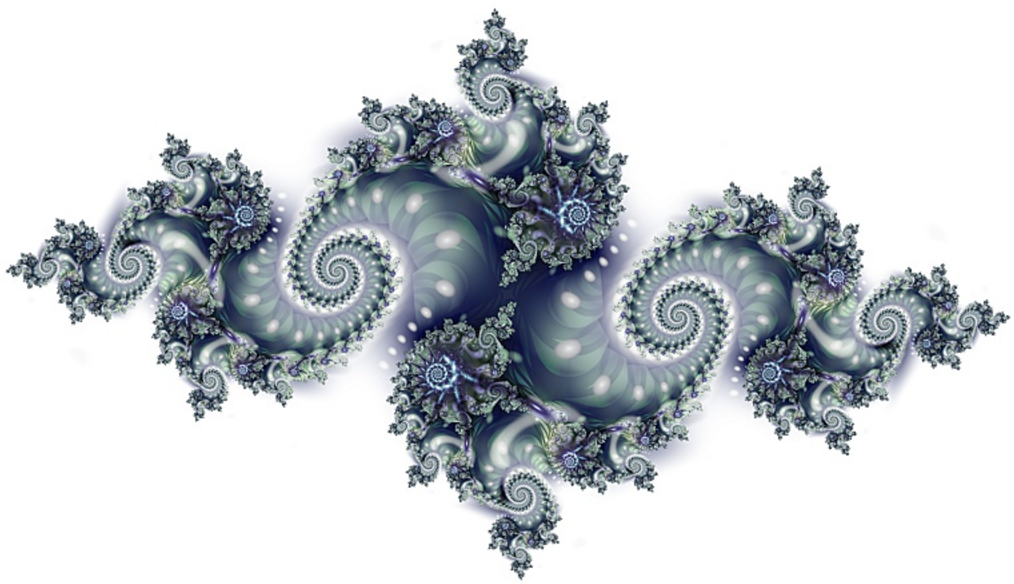
Dinámica topológica
en
dimensión 2



Juliana Xavier
IMERL-FING
UdelaR
SNI
PEDECIBA

"Mathematics is nothing more, nothing less, than the exact part of our thinking."

L.E.J Brouwer.

Prefacio.

La idea de estas notas es ir introduciendo los conceptos de forma intuitiva, utilizando ejemplos. De esta manera, a veces no van a aparecer en un principio las definiciones rigurosas de los objetos de estudio, sino que se van introduciendo a medida que las necesitemos. Tampoco las hipótesis de los Teoremas que vamos a estudiar van a estar claras hasta el momento preciso. Considero que esta forma de presentación es más fiel a la manera en que se desarrolla la matemática en la vida real. En resumen, si Ud. espera un esquema "Definición-Lema-Proposición-Teorema", no lo encontrará aquí. En ese caso, puede referirse a la bibliografía citada que cubre ampliamente los temas que trataremos en el curso.

Naturalmente, las afirmaciones hechas sin demostración son ejercicios para el lector.

Las notas van a estar en permanente construcción a lo largo del curso, y se agradece cualquier corrección, sugerencia o comentario, por mínimo que sea. Pueden escribirme a jxavier@fing.edu.uy .

La naturaleza del curso es tal que estas notas deben complementarse con muchas figuras, que serán realizadas en el pizarrón durante las clases. La ambición es poder colocar todas las figuras en alguna versión final de las notas, pero en esta etapa preliminar no va ser posible.

Montevideo, febrero de 2024.

Tabla cronológica.

La siguiente lista me la mandó Patrice Le Calvez [1] cuando le pregunté acerca de los fundadores de la dinámica topológica plana:

Poincaré (Teorema de de Poincaré-Birkhoff)

Birkhoff (mismo teorema así como el estudio local de los difeos que preservan área)

Brouwer (Teorema de traslación)

Kerekjarto (relación entre Brouwer y Poincaré-Birkhoff)

[1] El creador del Teorema de Brouwer foliado equivariante [L] (Université Paris-Sorbonne)

Capítulo 1: Qué es la dinámica topológica.

Por *dinámica* entendemos que estamos estudiando una función $f : X \to X$. Es decir, una función cuyo dominio y codominio coinciden. Esto permite iterar la función f, es decir, tiene sentido hacer $f(f(x))$, pues $f(x) \in X$. De la misma forma para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos definir $f^n(x) = f(f \ldots f(x))$, donde los puntitos significan que en total apliqué n veces la función f. Al conjunto $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ se le llama la *órbita* del punto $x \in X$ y se denota $\mathcal{O}(x)$. Asumimos que $0 \in \mathbb{N}$ y que $f^0 = \mathrm{Id}_X$, así, $f^0(x) = x$ y $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\}$. De esta manera pensamos que el punto se va moviendo de un estado (x) otro $(f(x))$ a medida que el tiempo transcurre, donde estamos "discretizando" el paso del tiempo. El estudio de la dinámica es entonces el estudio del comportamiento de todas las órbitas del sistema $\mathcal{O}(x), x \in X$, donde intentamos describir lo más detalladamente posible este conjunto. A estas funciones que van de un espacio X en sí mismo se les llama *endomorfismos* (de X).

Ejemplo 1. (Dinámica trivial). *Si $f : X \to X$ es la función* Id_X*, entonces $\mathcal{O}(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$. Decimos que esta dinámica es* trivial *(nadie se mueve para ningún lado).*

Ejemplo 2. (Traslación en la recta). *Si $X = \mathbb{R}$ y $f(x) = x + 1$, entonces no hay órbitas finitas, y tenemos que para todo $x \in X$ $\lim_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x) = -\infty$.*

En el ejemplo anterior utilizamos que la función f es invertible, y denotamos f^{-n} la iterada n-ésima de la función inversa $f^{-1}(x) = x - 1$. Al ejemplo anterior lo llamamos *traslación en la recta.* De hecho, llamamos translación en la recta a cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$. En este caso, todos los puntos se trasladan una unidad α a la derecha (si $\alpha > 0$) o una unidad α a la izquierda (si $\alpha < 0$).

Ejemplo 3. (Dinámica unidimensional). *Si $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \to X$, se puede visualizar la dinámica utilizando el* método del gráfico*:*

Se grafica la función f como es usual, y para calcular las iteradas de un punto x se procede como sigue. Se marca el punto $(x, f(x)) \in \mathrm{Graf}(f)$. Se traza la recta paralela al eje O_x por el punto $(x, f(x))$ hasta que corte la recta $y = x$ y luego la recta paralela al eje O_y hasta que corte $\mathrm{Graf}(f)$. Observar que con este procedimiento el punto de $\mathrm{Graf}(f)$ que se obtiene tiene coordenadas $(f(x), f^2(x))$. Iterando este procedimiento podemos visualizar de dónde vienen y hacia dónde van los puntos bajo la acción del mapa f.

Ejercicio 1. (Atractor-Repulsor). *Estudiar la dinámica del mapa $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x^2$.*

En general, al conjunto X se le agrega alguna estructura. Por ejemplo X puede ser un espacio de medida, un espacio topológico, una variedad diferenciable, de

Riemann, etc., y a la función f se le asigna alguna propiedad que respeta esa estructura (función medible, continua, diferenciable, holomorfa, etc.). Por *dinámica topológica* nos referimos a que X es un espacio topológico y f una función continua. Por dinámica topológica *en dimensión dos*, nos referimos a que X es una superficie (topológica, no asumimos que X tenga una estructura diferenciable ni compleja), y en general, en lugar de X le llamamos S.

Ejemplo 4. (Traslación en el plano). *Si $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$, y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $f(x) = x + v$, decimos que f es una* traslación en el plano en la dirección de v. *En este ejemplo no hay órbitas finitas y todas las órbitas tienden a infinito a futuro y a pasado.*

A lo que ya tenemos un ejemplo de dinámica plana donde no hay *puntos fijos*, podemos hacernos la siguiente pregunta: qué condiciones garantizan, para un mapa $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la existencia de un punto fijo?

Definición 1. (Punto fijo). *Un punto $x \in X$ es* fijo *si $f(x) = x$. Al conjunto de puntos fijos de f lo denotamos* $\mathrm{Fix}(f)$.

Otro tipo de pregunta sería esta: Qué condiciones sobre el espacio X garantizan la existencia de un punto fijo? (independientemente de la función f).

Ejemplo 5. (Rotación en el círculo). *Sea $R_\alpha : S^1 \to S^1$,*

$$f(x) = x + \alpha \mod 1, \ \alpha \neq 0.$$

Vemos en este ejemplo que aunque el espacio X (en este caso el círculo) sea compacto, la existencia de un punto fijo no está garantizada.

Ejercicio 2. (Número de rotación). *Describir la dinámica de la función R_α dependiendo de α.*

Ejemplo 6. (El tiempo 1 de un flujo). *Sabemos de los cursos de ecuaciones difereciales que un campo $F : M \to TM$ definido en una variedad diferenciable compacta M induce un flujo $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$, donde $\phi(x_0, t)$ es la solución de la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = F(x), x(0) = x_0$, evaluada en tiempo t. Para todo t entonces tenemos un endomorfismo $\phi_t : M \to M$ definido como $\phi_t(x) = \phi(x, t)$. En particular, para $t = 1$, decimos que la función ϕ_1 es* el tiempo 1 del flujo.

Observar que ϕ_1 es un homemorfismo de M, que además es *homotópico a la identidad*. More on this later.

Terminamos esta sección con algunos ejemplos más de dinámica topológica en dimensión 2.

