 3(cont)

$$\begin{aligned}\iint_S x\,dS &= \iint_D x\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\\ &= \int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2+1}\,dxdy\end{aligned}$$

ejemplo 3

ejemplo 3(cont)

$$\begin{aligned}\iint_S x dS &= \iint_D x\sqrt{1+g_x^2+g_y^2} \\ &= \int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2+1}dxdy \\ &= \frac{2}{8}\int_2^6 \sqrt{u}du\end{aligned}$$

ejemplo 3

ejemplo 3(cont)

$$\begin{aligned}\iint_S x dS &= \iint_D x\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\\ &= \int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2+1}dxdy\\ &= \frac{2}{8}\int_2^6 \sqrt{u}du = \frac{1}{6}\; u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6\end{aligned}$$

ejemplo 3

ejemplo 3(cont)

$$
\begin{aligned}
\iint_S x\,dS &= \iint_D x\sqrt{1+g_x^2+g_y^2} \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2+1}\,dx\,dy \\
&= \frac{2}{8}\int_2^6 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{6}\,u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^6 = 6-\frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

integrales sobre gráficas

integrales sobre gráficas

- S gráfica de $z = g(x, y)$

integrales sobre gráficas

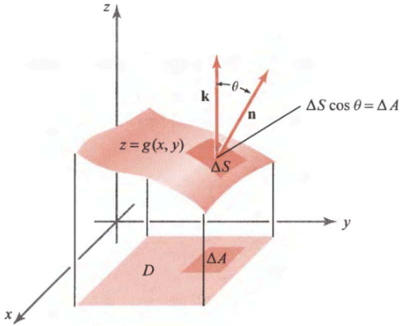
integrales sobre gráficas

- S gráfica de $z = g(x, y)$
- $$\int_S f dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta} dx dy$$

integrales sobre gráficas

integrales sobre gráficas

- S gráfica de $z = g(x, y)$
- $$\int_S f dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta} dxdy$$



integrales sobre gráficas

justificación

- S superficie de nivel de $\Psi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$

integrales sobre gráficas

justificación

- S superficie de nivel de $\Psi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$
- vector normal: $N = \nabla\Psi = (-g_x, -g_y, 1)$

integrales sobre gráficas

justificación

- S superficie de nivel de $\Psi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$
- vector normal: $N = \nabla\Psi = (-g_x, -g_y, 1)$
- $$\cos\theta = \frac{N.k}{\|N\|}$$

integrales sobre gráficas

justificación

- S superficie de nivel de $\Psi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$
- vector normal: $N = \nabla\Psi = (-g_x, -g_y, 1)$
- $$\cos\theta = \frac{N.k}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$

integrales sobre gráficas

justificación

- S superficie de nivel de $\Psi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$
- vector normal: $N = \nabla\Psi = (-g_x, -g_y, 1)$
- $$\cos\theta = \frac{N.k}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$
- $$\iint_S f dS = \iint_D f\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dxdy$$

integrales sobre gráficas

justificación

- S superficie de nivel de $\Psi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$
- vector normal: $N = \nabla\Psi = (-g_x, -g_y, 1)$
- $$\cos\theta = \frac{N.k}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$
- $$\iint_S f dS = \iint_D f\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}dxdy = \iint_D f\frac{dxdy}{\cos\theta}$$

integrales sobre gráficas

justificación

- S superficie de nivel de $\Psi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$
- vector normal: $N = \nabla\Psi = (-g_x, -g_y, 1)$
- $$\cos\theta = \frac{N.k}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$
- $$\iint_S f dS = \iint_D f\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dxdy = \iint_D f \frac{dxdy}{\cos\theta}$$

$\square$

integrales sobre gráficas

notación

- $\mathbf{n} = \frac{N}{\|N\|}$

integrales sobre gráficas

notación

- $\mathbf{n} = \frac{N}{\|N\|}$
- $\Rightarrow \cos\theta = \mathbf{n}.k$

integrales sobre gráficas

notación

- $\mathbf{n} = \frac{N}{\|N\|}$
- $\Rightarrow \cos\theta = \mathbf{n}.k$
- $$dS = \frac{dxdy}{\mathbf{n}k}$$

ejemplo 4

ejemplo 4

- calcular $\iint_S x dS$

ejemplo 4

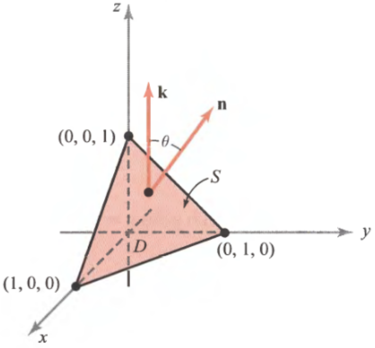
ejemplo 4

- calcular $\iint_S x dS$
- donde S es el Δ de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$

ejemplo 4

ejemplo 4

- calcular $\iint_S x dS$
- donde S es el Δ de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$



