Flujo de un campo a través de una superficie

Jana Rodriguez Hertz
Cálculo 3

IMERL

26 de marzo de 2011

problema

problema

problema

problema

- X campo de velocidades de un río

problema

problema

- X campo de velocidades de un río
- S una represa (superficie)

problema

problema

- X campo de velocidades de un río
- S una represa (superficie)

¿Cuantos m^3/seg pasan por la represa?

flujo a través de una superficie

flujo a través de una superficie

flujo a través de una superficie

flujo a través de una superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización **regular**

flujo a través de una superficie

flujo a través de una superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular
- X campo vectorial

flujo a través de una superficie

flujo a través de una superficie

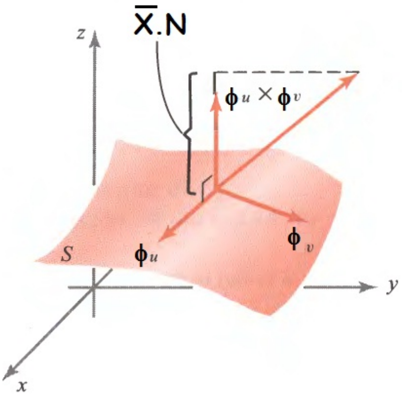
- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular
- X campo vectorial
- flujo de X a través de $\Phi(D)$:

flujo a través de una superficie

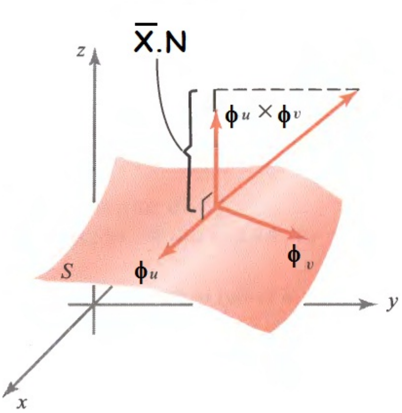
flujo a través de una superficie

- $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular
- X campo vectorial
- flujo de X a través de $\Phi(D)$:
- $$\iint_\Phi X\,dS = \iint_D X.(\Phi_u \wedge \Phi_v)\,du\,dv$$

interpretación

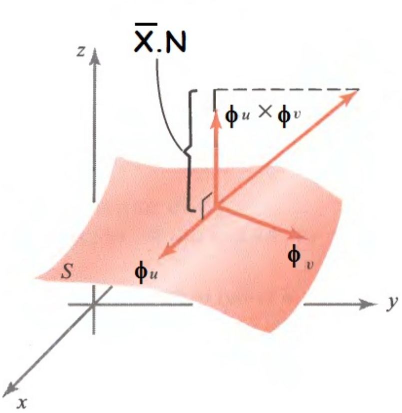


interpretación



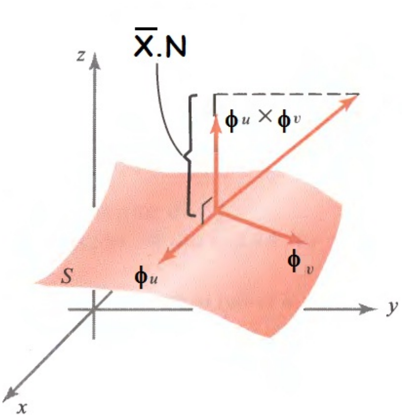
- X velocidad del fluído m/seg

interpretación



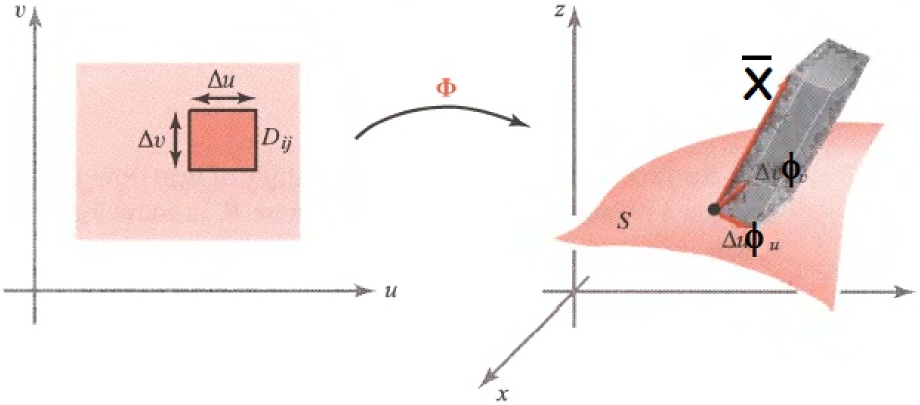
- X velocidad del fluído m/seg
- $\Phi_u \wedge \Phi_v$ componente normal a la superficie m^2