Como es usual la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$ se denota S^2. Como solo nos interesa la topología, denotamos por S^2 a cualquier espacio homeomorfo a S^2. En particular, a la compactificación del plano por un punto. Es decir, $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$, donde los entornos de infinito son el complemento de los conjuntos compactos del plano y la igualdad obviamente significa homeomorfismo. [2]

Ejemplo 7. (El mapa Norte-Sur en la esfera). *Definmos un mapa* $f : S^2 \to S^2$ *de la siguiente manera:* $f(\infty) = \infty$ *y* $f(r, \theta) = (r/2, \theta)$ *para todo* $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$*, donde pusimos coordenadas polares en el plano.*

Observar que en este ejemplo hay dos puntos fijos (el polo norte y el polo sur), y cualquier otra órbita viaja (radialmente) de norte a sur.

Ejercicio 3. (Ecuaciones diferenciales lineales planas).

(1) *Demostrar que el mapa Norte-Sur es el tiempo 1 de un flujo.*
(2) *Encontrar más ejemplos dentro de la familia de soluciones de ecuaciones diferenciales planas, con dinámicas que no sean equivalentes.*
(3) *Proponer una definición de dinámicas equivalentes.*

Ejemplo 8. (Norte-Sur de grado 2). *Este ejemplo es parecido al anterior, con la diferencia de que el sistema* no es invertible*. En este caso definimos* f *como:* $f(\infty) = \infty$ *y* $f(r, \theta) = (r/2, 2\theta)$.

En este ejemplo como en el anterior, hay solamente dos puntos fijos (el polo norte y el polo sur), y cualquier otra órbita viaja de norte a sur. La diferencia está en que en lugar de viajar por una línea recta las órbitas bajan "girando" alrededor del 0. Cada punto $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, tiene dos preimágenes por f, y los puntos fijos 0 e ∞ son los únicos puntos con una única preimagen. Por esto decimos que el mapa f tiene *grado* 2, y que el cero y el infinito son *puntos críticos*.

Ejercicio 4. *El mapa Norte-Sur de grado* 2 *es el tiempo* 1 *de un flujo? Por qué?*

Una familia de ejemplos "parecidos" se consiguen considerando funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a^n z^n$. En este caso decimos que f es un *polinomio complejo*. Casi todos los puntos tienen n preimágenen por f excepto el conjunto de puntos críticos que tienen menos preimágenes, y que coincide con el conjunto de puntos que anulan la derivada f'.

Ejemplo 9. (El mapa cuadrático). *Sea* $f(z) = z^2$*,* $z \in \mathbb{C}$.

En este caso hay tres puntos fijos: $0, \infty, 1$. El círculo unidad $S^1 = \{z \in C : |z| = 1\}$ es *totalmente invariante* ($f^{-1}(S^1) = S^1$). Todos los puntos en el hemisferio norte tienden a ∞ y todos los puntos del hemisferio sur tienden a cero (cuando les

[2] Una topóloga es una señora que no sabe la diferencia entre una dona y una taza de café.

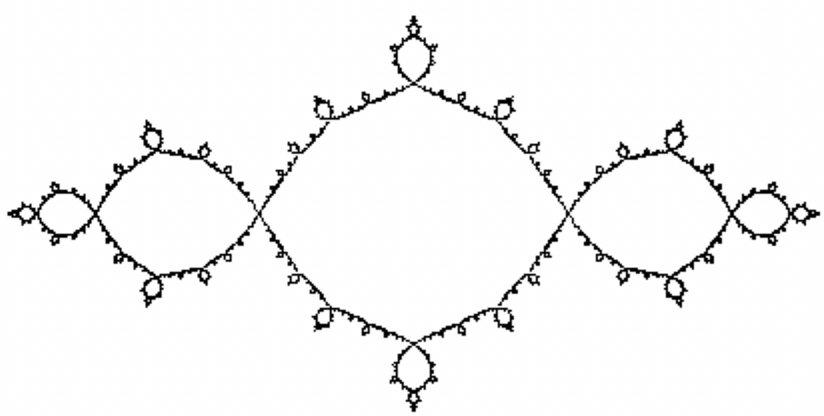
aplicamos las iteradas de f). Los únicos puntos críticos son cero e infinito. Observar que al verificarse $f^{-1}(S^1) = S^1$, el mapa f induce por restricción un mapa en el círculo $f|_{S^1} : S^1 \to S^1$ que además es $2:1$. Como no hay puntos críticos de f en S^1, $f|_{S^1} : S^1 \to S^1$ verifica además que es un *cubrimiento* del círculo.

Ejercicio 5. (El mapa cuadrático unidimensional).

(1) *Graficar el mapa cuadrático en el círculo.*
(2) *Utilizar el método del gráfico para visualizar las trayectorias de las órbitas.*
(3) *Para cada $n \geq 1$, encontrar los puntos periódicos de período menor o igual a n (o lo que es lo mismo $\mathrm{Fix}(f^n)$). Cuántos hay?.*

Si modificamos un poco la función f considerando, por ejemplo, $f(z) = z^2+c, c \in \mathbb{C}$, obtenemos también un mapa de grado 2, pero la dinámica cambia completamente.

Ejemplo 10. (Basílica). *Sea $f(z) = z^2 - 1$. En este caso los puntos críticos son 0 e ∞, pero la dinámica es bastante diferente.*



El fractal J que se observa en la figura juega el papel de S^1 en el ejemplo 9: verifica $f^{-1}(J) = J$. Todos los puntos en la componente conexa de $\mathbb{C}\backslash J$ que contiene a ∞ tienden a infinito (bajo la acción de f), y el resto de los puntos (en las componentes acotadas del complemento de J) van viajando por las pelotitas hasta morir en la órbita periódica atractora formada por 0 y -1.

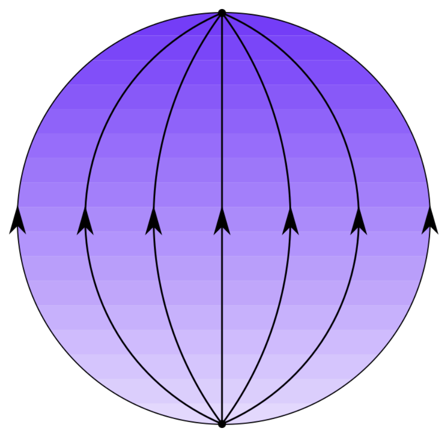
Incluso para valores muy pequeños de $c \in \mathbb{C}$ el mapa $f(z) = z^2 + c$ presenta fractales totalmente invariantes. Vemos entonces como en casos relativamente sencillos de funciones f, el estudio de la dinámica puede ser complicado. Esto es lo que hace el estudio de la dinámica tan divertido y apasionante.

Capítulo 2: El Teorema clásico de Brouwer.

Este teorema establece que una función continua que va del disco n-dimensional *cerrado* en si mismo tiene un punto fijo. Para cada $n \geq 1$ sea $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Si no ponemos nada y escribimos simplemente $\mathbb{D}$, asumimos que $n = 2$, osea $\mathbb{D} = \mathbb{D}^2$.

Teorema 1. (Teorema de Brouwer en el disco). *Sea $f : \overline{\mathbb{D}^n} \to \overline{\mathbb{D}^n}$ continua. Entonces, existe $x \in \overline{\mathbb{D}^n}$ tal que $f(x) = x$.*

Observar primero que es necesario que el disco sea cerrado. Es decir, podemos considerar $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ continua y sin puntos fijos, como muestra la siguiente figura:



También la misma figura muestra que considerando el disco cerrado, aparecen 2 puntos fijos en el borde. La dinámica de la $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ de la figura es *conjugada* a la traslación en el plano, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, F(x, y) = (x, y + 1)$. Es decir, lo que representa la figura no es otra cosa que el ejemplo 4 extendido continuamente a la compactificación del plano con un círculo de direcciones. A su vez, la dinámica en el círculo al infinito es una versión unidmiensional del ejemplo 7. Aprovecho para comentar aquí que el ejemplo 7 es la extensión continua del tiempo 1 del flujo radial en el plano, a la compactificación del plano con un punto en el infinito (A.K.A S^2). Estas identificaciones se hacen todo el tiempo en dinámica topológica.

Volviendo al Teorema 1, la demostración en todas las dimensiones utiliza la misma idea: si existe $f : \overline{\mathbb{D}^n} \to \overline{\mathbb{D}^n}$ continua sin puntos fijos, se puede retraer por deformación la bola n-dimensional $\mathbb{B}^n = \mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ a su borde $\partial\mathbb{B}^n = S^{n-1}$. Pero esto es imposible por un argumento de tipo de homotopía: la bola $\mathbb{B}^n$ es contractible, en tanto que su borde S^{n-1} no lo es. Demostrar que la bola $\mathbb{B}^n$ es contractible para todo n es muy sencillo (hágalo), pero demostrar que S^{n-1} no lo es requiere argumentos de topología algebraica demasiado avanzados para este curso. Por esta razón, solo daremos la demostración para $n = 2$ (que dicho sea de paso es la única dimensión que nos interesa,jejeje). Observar que en este caso, toca demostrar que

S^1 no es contractible, y eso es fácil ya que todos sabemos que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, donde cada entero representa el número de vueltas alrededor del círculo, indicadas con el sentido en el que se dan.

De todas formas incluiremos aquí una prueba autocontenida, que no depende de calcular el grupo fundamental del círculo, ni de conocimientos de topología algebraica.

Ejercicio 6. (Funciones de S^1 en S^1). *Identificamos $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con $(1,0) = [0]$ y consideramos $f : S^1 \to S^1$. Sea $y_0 \in \mathbb{R}$ un representante de $f([0])$. Demostrar que para cada $x \in [0,1]$ existe único representante $\tilde{f}(x)$ de $f([x])$ en $\mathbb{R}$ tal que si ponemos $\tilde{f}(0) = y_0$, la función $\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ resulta continua.*

Definición 2. (Homotopía de funciones). *Decimos que dos funciones $f, g : X \to Y$ son* homotópicas *si existe $H : X \times [0,1] \to Y$ continua tal que:*
(1) *$H(x,0) = f(x)$ para todo $x \in X$*
(2) *$H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$*

En este caso, decimos que la función H es una *homotopía entre f y g*. Es decir, dos funciones $f, g : X \to Y$ son homotópicas, si existe un camino de funciones de X en Y, $H_t : X \to Y$, $t \in [0,1]$, que conecta f con g (para cada $t \in [0,1]$, $H_t(x) = H(x,t)$ para todo $x \in X$). Podemos pensar también que podemos deformar continuamente la función f en la función g, y esta deformación ocurre dentro del espacio de funciones continuas de X en Y.