-

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

- S está contenida en un plano

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

- S está contenida en un plano
- normal unitaria al plano:

$$\mathbf{n} = \frac{(1,-1,0) \wedge (0,1,-1)}{\|(1,-1,0) \wedge (0,1,-1)\|}$$

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

- S está contenida en un plano
- normal unitaria al plano:

$$\mathbf{n} = \frac{(1,-1,0)\wedge(0,1,-1)}{\|(1,-1,0)\wedge(0,1,-1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

- S está contenida en un plano
- normal unitaria al plano:

$$\mathbf{n} = \frac{(1,-1,0) \wedge (0,1,-1)}{\|(1,-1,0) \wedge (0,1,-1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- $\cos\theta = \mathbf{n}.k$

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

- S está contenida en un plano
- normal unitaria al plano:

$$\mathbf{n} = \frac{(1,-1,0)\wedge(0,1,-1)}{\|(1,-1,0)\wedge(0,1,-1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- $\cos\theta = \mathbf{n}.k = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

$$\iint_S x dS = \sqrt{3} \iint_D x dx dy$$

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

$$\iint_S x\,dS = \sqrt{3}\iint_D x\,dx\,dy$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx$$

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

$$\begin{aligned}
\iint_S x dS &= \sqrt{3} \iint_D x dx dy \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx \\
&= \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x) dx
\end{aligned}$$

ejemplo 4

ejemplo 4 (cont)

$$\begin{aligned}
\iint_S x\,dS &= \sqrt{3}\iint_D x\,dx\,dy \\
&= \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}$$

masa total de una superficie

masa total de una superficie

masa total de una superficie

masa total de una superficie

- $m(x, y, z)$ densidad de masa en (x, y, z)

masa total de una superficie

masa total de una superficie

- $m(x, y, z)$ densidad de masa en (x, y, z)
- masa total de la superficie S

masa total de una superficie

masa total de una superficie

- $m(x, y, z)$ densidad de masa en (x, y, z)
- masa total de la superficie S
- $$M(S) = \iint_S m(x, y, z)dS$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- S helicoide

ejemplo 5

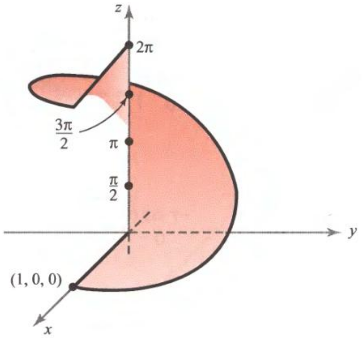
ejemplo 5

- S helicoide
- $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0,1)\times(0,2\phi)$

ejemplo 5

ejemplo 5

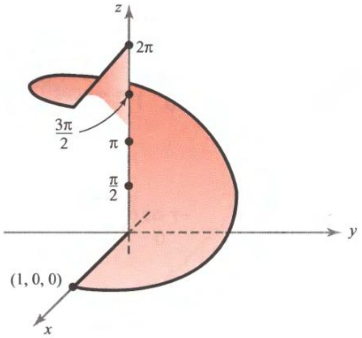
- S helicoide
- $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\phi)$



ejemplo 5

ejemplo 5

- S helicoide
- $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0,1) \times (0, 2\phi)$

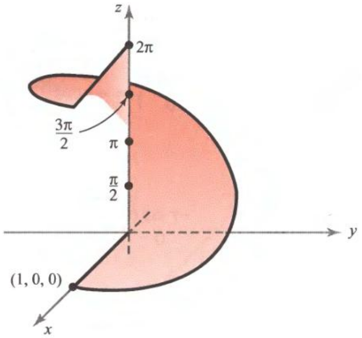


- densidad de masa en (x, y, z)

ejemplo 5

ejemplo 5

- S helicoide
- $\Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta, \theta)$ en $(0, 1) \times (0, 2\phi)$