interpretación



- X velocidad del fluído m/seg
- $\Phi_u \wedge \Phi_v$ componente normal a la superficie m^2
- $\int\int_\Phi X.\Phi_u \wedge \Phi_v \, dS$ m^3/seg atraviesan la superficie

otra forma de verlo



otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito

otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito
- $P =$ paralelepípedo formado por X, $\Phi_u \triangle u$, $\Phi_v \triangle v$

otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito
- $P =$ paralelepípedo formado por X, $\Phi_u \triangle u$, $\Phi_v \triangle v$
- $\mathrm{vol}(P) = |(X, \Phi_u \triangle u, \Phi_v \triangle v)|$

otra forma de verlo

- $D_{ij} \subset D$ chiquito
- $P =$ paralelepípedo formado por X, $\Phi_u \triangle u$, $\Phi_v \triangle v$
- $\mathrm{vol}(P) = |(X, \Phi_u \triangle u, \Phi_v \triangle v)|$
- cantidad de fluído que pasa por el paralelogramo tangente x unidad de tiempo

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- Calcular $\int\int_\Phi \mathbf{r} dS$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- Calcular $\iint_\Phi \mathbf{r} dS$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$

- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = \iint_D \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) d\theta d\phi$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- Calcular $\iint_\Phi \mathbf{r} dS$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$

- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = \iint_D \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) d\theta d\phi$
-

$$\mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) = \begin{vmatrix} \cos\theta \sin\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\phi \\ -\sin\theta \sin\phi & \cos\theta \sin\phi & 0 \\ \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- Calcular $\iint_\Phi \mathbf{r} dS$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$

- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = \iint_D \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) d\theta d\phi$
- $$\begin{aligned} \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) &= \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} \\ \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) &= -\sin\phi \end{aligned}$$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- Calcular $\iint_\Phi \mathbf{r} dS$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$

- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = \iint_D \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) d\theta d\phi$
- $$\mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) = -\sin\phi$$
- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\phi \, d\phi d\theta$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- Calcular $\iint_\Phi \mathbf{r} dS$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$

- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = \iint_D \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) d\theta d\phi$
- $$\mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) = -\sin\phi$$
- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\phi d\phi d\theta = 2\pi \cos\phi|_0^\pi$

ejemplo 1

ejemplo 1

- $S = \Phi(D)$ superficie con $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$
- $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- Calcular $\iint_\Phi \mathbf{r} dS$ con $\mathbf{r} = (x, y, z)$

- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = \iint_D \mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) d\theta d\phi$
- $$\mathbf{r}(\Phi_\theta \wedge \Phi_\phi) = -\sin\phi$$
- $\iint_\Phi \mathbf{r} dS = -\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\phi d\phi d\theta = 2\pi \cos\phi|_0^\pi = -4\pi$

orientación

orientación

- una orientación de $S = \Phi(D)$

orientación

orientación

- una orientación de $S = \Phi(D)$
- es una elección continua de un vector normal n

orientación

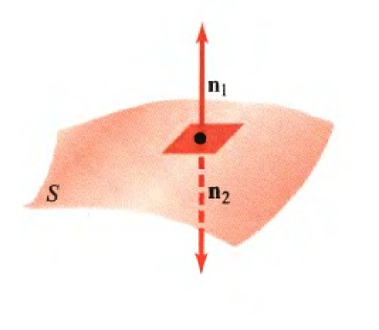
orientación

- una orientación de $S = \Phi(D)$
- es una elección continua de un vector normal n
- puede apuntar para el mismo lado que $\Phi_u \wedge \Phi_v$ o no

orientación

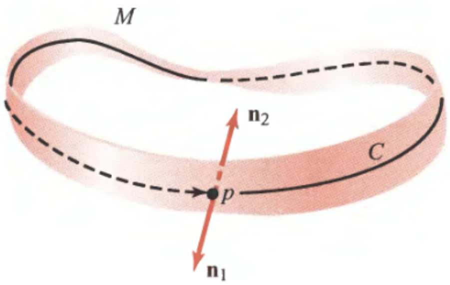
orientación

- una orientación de $S = \Phi(D)$
- es una elección continua de un vector normal n
- puede apuntar para el mismo lado que $\Phi_u \wedge \Phi_v$ o no