Utilizaremos este Lema para la demostración del Teorema 1:

Lemma 1. *Sea $f = \mathrm{Id}|_{S^1}$ y $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ una homotopía entre f y g tal que $H_t((1,0)) = (1,0)$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces $g : S^1 \to S^1$ es sobreyectiva.*

Proof. Identificamos $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ con $(1,0) = [0]$ y observamos que para cada $t \in [0,1]$ la función $H_t : S^1 \to S^1$ induce una función $\tilde{H}_t : [0,1] \to \mathbb{R}$, donde $\tilde{H}_t(0) = 0$ y $\tilde{H}_t(x)$ es el único representante de $H_t([x])$ en $\mathbb{R}$ que hace que $\tilde{H}_t$ sea continua (ver Ejercicio 6). Observar también que para cada $t \in [0,1]$ podemos graficar $\tilde{H}_t : [0,1]$ y que el gráfico de $f = H_0$ en $\mathbb{R}^2$ coincide con $\{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : y = x\}$.

Si H es una homotopía entre f y g tal que $H_t((1,0)) = (1,0)$ para todo $t \in [0,1]$, necesariamente los caminos $(0, \tilde{H}_t(0))$ y $(1, \tilde{H}_t(1)), t \in [0,1]$ son constantes (son la imagen de $[0,1]$ por una función continua a valores en un conjunto discreto del plano). Como además $f = \mathrm{Id}|_{S^1}$, se tiene $(0, \tilde{H}_t(0)) = (0,0)$ y $(1, \tilde{H}_t(1)) = (1,1), t \in [0,1]$. Por lo tanto, para todo $t \in [0.1]$ el gráfico de $\tilde{H}_t : [0,1] \to \mathbb{R}$ conecta los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, de manera que cada función $\tilde{H}_t$ toma todos los valores entre $[0,1]$ por el Teorema del valor medio para funciones continuas. Esto implica la sobreyectividad de $g = H_1$.

□

Homotopía lineal a un punto en un convexo. Sea X un espacio convexo y $x_0 \in X$. Entonces existe una función continua $H : X \times [0,1] \to X$ tal que:

(1) $H(x,0) = x$ para todo $x \in X$
(2) $H(x,1) = x_0$ para todo $x \in X$

Es decir que en un espacio convexo la función Id_X y la función constante $f : X \to X, f(x) = x_0$ para todo $x \in X$ son homotópipcas. Simplemente definimos $H(x,t) = x + t(x_0 - x)$ para todo $(x,t) \in X \times [0,1]$. Observar que como X es convexo, el segmento de recta entre x y x_0 est contenido en X para todo X y tenemos bien definida $H : X \times [0,1] \to X$. Observar además que esta homotopía verifica que $H_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$.

Demostración del Teorema 1 para $n = 2$:

Proof. Supongamos $f(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{\mathbb{D}^2}$. Entonces podemos definir un mapa $r : \overline{\mathbb{D}^2} \to S^1 = \partial\overline{\mathbb{D}^2}$ tal que $r(x)$ es el punto en S^1 donde la recta orientada de $f(x)$ a x se va del disco. Se sigue que r es continua y además $r(x) = x$ para todo $x \in S^1$. Probaremos que la existencia de este mapa r contradice el Lema 1. Sea $H_t : \overline{\mathbb{D}^2} \to \overline{\mathbb{D}^2}, t \in [0,1]$ la homotopía lineal al punto $(1,0) \in S^1$. Observar que $rH_t|_{S^1} : S^1 \to S^1$ es una homotopía entre $\mathrm{Id}\,|_{S^1}$ y la función constante $g : S^1 \to S^1$, $g(x) = (1,0)$ para todo $x \in S^1$. Además, $rH_t(1,0) = (1,0)$ para todo $t \in [0,1]$, contradiciendo el Lema 1.

□

Este teorema es un ejemplo de que la topología del espacio X impone condiciones en la dinámica: cualquier mapa del disco cerrado *tiene* un punto fijo. Como ya observamos, la compacidad se necesita, es decir si le sacamos el borde al disco y nos quedamos con el plano, existen dinámicas libres de puntos fijos. También la topología importa:

Ejercicio 7. (Superficies compactas y puntos fijos).

(1) *Dar un ejemplo de $f : X \to X$ continua, X superficie compacta (con o sin borde) tal que* $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$.
(2) *Si X es una superficie compacta sin borde, es posible encontrar $f : X \to X$ continua tal que* $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$*?*
(3) *Conjeturar un teorema a este respecto. Si se anima, proveer incluso un esbozo de demostración. Agregar todas las hipótesis que crea necesarias para demostrar su teorema.*

Ejercicio 8. (Flujos planos sin singularidades).

(1) *Dar un ejemplo de dinámica $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tiempo* 1 *de flujo sin puntos fijos, que no sea equivalente a una traslación.*
(2) *Cuántas clases de quivalencia hay?*

Capítulo 3: El Teorema de traslación de Brouwer.

El siguiente tema que nos interesa es: qué condiciones pueden garantizar la existencia de puntos fijos para *homeomorfismos* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$? Si f preserva orientación, la respuesta es conocida, es hermosa y es profunda: cualquier tipo de *recurrencia* implica la existencia de un punto fijo. Es decir, un homeo del plano sin puntos fijos, no puede presentar forma alguna de recurrencia. Qué entendemos por recurrencia? En el lenguaje coloquial, un hecho recurrente es algo que no pasa solamente una vez, sino que se repite a lo largo del tiempo. Con la dinámica es lo mismo, si pensamos un punto x como un "estado" de la dinámica, entonces ese estado es *recurrente* si se repite a lo largo del tiempo. Por ejemplo, un punto fijo o un punto periódico son estados (o puntos) recurrentes. Pero hay formas más débiles de recurrencia, como un punto que pasa infinitas veces cerca de sí mismo, en algún sentido a definir. Van dos definiciones básicas:

Definición 3. (Punto no errante). *Decimos que $s \in X$ es* errante *si existe U entorno de x tal que la familia $\{f^n(U) : n \in \mathbb{N}\}$ es dos a dos disjunta. Si esto no ocurre, decimos que x es* no errante.

Es decir, que un punto x es *no errante* si para cualquier entorno U de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no errantes se denota $\Omega(f) = \{x \in X : x \text{ es no errante }\}$. Observar que un punto no errante es una noción más "laxa" de recurrencia.

Definición 4. (Punto recurrente) *Decimos que $x \in X$ es* recurrente *si existe una sucesión de naturales $(n_k)_{k\in N}$ tal que $f^{n_k}(x) \to_k x$.*

Osea que un punto recurrente pasa arbitrariamente cerca suyo infinitas veces al futuro. Observar que si un punto es recurrente, entonces es también no errante.

El teorema que veremos a continuación establece que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo del plano que preserva orientación y presenta *cualquier tipo* de recurrencia, tiene un punto fijo. Obviamente hay que hacer este enunciado preciso, pero es lo que es. Este teorema se conoce por *Teorema de traslación de Brouwer*, ya que en definitiva lo que queda para un homeo del plano que preserva orientación y sin puntos fijos es una descomposición del plano en abiertos invariantes restricto a cada uno de los cuales el mapa es conjugado a una traslación. More on this later.

La primera versión que veremos establece que la existencia de un punto periódico de período 2 implica la existencia de un punto fijo. La demostración que daremos es de Albert Fathi [F], un matemático francés contemporáneo, y es una verdadera joya.

Teorema 2. (Petit Brouwer) *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que presereva orientación y que tiene un punto periódico de período 2. Entonces* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Algunas consideraciones previas a la demostración. Si f revierte orientación, se puede construir un ejemplo que tenga puntos periódicos de período 2 y ningún punto fijo. Comenzamos con la función $g(x, y) = (x, -y)$. Observar que g es un homeo del plano que revierte orientación. Además, todos los puntos tienen período 2 excepto aquellos que están sobre el eje O_x que son fijos. Vamos a modificar el mapa g para desembarazarnos de los puntos fijos pero no de los periódicos de período 2. Definimos un mapa $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

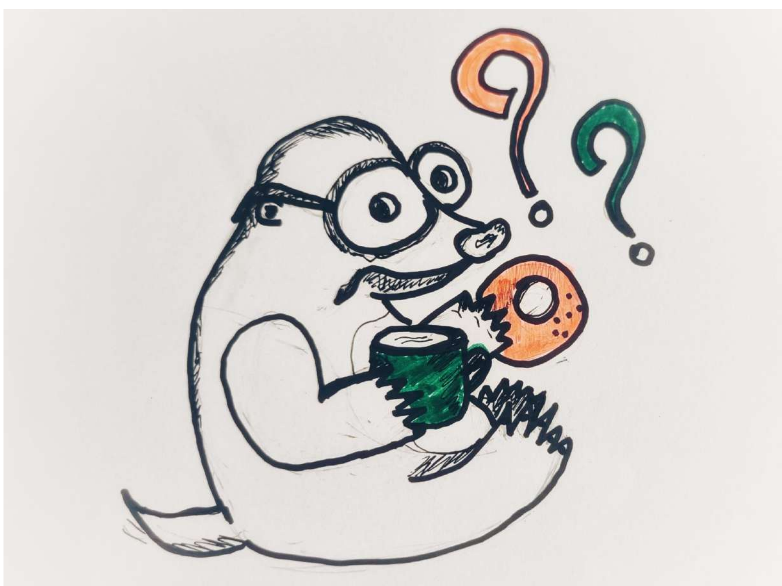
(1) $h = g$ fuera de la banda $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\}$
(2) $h(x, 0) = (x + 1, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$
(3) $h(x, t) = (x + (1 - t), -t)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$

Observar que h es un homeo del plano que revierte orientación, que tiene puntos periódicos de período 2, y que no tiene puntos fijos.