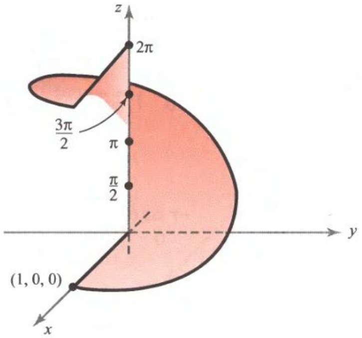


- densidad de masa en (x, y, z)
- = doble de la distancia al eje central

ejemplo 5

ejemplo 5

- S helicoide
- $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0,1)\times(0,2\phi)$



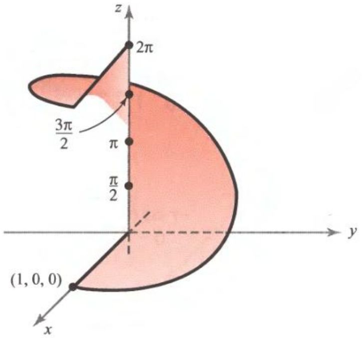
- densidad de masa en (x,y,z)
- = doble de la distancia al eje central
- $\Rightarrow$

$$m(x,y,z) = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- S helicoide
- $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0,1) \times (0, 2\phi)$



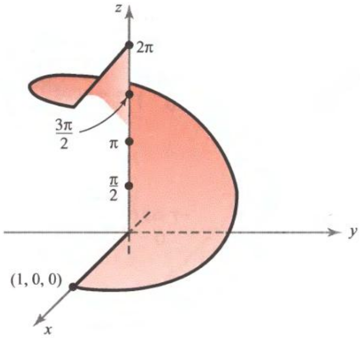
- densidad de masa en (x, y, z)
- = doble de la distancia al eje central
- $\Rightarrow$

$$m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$$

ejemplo 5

ejemplo 5

- S helicoide
- $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ en $(0,1) \times (0, 2\phi)$



- densidad de masa en (x, y, z)
- = doble de la distancia al eje central
- $\Rightarrow$

$$m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$$

- calcular la masa total

ejemplo 5

ejemplo 5(cont)

$$M(S) = 2\iint_S r\,dS$$

ejemplo 5

ejemplo 5(cont)

$$
\begin{aligned}
M(S) &= 2\iint_S r\,dS \\
dS &= \sqrt{1+r^2}
\end{aligned}
$$

ejemplo 5

ejemplo 5(cont)

$$\begin{aligned} M(S) &= 2\iint_S r\,dS \\ dS &= \sqrt{1+r^2} \\ M(S) &= 2\iint_D r\sqrt{1+r^2}\,dr \end{aligned}$$

ejemplo 5

ejemplo 5(cont)

$$
\begin{aligned}
M(S) &= 2\iint_S r\,dS \\
dS &= \sqrt{1+r^2} \\
M(S) &= 2\iint_D r\sqrt{1+r^2}\,dr = 4\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr
\end{aligned}
$$

ejemplo 5

ejemplo 5(cont)

$$
\begin{aligned}
M(S) &= 2\iint_S r\,dS \\
dS &= \sqrt{1+r^2} \\
M(S) &= 2\iint_D r\sqrt{1+r^2}\,dr = 4\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr \\
M(S) &= 2\pi\int_1^2 \sqrt{u}\,du
\end{aligned}
$$

ejemplo 5

ejemplo 5(cont)

$$
\begin{aligned}
M(S) &= 2\iint_S r dS \\
dS &= \sqrt{1+r^2} \\
M(S) &= 2\iint_D r\sqrt{1+r^2} dr = 4\pi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2} dr \\
M(S) &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{4\pi}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2
\end{aligned}
$$

ejemplo 5

ejemplo 5(cont)

$$
\begin{aligned}
M(S) &= 2\iint_S r\,dS \\
dS &= \sqrt{1+r^2} \\
M(S) &= 2\iint_D r\sqrt{1+r^2}\,dr = 4\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr \\
M(S) &= 2\pi\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{4\pi}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)
\end{aligned}
$$

valor promedio

valor promedio

valor promedio

valor promedio

- valor promedio de f sobre S

valor promedio

valor promedio

- valor promedio de f sobre S
- $$\text{promedio}(f) = \frac{1}{\text{área}(S)} \iint_S f dS$$

ejemplo 6

ejemplo 6

- ¿cuál es el valor promedio de z^2 sobre la esfera unitaria?