observación

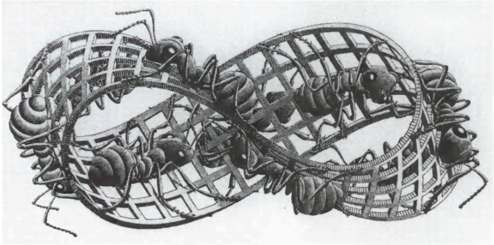
observación



la banda de Moebius no tiene orientación: no es orientable

observación

observación



la banda de Moebius no tiene orientación: no es orientable

parametrizaciones que preservan orientación

parametrizaciones que preservan orientación

- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S regular orientada

parametrizaciones que preservan orientación

parametrizaciones que preservan orientación

- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S regular orientada
- Φ preserva orientación si

parametrizaciones que preservan orientación

parametrizaciones que preservan orientación

- $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización de S regular orientada
- Φ preserva orientación si
- $$n.(\Phi_u \wedge \Phi_v) > 0$$

parametrizaciones que preservan orientación

parametrizaciones que preservan orientación

- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S regular orientada
- Φ preserva orientación si
- $$n.(\Phi_u \wedge \Phi_v) > 0$$
- de lo contrario

parametrizaciones que preservan orientación

parametrizaciones que preservan orientación

- $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ parametrización de S regular orientada
- Φ preserva orientación si
- $$n.(\Phi_u \wedge \Phi_v) > 0$$
- de lo contrario $\to \Phi$ revierte orientación

observación

observación

- $\Phi(D)$ superficie regular orientada

observación

observación

- $\Phi(D)$ superficie regular orientada
- $\Rightarrow$
$$n = \pm \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$$

observación

observación

- $\Phi(D)$ superficie regular orientada
- $\Rightarrow$
$$n = \pm \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$$
- $+ \rightarrow$ preserva orientación

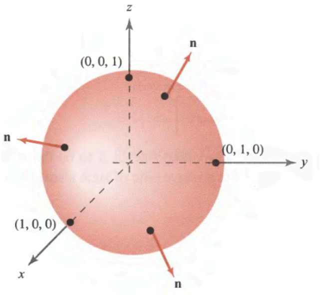
observación

observación

- $\Phi(D)$ superficie regular orientada
- $\Rightarrow$
$$n = \pm \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{|\Phi_u \wedge \Phi_v|}$$
- $+ \rightarrow$ preserva orientación
- - $\Rightarrow$ revierte orientación

ejemplo 2

ejemplo 2

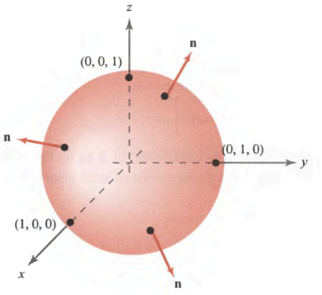


- orientamos la esfera unidad:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ejemplo 2

ejemplo 2



- orientamos la esfera unidad:

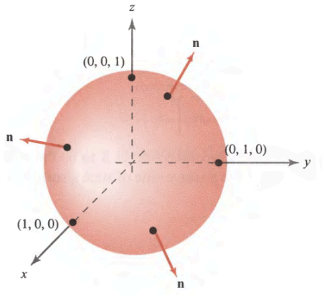
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

- con la normal exterior

$$n = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}$$

ejemplo 2

ejemplo 2



- orientamos la esfera unidad:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

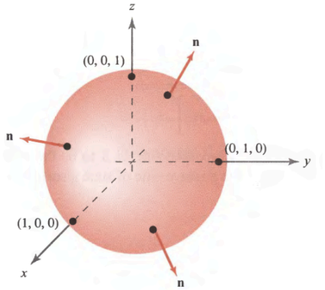
- con la normal exterior

$$n = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}$$

- la parametrización del ej 1 preserva o revierte orientación?