Vamos a utilizar algunas identificaciones entre espacios topológicos. Obviamente la igualdad significa homeomorfismo: [3]

$$\mathbb{R}^2 = S^2 \backslash \{x\},\ \mathbb{A} := S^1 \times (0, 1) = S^2 \backslash \{p, q\},\ \overline{\mathbb{D}^2} = \mathbb{R} \times [0, 1] \bigsqcup \{-\infty + \infty\}.$$

Ejercicio 9. (Compactificación de la banda cerrada). *Cuál es la topología en $\mathbb{R} \times [0, 1] \bigsqcup \{-\infty + \infty\}$ que hace que la última igualdad sea cierta?*



La demostración del Teorema 2 (Petit Brouwer) utiliza también la noción de *cubrimiento universal*. Un concepto debido a Poincaré, que por el momento no lo vamos a estudiar en toda su generalidad, sino que vamos a considerar el caso del anillo cerrado $\overline{\mathbb{A}} = S^1 \times [0, 1]$. En este caso el cubrimiento universal es la banda cerrada $B := \mathbb{R} \times [0, 1]$.

[3]Un topólogo no sabe si mojar la dona en la taza o la taza en la dona.

Definición 5. (Cubrimiento). *Un* cubrimiento *de un espacio X es un espacio $\widetilde{X}$ junto con un mapa $p : \widetilde{X} \to X$ que satisface la siguiente codición: para todo $x \in X$ existe $U(x)$ tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos en $\widetilde{X}$ restricto a cada uno de los cuales p es un homeo sobre U. La función p se llama proyección de cubrimiento.*

La teoría general de espacios de cubrimientos está desarrollada en el libro de Hatcher [H]. Sólo incluiremos aquí los pedacitos que son necesarios para hacer nuestra exposición autocontenida.

Ejercicio 10. (Polinomios complejos). *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a^n z^n$ un polinomio complejo y sea* $\operatorname{Crit}(f) = \{z \in \mathbb{C} : f'(z) = 0\}$. *Definimos $\tilde{X} = \mathbb{C} \backslash f^{-1}(\operatorname{Crit}(f))$ y $X = \mathbb{C} \backslash \operatorname{Crit}(f)$. Demostrar que $f|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \to X$ es un cubrimiento.*

Como es usual, diremos que una *curva* es una función continua $\gamma : [0, 1] \to X$. También como es usual abusamos la notación y usamos indistintamente γ para la curva y para su imagen $\gamma([0, 1])$. Decimos que la curva *va del punto x al punto y* si $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Las curvas pueden levantarse a los espacios de cubrimiento:

Lemma 2. (Levantamiento de curvas). *Sea $\gamma : [0, 1] \to X$ una curva tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Entonces existe una única curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \tilde{X}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ y $p\tilde{\gamma} = \gamma$.*

Ejercicio 11. *Demostrar el lema anterior. Comparar con el Ejercicio 6.*

En nuestro caso $X = \overline{\mathbb{A}}$, $\widetilde{X} = B$ y $p(x, y) = (e^{i2\pi x}, y)$. Lo que hace que este cubrimiento sea *universal* es que $\tilde{X} = B$ es simplemente conexo. Este cubrimiento puede pensarse como un rollo de papel higiénico "sin fin", pero literalmente. No veremos la propiedad de levantamiento de mapas en toda su generalidad, sino en nuestro caso particular:

Lemma 3. (Levantamiento de mapas al cubrimiento universal del anillo). *Sea $f : X \to X$ con $f(x_0) = y_0$ y $p : \tilde{X} \to X$ la proyección de cubrimiento. Dados $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0), \tilde{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$, existe una única $F : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tal que $F(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$ y $pF = fp$. La función F se llama* levantamiento *de f.*

Proof. Para $\tilde{x} \in \tilde{X}$, definimos $F(\tilde{x})$ de la siguiente manera: tomamos γ una curva de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$ y tomamos el levantamiento $\widetilde{fp\gamma}$ de $f(p(\gamma))$ por $\tilde{y}_0$; $F(\tilde{x})$ es el extremo de este levantamiento. Es decir, $F(\tilde{x}) = \widetilde{fp\gamma}(1)$. Hay que ver que $F(\tilde{x})$ está bien definido, es decir, que es independiente de la curva γ elegida. Observar que cualquier otra curva γ' de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$ es homotópica a γ (porque $\tilde{X}$ es simplemente conexo), y por lo tanto $f(p(\gamma))$ es homotópica a $f(p(\gamma'))$. Esto es equivalente a que $\widetilde{fp\gamma}$ y $\widetilde{fp\gamma'}$ terminen en el mismo punto. La continuidad de F es obvia por construcción.

$\square$

Ejercicio 12. (Grado). *Sea $f : X \to X$ y $F : \tilde{X} \to \tilde{X}$ un levantamiento de F.*

(1) *Demostrar que la función $x \mapsto F(x+(1,0))-F(x)$ toma valores en $\mathbb{Z}\times\{0\}$.*
(2) *Demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x+(1,0)) - F(x) = (k,0)$ para todo $x \in \tilde{X}$ (este $k \in \mathbb{Z}$ se denomina grado de f).*
(3) *Demostrar que para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ se cumple que $F(x+(m,0))-F(x) = (km,0)$.*
(4) *Demostrar que si f es un homeomorfismo, entonces $k \in \{-1,1\}$.*
(5) *Demostrar que si f es un homeomorfismo que preserva orientación e intercambia los bordes del anillo, entonces $k = -1$.*

Definición 6. (Retracción). *Una función continua $r : X \to X$ es una retracción de X sobre $Z \subset X$ si $r(X) = Z$ y $r|_Z = \mathrm{Id}$.*

Las retracciones son la analogía topológica de las proyecciones en otras partes de la matemática.

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 2:

Proof. Observemos primero que f se extiende a un homeo $f : S^2 \to S^2$ fijando ∞. Sea x el punto períodico de período 2: $x \neq f(x)$, $x = f^2(x)$. Observar que si $\mathbb{A}$ es el anillo abierto $\mathbb{A} = S^2\backslash\{x, f(x)\}$, entonces $f|_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ y $\mathrm{Fix}(f|_{\mathbb{A}}) \neq \emptyset$ ($\infty \in \mathbb{A}$).

Sea $X \subset \mathbb{A}$ un anillo esencial cerrado suficientemente grande como para que la composición de f con la retracción r de $\mathbb{A}$ sobre X, tenga los mismos puntos fijos que f y coincida con f en un entorno de los puntos fijos.

Abusando la notación, seguimos llamando a este mapa f, de manera que ahora $f : X \to X$ es una función continua (no un homeomorfismo) y X es un anillo cerrado. Observar que para probar el teorema, es suficiente probar que f tiene al menos dos puntos fijos en el interior de X (uno no basta, pues recordemos que $\infty \in \mathrm{Int}(X)$ es punto fijo de f).

Sea $F : \tilde{X} \to \tilde{X}$ un levantamiento de f al cubrimiento universal de X, y observemos que como F preserva orientación e intercambia los fines del anillo, se tiene que $F(x + (1,0)) = F(x) - (1,0)$ para todo $x \in \tilde{X}$ (ver Ejercicio 12). Por lo tanto, si compactificamos $\tilde{X}$ con dos puntos $-\infty$ y ∞ de manera que $D = \tilde{X} \cup \{-\infty,\infty\}$ sea homeomorfo a un disco cerrado D, podemos extender F de forma continua a D poniendo $F(\infty) = -\infty$ y $F(-\infty) = \infty$. Observar ahora que el hecho de que los bordes de X se intercambien, nos da que $F|_{\partial D}$ no tiene puntos fijos.

Aplicando el Teorema de Brouwer en el disco 1, sabemos que existe $z \in \mathrm{Int}(\tilde{X})$ tal que $F(z) = z$. Ahora bien, utilizando el mismo razonamiento para el levantamiento $(F + 1), (F + 1)(x) = F(x) + (1,0)\ \forall x$, existe $w \in \mathrm{Int}(\tilde{X})$ tal que $(F + 1)(w) = w$. Basta probar que z y w no se proyectan al mismo punto de X para obtener al menos dos puntos fijos de f en el interior de X . Supongamos por absurdo que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $w = z + (k,0)$. Por lo tanto $w = (F + 1)(w) = (F + 1)(z + (k,0)) = F(z) - (k,0) + (1,0) = z + (-k + 1,0)$. Obtenemos entonces $z + (k,0) = z + (-k + 1,0)$, o $k = 1/2$, absurdo.

□

Para probar el teorema en total generalidad, basta probar que si tenemos un homeomorfismo del plano que presenta algún tipo de recurrencia podemos modificarlo, *sin cambiar el conjunto de puntos fijos*, para que tenga un punto fijo de período exactamente 2. Lo que se hace es probar que recurrencia en el plano implica punto periódico, y luego se concluye utilizando el siguiente resultado de Brouwer:

Teorema 3. (Teorema de traslación de Brouwer) *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un homeomorfismo que presereva orientación y que tiene un punto periódico. Entonces* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

A su vez, este último resultado también puede probarse modificando el mapa f que tiene un punto periódico cualquiera, *sin modificar el conjunto de puntos fijos*, para que tenga un punto periódico de período 2, y así concluir por Petit Brouwer. Vemos que esta idea de cambiar un mapa por otro sin modificar el conjunto de puntos fijos está muy buena y es a la vez muy útil, por lo cual le vamos a dedicar un tiempo por separado. En el próxima capítulo vamos a estudiar este tipo de modificaciones o *perturbaciones* para después retomar y ven como se aplican estas ideas a la demostración del Teorema 3 en su versión más general.