ejemplo 6

ejemplo 6

- ¿cuál es el valor promedio de z^2 sobre la esfera unitaria?
- $\iint_S z^2 dS = \frac{4\pi}{3}$ (x ejemplo 2)

ejemplo 6

ejemplo 6

- ¿cuál es el valor promedio de z^2 sobre la esfera unitaria?
- $\iint_S z^2 dS = \frac{4\pi}{3}$ (x ejemplo 2)
- área$(S) = 4\pi$ (x clase pasada)

ejemplo 6

ejemplo 6

- ¿cuál es el valor promedio de z^2 sobre la esfera unitaria?
- $\iint_S z^2 dS = \frac{4\pi}{3}$ (x ejemplo 2)
- área$(S) = 4\pi$ (x clase pasada)
- $\Rightarrow$

$$\text{promedio}(f) = \frac{1}{3}$$

centro de gravedad

centro de gravedad

- el centro de gravedad de S

centro de gravedad

centro de gravedad

- el centro de gravedad de S
- es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\text{área}(S)} \left(\iint_S x\,dS, \iint_S y\,dS, \iint_S z\,dS \right)$$

ejemplo 7

ejemplo 7

- calcular el centro de gravedad del Δ de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

ejemplo 7

ejemplo 7

- calcular el centro de gravedad del Δ de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$
- $$\text{área}(S) = \iint_S dS$$

ejemplo 7

ejemplo 7

- calcular el centro de gravedad del Δ de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$
- $$\text{área}(S) = \iint_S dS = \iint_D \frac{dxdy}{nk}$$

ejemplo 7

ejemplo 7

- calcular el centro de gravedad del Δ de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$
- $$\text{área}(S) = \iint_S dS = \iint_D \frac{dxdy}{nk} = \sqrt{3}\int_0^1 \int_0^{1-x} dydx$$

ejemplo 7

ejemplo 7

- calcular el centro de gravedad del Δ de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$
-

$$
\begin{aligned}
\text{área}(S) &= \iint_S dS = \iint_D \frac{dxdy}{nk} = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} dydx \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 (1-x)dx
\end{aligned}
$$

ejemplo 7

ejemplo 7

- calcular el centro de gravedad del Δ de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$
- $$\begin{aligned} \text{área}(S) &= \iint_S dS = \iint_D \frac{dxdy}{nk} = \sqrt{3}\int_0^1\int_0^{1-x} dydx \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 (1-x)dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ejemplo 7

ejemplo 7 (cont)

- en ejemplo 4 $\rightarrow \iint_S x dS = \frac{\sqrt{3}}{6}$

ejemplo 7

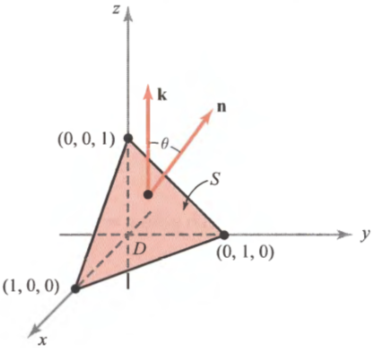
ejemplo 7 (cont)

- en ejemplo 4 $\to \iint_S xdS = \frac{\sqrt{3}}{6}$
- x simetría $\iint_S ydS = \iint_S zdS = \frac{\sqrt{3}}{6}$

ejemplo 7

ejemplo 7 (cont)

- en ejemplo 4 $\rightarrow \iint_S x dS = \frac{\sqrt{3}}{6}$
- x simetría $\iint_S y dS = \iint_S z dS = \frac{\sqrt{3}}{6}$



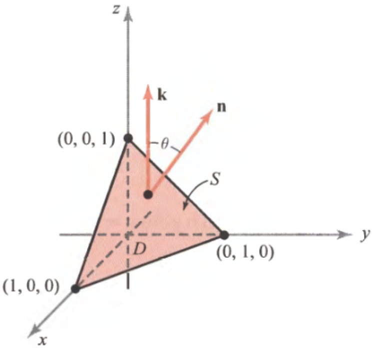
centro de gravedad

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right)$$

ejemplo 7

ejemplo 7 (cont)

- en ejemplo 4 $\rightarrow \iint_S xdS = \frac{\sqrt{3}}{6}$
- x simetría $\iint_S ydS = \iint_S zdS = \frac{\sqrt{3}}{6}$



centro de gravedad

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$