ejemplo 2

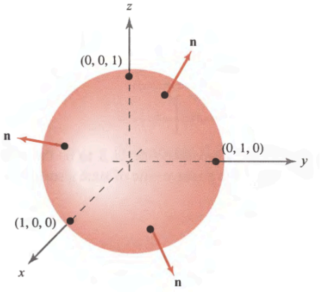
ejemplo 2



- $\Phi(theta, \phi) =$
$(\cos\theta \sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$

ejemplo 2

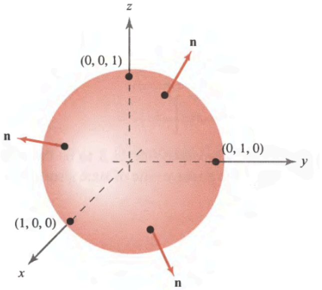
ejemplo 2



- $\Phi(theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- $n.(\Phi_u \wedge \Phi_v) = \mathbf{r}(\Phi_u \wedge \Phi_v)$

ejemplo 2

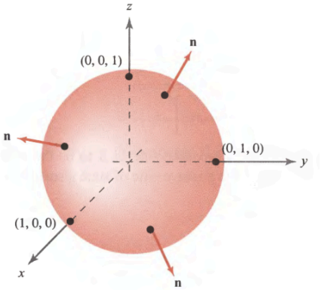
ejemplo 2



- $\Phi(theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- $n.(\Phi_u \wedge \Phi_v) = \mathbf{r}(\Phi_u \wedge \Phi_v) = -\sin\phi$

ejemplo 2

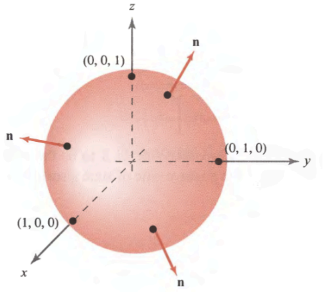
ejemplo 2



- $\Phi(theta, \phi) =$
  $(\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- $n.(\Phi_u \wedge \Phi_v) = \mathbf{r}(\Phi_u \wedge \Phi_v) = -\sin\phi$
- con $\phi \in (0, \pi)$

ejemplo 2

ejemplo 2



- $\Phi(theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$
- $n.(\Phi_u \wedge \Phi_v) = \mathbf{r}(\Phi_u \wedge \Phi_v) = -\sin\phi$
- con $\phi \in (0, \pi)$
- $\Rightarrow \Phi$ revierte orientación

orientación de gráficas

ejemplo 3 - gráficas

- S dada por $z = g(x, y)$ orientada por

orientación de gráficas

ejemplo 3 - gráficas

- S dada por $z = g(x, y)$ orientada por
- $$n = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$

orientación de gráficas

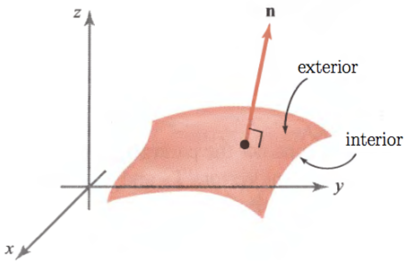
ejemplo 3 - gráficas

- S dada por $z = g(x, y)$ orientada por
- $$n = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$
- apunta hacia arriba

orientación de gráficas

ejemplo 3 - gráficas

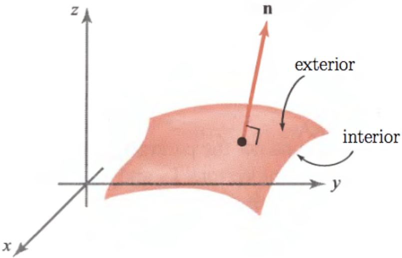
- S dada por $z = g(x, y)$ orientada por
- $$n = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$
- apunta hacia arriba



orientación de gráficas

ejemplo 3 - gráficas

- S dada por $z = g(x, y)$ orientada por
- $$n = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$
- apunta hacia arriba