Capítulo 4. Perturbaciones soportadas en discos libres

Definición 7. (Soporte). *Si $f : X \to X$ es un homeo, definimos el* soporte *de f y denotamos* $\mathrm{Sop}(f)$ *al conjunto* $\mathrm{Sop}(f) = \{x \in X : f(x) \neq x\} = X \setminus \mathrm{Fix}(f)$.

Definición 8. (Discos topológicos). *Decimos que U es un* disco abierto *si es homeomorfo a $\mathbb{D}$, y decimos que es un* disco cerrado *si es homeomorfo a $\overline{\mathbb{D}}$.*

Observación 1. *Cualquier abierto simplemente conexo del plano es un disco abierto .*

Definición 9. *Decimos que $U \subset X$ es* libre para f *si $f(U) \cap U = \emptyset$.*

Lemma 4. *Sea X un espacio de Hausdorff, $f : X \to X$ continua, $x \notin \mathrm{Fix}(f)$. Entonces existe U entorno de x tal que U es libre para f.*

Proof. Si $x \neq f(x)$, existen V, V' abiertos tales que $x \in V, f(x) \in V'$ y $V \cap V' = \emptyset$. Por continuidad, existe $U \subset V$ tal que $f(U) \subset V'$. Por lo tanto $U \cap f(U) = \emptyset$, como se quería.

□

Lemma 5. (Puntos fijos y perturbaciones a soporte libre.) *Si $U \subset X$ es libre para f y φ es un homeo tal que $\mathrm{Sop}\,\varphi \subset f(U)$, entonces $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(\varphi \circ f)$.*

Proof. Sea $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Entonces $x \notin U$ (porque U es libre para f) y por lo tanto $f(x) \notin f(U)$ ya que como f es homeo $f^{-1}(f(U)) = U$. Ahora $\mathrm{Sop}\,\varphi \subset f(U)$ implica $\varphi \circ f(x) = f(x) = x$ y concluimos que $x \in \mathrm{Fix}(\varphi \circ f)$.

Consideremos ahora $x \in \mathrm{Fix}(\varphi \circ f)$. Si $x \notin U$, entonces $x \in \mathrm{Fix}(f)$ porque $f = \varphi f$ fuera de U. Veamos ahora que $x \in U$ es imposible: $f(x) \in f(U)$ implica $\varphi(f(x)) \in f(U)$ ya que φ es homeo y es la identidad fuera de $f(U)$. Por lo tanto $\varphi(f(x)) \neq x$ porque $U \cap \varphi f(U) = \emptyset$.

□

Ejercicio 13. *Demostrar que el lema anterior también es válido si el soporte de f está contenido en U. Es decir: Si $U \subset X$ es libre para f y φ es un homeo tal que* $\mathrm{Sop}\,\varphi \subset U$, *entonces* $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(\varphi \circ f)$.

Ejercicio 14. *Sean U y V discos disjuntos y libres para $f \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2)$, y $\varphi, \psi \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ tales que $\mathrm{Sop}\,\varphi \subset U$ y $\mathrm{Sop}\,\psi \subset V$. Demostrar que $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(\psi \circ \varphi \circ f)$. Qué pasa si $U \cap V \neq \emptyset$?*

Lemma 6. (Dedazos). *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un disco abierto, x, y dos puntos diferentes en U. Entonces existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeo que preserva orientación tal que:*

(1) $\mathrm{Sop}(\varphi) \subset U$

(2) $\varphi(x) = y$

Proof. Observar primero que:

(1) Alcanza con suponer que el disco U es convexo y no se pierde generalidad.
(2) El tiempo 1 ϕ_1 del flujo del campo constante $F(z) = y - x$ verifica $\phi_1(x) = y$.

Tomamos ahora una función $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que:

(1) $\rho = 0$ en U^c
(2) $\rho = 1$ en V, donde $V \subset U$ es un abierto convexo que contiene a x y a y

(es decir que ρ es un chichón C^1).

Observar ahora que φ el tiempo 1 del flujo del campo ρF verifica lo pedido.

□

A estas funciones φ les llamamos *dedazos* [4]. El siguiente lema muestra cómo los dedazos son claves para nuestro objetivo:

Lemma 7. (Cerramiento de órbitas). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeo tal que $\Omega(f) \neq \emptyset$. Entonces existe $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que* $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(f)$ *y g tiene un punto periódico. Además, si f preserva orientación, g también preserva orientación.*

Proof. Podemos suponer que $\mathrm{Per}(f) = \emptyset$, sino tomamos $g = f$ y el resultado es obvio. Sea $x \in \Omega(f)$ y U disco libre que contiene a x (ver Lemma 4). Sea $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ y n es mínimo con esa propiedad. Entonces existe $y \in U$ tal que $f^n(y) \in U$. Por el Lema 6 sabemos que existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeo que preserva orientación tal que:

(1) $\mathrm{Sop}(\varphi) \subset U$
(2) $\varphi(f^n(y)) = y$

Tomamos ahora $g = \varphi \circ f$ y obtenemos que $g^n(y) = y$. Además, $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Fix}(g)$ en virtud del Lemma 5, y g preserva orientación si f preserva orientación.

□

Como consecuencia, obtenemos este resultado a partir del Teorema de traslación de Brouwer 3:

Corolario 1. (Puntos errantes). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que presereva orientación y que no tiene puntos fijos. Entonces, todos los puntos son errantes.*

[4] El nombre se debe a Alejo García.

Ejercicio 15. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un homeomorfismo que presereva orientación y* $K \subset \mathbb{R}^2$ *un compacto tal que* $f(K) \subset K$*. Probar que* $\Omega(f) \neq \emptyset$*. Deducir que* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$*.*

Haremos ahora una observación maravillosa que se debe a Franks [F]. En la demostración del Lema 7, no se utilizó que el punto x era no errante, sino que se utilizó la siguiente propiedad: x pertenece a un disco libre U tal que existe $n > 1$ con $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Con esta propiedad, se puede cerrar la órbita de un punto $y \in U$ sin alterar el conjunto de puntos fijos. Pero en realidad, aplicando varios dedazos en lugar de uno, se puede debilitar aún más esta hipótesis.

Definición 10. (Cadena periódica de discos libres). *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ *y sean* $U_0, \ldots, U_n$ *discos topológicos libres y disjuntos dos a dos. Decimos que* $U_0, \ldots, U_n$ *es una* cadena periódica de discos *si existen* $k_0, \ldots, k_n$ *enteros positivos tales que* $f^{k_i}(U_i) \cap U_{i+1} \neq \emptyset,\ i = 0, \ldots, n-1$ *y* $f^{k_n}(U_n) \cap U_0 \neq \emptyset$*.*

Observar que tenemos el siguiente resultado:

Lemma 8. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un homeo con una cadena periódica de discos. Entonces existe* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(f)$ *y* g *tiene un punto periódico. Además, si* f *preserva orientación,* g *también preserva orientación.*

La demostración es un ejercicio para el lector:

Ejercicio 16. *Demostrar el Lema 8.*

Como consecuencia, obtenemos este resultado a partir del Teorema de traslación de Brouwer 3:

Corolario 2. (Cadena periódica implica punto fijo). *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *un homeomorfismo que presereva orientación y que tiene una cadena periódica de discos. Entonces* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$*.*

Capítulo 5. Arcos de traslación.

En esta sección $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un homeo.

Para lo que sigue es clave el siguiente concepto:

Definición 11. (Arco de traslación). *Decimos que* $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *es un* arco de traslación *si* α *es un homeo sobre su imagen,* $\alpha(0) = x, \alpha(1) = f(x)$ *y* $\alpha \cap f(\alpha) \subset \{x, f(x)\}$.

En la definición anterior identificamos como es usual el arco α con su imagen $\alpha([0,1])$.

Lemma 9. *Si* f *no tiene puntos fijos, por todo punto pasa un arco de traslación.*

Proof. Consideramos el punto z, su imagen $f(z)$ y comenzamos a inflar una bola alrededor de z hasta que ésta se toque con su imagen en un punto x. Ahora basta tomar un arco que pase por z, y una $f^{-1}(x)$ con x y esté totalmente inlcuido en la bola de z excepto por las extremidades .

□

Utilizando arcos de traslación, es fácil probar que si f tiene un punto periódico de cualquier período, se puede modificar f sin alterar el conjunto de puntos fijos, para lograr que tenga un punto periódico de período exactamente 2.

Lemma 10. *Sea* α *un arco de traslación y supongamos que* $f^2(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$. *Entonces existe* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(f)$ *y* g *tiene un punto periódico de período* 2. *Además, si* f *preserva orientación,* g *también.*

Proof. Podemos suponer que f no tiene punto periódico de período 2 porque sino no hay nada que probar. Por lo tanto, podemos asegurar que $f(\alpha) \cap \alpha = \{f(x)\}$. Tomemos $f(z) \in f^2(\alpha) \cap \alpha$ y observemos que $f(z) \neq f(x)$. Podemos encontrar discos disjuntos U y V tales que:

(1) U y V son libres para f
(2) $f(z) \in U$ y $x \in U$
(3) $f(x) \in V$ y $z \in V$

Ahora podemos tomar $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeos que preservan orientación soportados en U y V respectivamente tales que:

(1) $\varphi(f(z)) = x$
(2) $\psi(f(x)) = z$

Para terminar, basta observar que $g = \psi\varphi f$ cumple lo pedido. De hecho, x es períodico de período 2 para g.

□

Lemma 11. *Sea α un arco de traslación y supongamos que $f^n(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$, $n > 2$. Entonces existe $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\operatorname{Fix}(g) = \operatorname{Fix}(f)$ y g tiene un punto periódico de período $n - 1$. Además, si f preserva orientación, g también.*

Proof. Sea $n > 2$ el mínimo que verifica $f^n(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$. Observar que podemos asegurar que $f(\alpha) \cap \alpha = \{f(x)\}$. Tomemos $z \in f^n(\alpha) \cap \alpha$ y observemos que podemos asumir $f(z) \neq f(x)$. Podemos encontrar discos disjuntos U y V tales que:

(1) U y V son libres para f
(2) $f(z) \in U$ y $f^2 x \in U$
(3) $f^n(x) \in V$ y $z \in V$

Ahora podemos tomar $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeos que preservan orientación soportados en U y V respectivamente tales que:

(1) $\varphi(f(z)) = f^2(x)$
(2) $\psi(f^n(x)) = z$

Para terminar, basta observar que $g = \psi\varphi f$ cumple lo pedido. De hecho, z es períodico de período $n - 1$ para g.

□

Ahora estamos listos para demostrar el Teorema de traslación de Brouwer 3:

Proof. Basta suponer que f tiene un punto periódico x de período $n > 2$, porque sino ya se deduce la tesis. Podemos además asumir que existe α un arco de traslación que pasa por x por el Lema 9. Por lo tanto obviamente tenemos $f^n(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$. Utilizamos ahora el Lema 11 para obtener $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeo que preserva orientación tal que $\operatorname{Fix}(g) = \operatorname{Fix}(f)$ y g tiene un punto periódico de período $n - 1$. Aplicamos el mismo razonamiento sucesivamente, obtenemos $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ homeo que preserva orientación tal que $\operatorname{Fix}(h) = \operatorname{Fix}(f)$ y h tiene un punto periódico de período 2. Terminamos ahora utilizando el Teorema 2.

□

Capítulo 6. Teorema de Cartwright-Littlewood.

Como vimos en los capítulos anteriores, el Teorema de traslación de Brouwer 3 establece que un homeo del plano f que preserva orientación y tiene un punto no errante, tiene también un punto fijo. En este capítulo veremos que si además f deja un continuo K invariante que no separa el plano, entonces el punto fijo puede encontrarse en ese mismo continuo K.

Definición 12. *Un* continuo *es un espacio métrico compacto y conexo. Decimos que un continuo* $K \subset \mathbb{R}^2$ no separa *si* $\mathbb{R}^2 \backslash K$ *es conexo.*

El siguiente es un problema abierto de larga data en topología:

Plane Fixed Point Problem: "Una función continua que lleva un continuo plano que no separa en si mismo, tiene necesariamente un punto fijo?"

Un caso particular de este problema es el Teorema de Brouwer clásico 1, ya que el disco $\overline{\mathbb{D}}$ es claramente un continuo que no separa. La dificultad del problema general radica en la extrema complejidad posible del continuo plano (googlear, por ejemplo: pseudo-arco, continuos indescomponibles, continuo de Knaster, lagos de Wada).

Borsuk probó que la respuesta es afirmativa si el continuo es localmente conexo [B]. Cartwright y Littlewood probaron que la respuesta es afirmativa si la función que lleva el continuo en si mismo puede extenderse a un homeomorfismo del plano que preserva orientación [C-L]. Casi 30 años después Bell extendió este resultado a la clase de todos los homeomorfismos del plano [Be].

El resultado de Cartwright y Littlewood nos lleva naturalmente a nuestro tema de estudio: $\mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 4 (Cartwright-Littlewood). *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ *y* $K \subset \mathbb{R}^2$ *un continuo que no separa tal que* $f(K) \subset K$*. Entonces,* $\mathrm{Fix}(f) \cap K \neq \emptyset$*.*

La demostración que daremos es de Morton Brown que la publicó en un paper excelente de una sola página [Bro77].

Proof. Supongamos $\mathrm{Fix}(f) \cap K = \emptyset$. Como $f(K) \subset K$, el Teorema de Brouwer 3 implica que $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ (ver Ejercicio 15). Podemos entones restringir la dinámica a la componente conexa U de $\mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{Fix}(f)$ que contiene a K.

Sea $p : \tilde{U} \to U$ la proyección de cubrimiento universal de U. Observar que $\tilde{U}$ es (topológicamente) un plano. Además, $f|_U$ se levanta a $F : \tilde{U} \to \tilde{U}$. Como K no separa el plano, tenemos que $K \subset D$, donde D es un disco topológico contenido en U. Esto implica que cada una de las componentes conexas de $p^{-1}(K)$ es homeomorfa a K (porque D es simplemente conexo y $p|_{p^{-1}(D)} : p^{-1}(D) \to D$ es un cubrimiento).

Observar además que dada $\tilde{K}$ una componente conexa de de $p^{-1}(K)$, podemos elegir el levantado F tal que $F(\tilde{K}) \subset \tilde{K}$. Observar además que como $U \subset \mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{Fix}(f)$ y $F : \tilde{U} \to \tilde{U}$, $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$. Pero como F preserva $\tilde{K}$, que es una copia homeomorfa de K y por lo tanto compacta, de nuevo por 3 tenemos que F tiene un punto fijo, lo cual es una contradicción.

$\square$

Terminamos esta sección haciendo algunas puntualizaciones acerca de la demostración anterior. El lector familiarizado con la topología algebraica puede saltearse este párrafo. Enumeramos una lista de "facts" que fueron necesarios para el argumento de la prueba de Brown:

(1) Superficies conexas sin borde simplemente conexas hay únicamente dos (a menos de homeomorfismo, claro): la esfera y el plano. Se distinguen entre ellas al ser una compacta y la otra no.

(2) Cualquier superficie tiene cubrimiento universal (es decir, un espacio de cubrimiento simplemente conexo).

(3) El cubrimiento universal (conexo) de una superficie es único a menos de homeomorfismo.

(4) Cualquier función continua definida en la superficie se levanta al cubrimiento universal (la prueba es exactamente igual a la del Lema 3 que hicimos en el caso del anillo; observar que lo único que utilizamos es que el espacio de cubrimiento fuera simplemente conexo).

Todos los items excepto el primero están demostrados con total generalidad en el libro de Hatcher [H]. El primer item es un resultado clásico (antes del 1900) y existen muchas y variopintas demostraciones a gusto del consumidor. No pongo una referencia aquí para que el lector interesado haga su propia búsqueda y elija la que más le conforme.

Capítulo 7. El último teorema geométrico de Poincaré.

En 1912 Poincaré conjeturó (y probó en algunos casos especiales) la existencia de puntos fijos para un homeo que preserva área del anillo cerrado donde los bordes del anillo "giran en sentidos opuestos". Esta condición de rotación en los bordes para lados opuestos (que haremos precisa) se conoce como la *condición de twist.* Un poco después en 1913 Birkhoff publicó una prueba completa de la existencia de un punto fijo y por lo tanto el teorema se conoce como el Teorema de Poincaré-Brikhoff.

Damos primero el enunciado clásico de este teorema, pero estudiaremos una versión topológica más fuerte.

Teorema 5. (Teorema de Poincaré-Birkhoff). *Sea* $f : S^1 \times [0,1] \to S^1 \times [0,1]$ *un homeomorfismo que preserva orientación, área y cada componente del borde. Supongamos además que existe un levantamiento* $F : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R} \times [0,1]$ *de* f *tal que:*

(1) $(F(x))_1 > (x)_1$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \times \{1\}$
(2) $(F(x))_1 < (x)_1$ *para todo* $x \in \mathbb{R} \times \{0\}$,

donde $()_1$ *representa la proyección sobre el primer factor.*

Entonces, $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

La generalización que estudiaremos, es un Teorema de Franks [F]. La primer observación sorprendente es que es un teorema para el anillo abierto $A = S^1 \times (0,1)$ (a esta altura el lector debe tener una idea de por qué siempre es más fácil encontrar puntos fijos en espacios compactos). Para el anillo abierto no es obvio cómo generalizar la condición de twist, pero como dice Franks en el propio paper, la manera más natural desde el punto de vista de la prueba es con la noción de discos regresando para adelante y para atrás para un levantado $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ de f al cubrimiento universal $\tilde{A} : \mathbb{R} \times (0,1)$. Observe el lector que $\tilde{A}$ es topológicamente un plano y podemos encontrar puntos fijos del levantado F utilizando el Teorema de Brouwer y sus consecuencias.

Definición 13. (Discos regresando para adelante). *Sea* $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ *un levantado de* $f : A \to A$*. Un disco* $U \subset \tilde{A}$ regresa para adelante *si:*

(1) $F(U) \cap U \neq \emptyset$
(2) *existen* $n, k > 0$ *tales que* $F^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$.

Aquí $U + k$ *denota el conjunto* $T^k(U)$*, donde* $T : \tilde{A} \to \tilde{A}$, $T(x,y) = (x+1, y)$.

Un disco que regresa para atrás *se define de la misma forma pero con* $k < 0$.

Ejercicio 17. *Demostrar que en las hipótesis del Teorema 5, cualquier levantado* F *de la restricción de* f *al anillo abierto* $A = S^1 \times (0,1)$ *tiene un disco que regresa* *para adelante y también un disco que regresa para atrás.*

Notación: Si X es una superficie orientable, $\mathrm{Homeo}_0^+(X)$ denota el conjunto de homeomorfismos de X que preservan orientación y son homotópicos a la identidad.

Teorema 6. (Poincaré-Birkhoff-Franks). *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}_0^+(A)$ *tal que:*

(1) $\Omega(f) = A$
(2) *existe* $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ *que tiene un disco que regresa para adelante y también un disco que regresa para atrás.*

Entonces $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Para la prueba utilizaremos una serie de lemas.