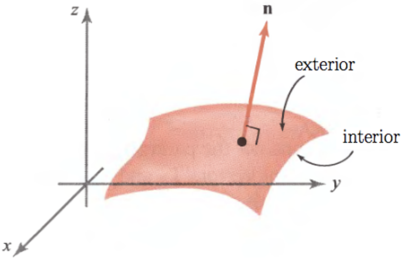
la parametrización

$$\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

orientación de gráficas

ejemplo 3 - gráficas

- S dada por $z = g(x, y)$ orientada por
- $$n = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$
- apunta hacia arriba



la parametrización

$$\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$$

conserva la orientación

elemento vectorial de superficie

elemento vectorial de superficie

- Φ parametrización regular

elemento vectorial de superficie

elemento vectorial de superficie

- Φ parametrización regular
- elemento vectorial de superficie de Φ

elemento vectorial de superficie

elemento vectorial de superficie

- Φ parametrización regular
- elemento vectorial de superficie de Φ
- $$d\mathbf{S} = (\Phi_u \wedge \Phi_v)dudv$$

observación 1

observación 1

- no confundir con elemento de área

$$dS = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

observación 2

observación 2

- el elemento vectorial de superficie depende de la parametrización

ejemplo 4

elemento vectorial de superficie de la esfera

- esfera de radio R: $x^2 + y^2 + z^2$

ejemplo 4

elemento vectorial de superficie de la esfera

- esfera de radio R: $x^2 + y^2 + z^2$
- orientada con normal exterior $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$

ejemplo 4

elemento vectorial de superficie de la esfera

- esfera de radio R: $x^2 + y^2 + z^2$
- orientada con normal exterior $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$
- orientación que preserva orientación

ejemplo 4

elemento vectorial de superficie de la esfera

- esfera de radio R: $x^2 + y^2 + z^2$
- orientada con normal exterior $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$
- orientación que preserva orientación
- $R\Phi(\phi, \theta) = (\cos\theta \sin\phi, R \sin\theta \sin\phi, R \cos\phi)$

ejemplo 4

elemento vectorial de superficie de la esfera

- esfera de radio R: $x^2 + y^2 + z^2$
- orientada con normal exterior $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$
- orientación que preserva orientación
- $R\Phi(\phi, \theta) = (\cos\theta \sin\phi, R \sin\theta \sin\phi, R \cos\phi)$
- $$d\mathbf{S} = (\Phi_\phi \wedge \Phi_\theta) d\phi d\theta$$

ejemplo 4

elemento vectorial de superficie de la esfera

- esfera de radio R: $x^2 + y^2 + z^2$
- orientada con normal exterior $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$
- orientación que preserva orientación
- $R\Phi(\phi, \theta) = (\cos\theta \sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\phi)$
- $$d\mathbf{S} = (\Phi_\phi \wedge \Phi_\theta) d\phi d\theta = \mathbf{n} R^2 \sin\phi d\phi d\theta$$

flujo y parametrizaciones

teorema 1

- S superficie orientada

flujo y parametrizaciones

teorema 1

- S superficie orientada
- Φ_1 y Φ_2 parametrizaciones regulares que preservan orientación

flujo y parametrizaciones

teorema 1

- S superficie orientada
- Φ_1 y Φ_2 parametrizaciones regulares que preservan orientación
- X campo vectorial

flujo y parametrizaciones

teorema 1

- S superficie orientada
- Φ_1 y Φ_2 parametrizaciones regulares que preservan orientación
- X campo vectorial
- $\Rightarrow$
$$\iint_{\Phi_1} X d\mathbf{S} = \iint_{\Phi_2} X d\mathbf{S}$$

flujo y parametrizaciones

teorema 2

- S superficie orientada

flujo y parametrizaciones

teorema 2

- S superficie orientada
- Φ_1 preserva orientación

flujo y parametrizaciones

teorema 2

- S superficie orientada
- Φ_1 preserva orientación
- Φ_2 revierte orientación

flujo y parametrizaciones

teorema 2

- S superficie orientada
- Φ_1 preserva orientación
- Φ_2 revierte orientación
- $\Rightarrow$
$$\iint_{\Phi_1} X d\mathbf{S} = -\iint_{\Phi_2} X d\mathbf{S}$$

notación

notación

- la notación

notación

notación

- la notación

$$\iint_S X d\mathbf{S}$$

notación

notación

- la notación
$$\iint_S X d\mathbf{S}$$
- indica $\iint_\Phi X d\mathbf{S}$

notación

notación

- la notación

$$\iint_S X d\mathbf{S}$$

- indica $\iint_\Phi X d\mathbf{S}$
- donde Φ preserva orientación

relación con integrales escalares

teorema 3

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_S X\mathbf{n} dS$$

relación con integrales escalares

demostración

Φ parametrización que preserva orientación

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_\Phi X d\mathbf{S}$$

relación con integrales escalares

demostración

Φ parametrización que preserva orientación

$$\begin{aligned}\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_\Phi X d\mathbf{S} \\ &= \iint_D X(\Phi_u \wedge \Phi_v) du dv\end{aligned}$$