Lemma 12. *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}^+(A)$ *tal que* $\Omega(f) = A$ *y* $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ *un levantado de* f*. Si* $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$*, todo* $x \in A$ *pertenece a un disco tal que cualquiera de sus levantados es un disco que regresa para adelante o a un disco que regresa para atrás.*

Proof. Si $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, todo punto pertenece a un disco libre $U \subset A$. Esto implica que cualquier levantado $\tilde{U}$ de U es libre para F. Además, como $\Omega(f) = A$ existe $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Si tomamos $\tilde{U}$ un levantado de U, sabemos entonces $F(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$ y además existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F^n(\tilde{U}) \cap (\tilde{U} + k) \neq \emptyset$. Ahora, el Teorema de Brouwer implica $k \neq 0$, por lo tanto $\tilde{U}$ es un disco que regresa o bien para adelante o bien para atrás.

□

Observar que el lema anterior no utiliza que f es homotópico a la identidad. Explicaremos cómo usaremos esa hipótesis en lo que sigue. Observar que si $f : A \to A$ es homotópica a la identidad, cualquier curva cerrada es libremente homotópica a su imagen por f. Esto puede traducirse diciendo que cualquier levantado $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ verifica $F(x+k) = F(x)+k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, o lo que es lo mismo, decir que el grado de f es 1 (ver Ejercicio 12). Pero también otra forma de verlo es que F *conmuta con las transformaciones de cubrimiento* (en este caso, las traslaciones horizontales enteras). Es decir, si definimos $T : \tilde{A} \to \tilde{A}$, $T(x) = x + 1$, tenemos $FT^k = T^k F$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, y también $T^k p = p$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, donde $p : \tilde{A} \to A$ es la proyección de cubrimiento. More on this later.

Lemma 13. *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}_0^+(A)$ *y* $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ *un levantado de* f*. Si* $U \subset A$ *es un disco que regresa para adelante y también para atrás, entonces* $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Proof. La idea es obtener una cadena periódica de discos libres para F y aplicar el Lema 8. Sabemos por hipótesis que existen enteros $k_1, k_2 > 0$, $m, n > 1$ tales que $F^n(U) \cap (U + k_1) \neq \emptyset$ y que $F^m(U) \cap (U - k_2) \neq \emptyset$. Observar que como $F(x+k) = F(x) + k$, tenemos que para todo $i = 0, \ldots, k_2 - 1$, $F^n(U + ik_1) \cap U + (i+1)k_1 \neq \emptyset$.

De la misma forma, para todo $i = 1, \dots, k_1$, $F^m(U + ik_1k_2) \cap (U + k_2(k_1 - i))$. Observar por lo tanto que $U + ik_1, i = 0, \dots, k_2, U + k_2(k_1 - j), j = 1, \dots, k_1$ es una cadena periódica de discos para F.

□

Ya estamos en codiciones de probar el Teorema 6:

Proof. Consideramos los conjuntos B^+, el conjunto de punto de $\tilde{A}$ que están en un disco que regresa para adelante, y B^-, el conjunto de punto de $\tilde{A}$ que están en un disco que regresa para atrás. Obviamente B^+ y B^- son conjuntos abiertos. Son ambos no vacíos por hipótesis del teorema, y usando el Lema 12 tenemos que $B^+ \cup B^- = \tilde{A}$. Como $\tilde{A}$ es conexo, tenemos necesariamente que $B^+ \cap B^- \neq \emptyset$. Utilizamos ahora el Lema 13 y ya probamos la tesis.

□

Capítulo 8. Teoría de rotación.

El número de rotación es una idea que también se debe a Poincaré. Surge naturalmente estudiando homeomorfismos del círculo cuando uno quiere describir asintóticamente como "giran" las órbitas alrededor del círculo.

Teorema 7. (Poincaré). *Sean $f \in \text{Homeo}^+(S^1)$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe y es independiente de x*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

.

La demostración se puede encontrar en las notas de Martín Sambarino de Introducción a los sistemas dinámicos [S].[5]

Definición 14. (Número de rotación). *Sean $f \in \text{Homeo}^+(S^1)$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Definimos el número de rotación de f como*

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \mod 1$$

.

Ejercicio 18. *Demostrar que el número de rotación está bien definido, es decir, no depende de la elección del levantamiento F.*

Esta idea se puede generalizar automáticamente a homeomorfismos del anillo homotópicos a la identidad, ya que también hay un "círculo" alrededor del cual el giro asintótico de las órbitas se puede medir: el círculo que genera la homotopía del anillo. Sin embargo, los problemas de existencia e independencia del punto se vuelven no triviales. De todas maneras se puede dar la definición análoga:

Definición 15. (Número de rotación para $f \in \text{Homeo}_0(A)$). *Sean $f \in \text{Homeo}_0(A)$, $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ un levantamiento de f y $x \in A$. Definimos el número de rotación de x y f si existe el número*

$$\rho(x, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(x) - x)_1}{n} \mod 1$$

.

Ejercicio 19. *Demostrar que si $x \in \text{Per}(f)$, entonces existe $\rho(x, f)$, y calcularlo.*

[5] Estas notas son una excelente referencia de introducción a los sistemas dinámicos en general. Si algún concepto que usamos no lo hemos desarrollado bien aquí, seguramente lo encontrarán allí.

Teorema 8. (Franks). *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}_0^+(A)$ *tal que* $\Omega(f) = A$*. Supongamos que existen* $z_0, z_1 \in A$ *puntos positivamente recurrentes tales que* $\rho(f, z_0) < 0 < \rho(f, z_1)$*. Entonces* $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Proof. La idea es utilizar el Teorema 6. Observar que la hipótesis implica que podemos encontrar $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ un levantamiento de f y $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$ levantado de z_0 y z_1 respectivamente tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(\tilde{z}_0) - \tilde{z}_0)_1}{n} < 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{(F^n(\tilde{z}_1) - \tilde{z}_1)_1}{n}.$$

Además, como z_0 y z_1 son positivamente recurrentes, podemos tomar $(n_k)_{k\to\infty}$ y $(m_j)_{j\to\infty}$ sucesiones de enteros positivos tales que $f^{n_k}(z_0) \to_k z_0$ y $f^{m_j}(z_1) \to_j z_1$. Observar entonces que si k y j son suficientemente grandes, existen k_0 y k_1 enteros positivos, U y V entornos disjuntos de z_0 y z_1 respectivamente tales que:

(1) U y V son libres para f
(2) existen únicos $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ levantados de U y V que contienen a $\tilde{z}_0$ y $\tilde{z}_1$ respectivamente.
(3) $F^{n_k}(\tilde{U}) \cap (\tilde{U} - k_0) \neq \emptyset$
(4) $F^{m_j}(\tilde{V}) \cap (\tilde{V} + k_1) \neq \emptyset$

Observar ahora que estamos en las hipótesis del Teorema 6 lo que termina la demostración.

□

Aplicando el teorema anterior a los iterados f^q y los levantamientos $F^q T^{-p}$ de f^q obtenemos el siguiente:

Corolario 3. (Dos velocidades de rotación diferentes). *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}_0^+(A)$ *tal que* $\Omega(f) = A$*. Supongamos que existen* $z_0, z_1 \in A$ *puntos positivamente recurrentes tales que* $\rho(f, z_0) < \rho(f, z_1)$*. Entonces para todo racional* $p/q \in (\rho(f, z_0), \rho(f, z_1))$ *escrito en forma irreducible, existe una órbita periódica de* f *de período* q *y número de rotación* p/q*.*

Deducimos que para $f \in \mathrm{Homeo}_0^+(A)$ podemos inferir la existencia de infinitas órbitas periódicas si tenemos dos velocidades de rotación diferentes. Dicho de otra manera, la única forma que tiene f de no tener abundancia de puntos periódicos es que todo el mundo gire con la misma velocidad alrededor del anillo.

Capítulo 9. El teorema de Brouwer foliado.

El Teorema de Brouwer 3 tiene una versión más moderna y refinada que estudiaremos en este capítulo. No daremos la demostración, sino que nos centraremos en entender las ideas y en las aplicaciones que tiene al estudio de la dinámica de superficies. En particular, a la existencia y abundancia de órbitas periódicas para ciertas clases de homeomorfismos de superficies.

Definición 16. (Foliación). *Una* foliación topológica orientada $\mathcal{F}$ *en una superficie orientada* S *es una partición de* S *en subvariedades de dimensión* 1*, llamadas* hojas *de la foliación, que verifica la siguiente propiedad:*

para todo $x \in S$ *existe un entorno* U *de* x *y un homeomorfismo* $h : U \to (0,1)^2$ *preservando orientación tal que* h *mapea* $\mathcal{F}$ *en la partición por rectas verticales de* $(0,1)^2$ *orientada según la coordenada* y *creciente.*

Notación: Si $x \in S$ y $\mathcal{F}$ es una foliación en S, la hoja por x la denotamos ϕ_x.

Definición 17. *Decimos que una curva* $\gamma : [0,1] \to S$ *es* positivamente transversal *a una foliación* $\mathcal{F}$ *en* S *si para todo* $t_0 \in I$ *existe un entorno* U *de* $\gamma(t_0)$ *y* $h : U \to (0,1)^2$ *preservando orientación tal que* h *mapea* $\mathcal{F}$ *en la partición por rectas verticales de* $(0,1)^2$ *orientada según la coordenada* y *creciente, y tal que* $p_1(\gamma(t))$ *es estrictamente creciente (*p_1 *es la proyección sobre la coordenada* x*).*

Definición 18. *Un* encaje topológico de $\mathbb{R}$ *en una superficie* S *es una función* $\Gamma : \mathbb{R} \to S$ *que es un homeomorfismo sobre su imagen, considerada con la topología inducida por* S*.*

Un encaje $\Gamma : \mathbb{R} \to S$ *es* propio *si* $\Gamma^{-1}(K)$ *es compacto para todo compacto* $K \subset S$*.*

Una línea *en una superficie* S *es la clase de equivalencia por reparametrizaciones que preservan orientación de un encaje topológico propio de* $\mathbb{R}$*. Como es usual muchas veces identificamos la línea* Γ *con su imagen* $\Gamma(\mathbb{R})$*.*

Observar que una línea queda determinada por su imagen y la orientación. Además, si Γ es una línea del plano, el Teorema de Schoenflies garantiza que existe $h \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ tal que $h \circ \Gamma(t) = (0,t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Observar que $h^{-1}([0,+\infty) \times \mathbb{R})$ es independiente de h, y decimos que es *la derecha de* Γ, denotado $D(\Gamma)$. De la misma manera definimos la izquierda $I(\Gamma)$ como $h^{-1}((-\infty,0]) \times \mathbb{R})$.