relación con integrales escalares

demostración

Φ parametrización que preserva orientación

$$
\begin{aligned}
\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_\Phi X d\mathbf{S} \\
&= \iint_D X(\Phi_u \wedge \Phi_v) du dv \\
&= \iint_D X \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv
\end{aligned}
$$

relación con integrales escalares

demostración

Φ parametrización que preserva orientación

$$
\begin{aligned}
\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_\Phi X d\mathbf{S} \\
&= \iint_D X(\Phi_u \wedge \Phi_v) du dv \\
&= \iint_D X \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv \\
&= \iint_D (X\mathbf{n}) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv
\end{aligned}
$$

relación con integrales escalares

demostración

Φ parametrización que preserva orientación

$$\begin{aligned}
\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_\Phi X d\mathbf{S} \\
&= \iint_D X(\Phi_u \wedge \Phi_v) du dv \\
&= \iint_D X \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv \\
&= \iint_D (X\mathbf{n}) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv \\
&= \iint_S X\mathbf{n} dS
\end{aligned}$$

relación con integrales escalares

demostración

Φ parametrización que preserva orientación

$$\begin{aligned}
\iint_S X d\mathbf{S} &= \iint_\Phi X d\mathbf{S} \\
&= \iint_D X(\Phi_u \wedge \Phi_v) du dv \\
&= \iint_D X \frac{\Phi_u \wedge \Phi_v}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|} \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv \\
&= \iint_D (X\mathbf{n}) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv \\
&= \iint_S X\mathbf{n} dS
\end{aligned}$$

$\square$

integrales sobre gráficas

integrales sobre gráficas

S dada por $z = g(x, y) \Rightarrow$

integrales sobre gráficas

integrales sobre gráficas

S dada por $z = g(x, y) \Rightarrow$

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_D X(\Phi_x \wedge \Phi_y) dxdy$$

integrales sobre gráficas

integrales sobre gráficas

S dada por $z = g(x, y) \Rightarrow$

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_D X(\Phi_x \wedge \Phi_y) dxdy$$

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_D (-X_1 g_x - X_2 g_y + X_3) dxdy$$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- Calcular $\iint_S \mathbf{r}\, d\mathbf{S}$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- Calcular $\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S}$

$$\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S} \quad = \quad \iint_D (x, y, z)[(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0)]dxdy$$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- Calcular $\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S} &= \iint_D (x, y, z)[(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0)] dxdy \\ &= \iint_D (x, y, z).(0, 0, 1) dxdy\end{aligned}$$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- Calcular $\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S} &= \iint_D (x, y, z)[(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0)]dxdy \\
&= \iint_D (x, y, z).(0, 0, 1)dxdy \\
&= \iint_D zdxdy
\end{aligned}$$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- Calcular $\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S} &= \iint_D (x, y, z)[(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0)] dxdy \\
&= \iint_D (x, y, z).(0, 0, 1) dxdy \\
&= \iint_D z dxdy = 12 \text{área}(D)
\end{aligned}$$

ejemplo 4

ejemplo 4 - integrales sobre gráficas

- $z = 12 \qquad D: \quad x^2 + y^2 \leq 25$
- $\mathbf{r} = (x, y, z)$
- Calcular $\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{r} d\mathbf{S} &= \iint_D (x, y, z)[(1,0,0) \wedge (0,1,0)] dxdy \\
&= \iint_D (x, y, z).(0,0,1) dxdy \\
&= \iint_D z dxdy = 12 \text{área}(D) = 300\pi
\end{aligned}$$

resumen

integral de función escalar

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

resumen

integral de función escalar

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv$$

elemento de área

$$dS = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$$

resumen

integral de función escalar

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

elemento de área

$$dS = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$$

flujo de un campo

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_D X.(\Phi_u \wedge \Phi_v) dudv$$

resumen

integral de función escalar

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\Phi(u,v)) \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$$

elemento de área

$$dS = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$$

flujo de un campo

$$\iint_S X d\mathbf{S} = \iint_D X.(\Phi_u \wedge \Phi_v) dudv$$

elemento vectorial de superficie

$$d\mathbf{S} = (\Phi_u \wedge \Phi_v) dudv$$