Definición 19. (Línea de Brouwer). *Si* $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$*, decimos que* Γ *es una* línea de Brouwer de f *si es una línea y verifica:*

(1) $f(\Gamma) \subset D(\Gamma) \backslash \Gamma$
(2) $f^{-1}(\Gamma) \subset I(\Gamma) \backslash \Gamma$

El siguiente teorema(zo) se debe a LeCalvez [L]:

Teorema 9. (Teorema de Brouwer foliado). *Sea $f \in \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ tal que $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$. Entonces, existe una foliación topológica orientada $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que cada hoja es una línea de Brouwer de f.*

Ejemplo 11. *Sean X un campo sin singularidades en $\mathbb{R}^2$, el campo $Y = iX$, y f el tiempo 1 del flujo de X. Entonces, las líneas de flujo del campo Y constituyen una foliación por línea de Brouwer de f.*

Lemma 14. (La foliación es positivamente transversal a la dinámica). *Por todo $z_0 \in \mathbb{R}^2$ pasa un arco positivamente transversal a $\mathcal{F}$ desde z_0 a $f(z_0)$.*

Proof. Sea $W = \{z \in \mathbb{R}^2 :$ existe un arco positivamente transversal a $\mathcal{F}$ de z_0 a $z\}$. Observar que W es abierto y que ∂W está compuesto por ϕ_{z_0} y eventualmente otras hojas ϕ tales que $\overline{W} \subset D(\phi)$. Observar ahora que $f(z_0) \in I(\phi)$ es absurdo porque $I(\phi)$ es invariante por f^{-1} y $z_0 = f^{-1}(f(z_0)) \in D(\phi)$.

□

Observación 2. *La foliación $\mathcal{F}$ en general no es invariante por f. Es decir no siempre se cumple $\phi_{f(z)} = f(\phi_z)$.*

Queremos aplicar el Teorema 9 a la dinámica de superficies. Si consideramos el cubrimiento universal $p : \tilde{S} \to S$ de la superficie S, y $S \neq S^2$, entonces $\tilde{S}$ es topológicamente un plano. Si además un levantamiento $F : \tilde{S} \to \tilde{S}$ no tiene puntos fijos y preserva orientación, podemos aplicar el Teorema 9 y obtener una foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\tilde{S}$ formada por línea de Brouwer de F. Sin embargo, para poder proyectar esta foliación a la superficie, necesitamos que $\tilde{\mathcal{F}}$ sea invariante por el grupo de transformaciones de cubrimiento de $\tilde{S}$. Es decir, $\phi_{g(z)} = g(\phi_z)$ para todo $z \in \tilde{S}$ y para todo $g \in G$, donde G es el grupo de transformaciones del cubrimiento universal.

Si $f \in \mathrm{Homeo}_0(S)$, podemos obtener un levantamiento $F : \tilde{S} \to \tilde{S}$ de la manera siguiente. Sea $(f_t)_{t\in[0,1]}$ una isotopía tal que $f_0 = \mathrm{Id},\ f_1 = f$. Sabemos que existe una única isotopía $F_t : \tilde{S} \to \tilde{S}$ tal que $F_0 = \mathrm{Id}$. Definimos $F = F_1$, y a este levantamiento lo llamamos el *levantamiento canónico* de f.

Lemma 15. (El levantamiento canónico conmuta con las transformaciones de cubrimiento). *Sea $f \in \mathrm{Homeo}_0(S)$ y $F : \tilde{S} \to \tilde{S}$ el levantamiento canónico. Entonces $Fg = gF$ para todo $g \in G$, donde G es el grupo de transformaciones del cubrimiento universal.*

Proof. Observar que para todo $g \in G$, tenemos que gF_tg^{-1} es una isotopía de la identidad a gFg^{-1}, donde $F_t : \tilde{S} \to \tilde{S}$ es tal que $pF_t = f_tp$ para todo $t \in [0,1]$ y $F_0 = \mathrm{Id}$. Además gF_tg^{-1} es un levantamiento de f_t: $pgF_tg^{-1} = pF_tg^{-1} = f_tpg^{-1} = f_tp$. Por lo tanto, por unicidad tenemos $gF_tg^{-1} = F_t$, y en particular $gFg^{-1} = F$.

□

Definición 20. *Decimos que* $G < \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ *tiene* la propiedad de cubrimiento *si para todo* $x \in \mathbb{R}^2$ *existe* U *entorno de* x *tal que la familia* $\{g(U) : g \in G\}$ *es dos a dos disjunta. En otras palabras,* $g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset$ *implica* $g_1 = g_2$*.*

Por lo tanto, para $f \in \text{Homeo}_0^+(S)$ podemos obtener una foliación $\mathcal{F}$ en S utilizando el siguiente resultado ([L]):

Teorema 10. (Teorema de Brouwer foliado equivariante). *Sea* $G < \text{Homeo}^+(\mathbb{R}^2)$ *con la propiedad de cubrimiento. Sea* f *un homeo de Brouwer tal que* $fg = gf$ *para todo* $g \in G$*. Entonces existe* $\mathcal{F}$ *foliación topológica orientada en* $\mathbb{R}^2$*, invariante por la acción de* G*, donde cada hoja es una línea de Brouwer de* f*.*

Si $f \in \text{Homeo}_0(S)$ y $z \in S$, definimos la curva γ_z como $t \mapsto f_t(z), t \in [0,1]$. Si $z \in \text{Fix}(f)$, γ_z es un loop en la superficie S. Decimos que el punto fijo z es *contractible* si el loop γ_z es homotópicamente trivial en S. Observar que $z \in \text{Fix}(f)$ es contractible sii $F(\tilde{z}) = \tilde{z}$ para todo $\tilde{z} \in p^{-1}(z)$.

Como consecuencia de lo discutido anteriormente se tiene:

Teorema 11. (Foliación transversa a la isotopía en una superficie S). *Sea* $f \in \text{Homeo}_+^0(S)$ *sin puntos fijos contractibles. Entonces existe* $\mathcal{F}$ *foliación topológica orientada en* S *y por todo punto* $z \in S$ *un arco* γ *desde* z *a* $f(z)$ *positivamente transversal a* $\mathcal{F}$ *que es homotópico a extremos fijos en* S *al arco* γ_z*.*

En la situación del teorema anterior, decimos que la foliación $\mathcal{F}$ y la isotopía $(f_t)_{t\in[0,1]}$ son *transversas.*

Capítulo 10. Propiedades de la foliación transversa.

En este capítulo suponemos que $f \in \mathrm{Homeo}^0_+(S)$ no tiene puntos fijos contractibles y que $\mathcal{F}$ es una foliación transversa a la isotopía dada por el Teorema 11.

Lemma 16. *Para todo $z \in S$ existen entornos $U(z)$ de z y $V(f(z))$ de $f(z)$ tales que todo punto $z' \in U$ puede ser conectado con todo punto $z'' \in V$ por un arco positivamente transversal a $\mathcal{F}$.*

Proof. Por el Teorema 11 sabemos que por todo punto $z \in S$ un arco γ desde z a $f(z)$ positivamente transversal a $\mathcal{F}$ que es homotópico a extremos fijos en S al arco γ_z. Consideramos U' y V' entornos de z y $f(z)$ respectivamente, y homeomorfismos preservando orientación $g : U' \to (0,1)^2$, $h : U' \to (0,1)^2$ tales que g y h mapean $\mathcal{F}$ en la foliación por rectas verticales orientada hacia arriba y tales que $p_1(\gamma(t))$ es estrictamente creciente en U' y V'. Consideramos $s = \sup\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in U'\}$ y $i = \inf\{t \in [0,1] : \gamma(t) \in V'\}$. Ahora tomamos $U \subset U', V \subset V'$ tales que:

(1) $x \in p_1(U)$, entonces $x < s$
(2) $x \in p_1(V)$, entonces $x > i$.

Observar ahora que si $z' \in U$, existe un arco γ_1 positivamente transversal a $\mathcal{F}$ desde z' a $\gamma(s)$, y de la misma forma, si $z'' \in V$ existe un arco γ_2 positivamente transversal a $\mathcal{F}$ desde $\gamma(i)$ a z''. Concatenando $\gamma_1, \gamma([s,i])$ y γ_2 obtenemos un arco positivamente transversal a $\mathcal{F}$ de z' a z''.

□

Lemma 17. (Los puntos no errantes pertenecen a loops positivamente transversales a $\mathcal{F}$). *Sea z un punto no errante de f. Entonces existe un loop Γ basado en z y positivamente transversal a $\mathcal{F}$.*

Proof. Por el lema anterior, podemos conseguir entornos $U(f^{-1}(z))$ y $V(f(z))$ tales que para todo $z'' \in U$ existe un arco positivamente transversal a $\mathcal{F}$ desde z'' a z y para todo $z' \in V$ existe un arco positivamente transversal a $\mathcal{F}$ desde z a z'.

Observar que $W = f^{-1}(V) \cap f(U)$ es un entorno de z y que como z es no errante, existe $n > 0$ tal que $f^n(W) \cap W \neq \emptyset$. Sean $y \in W$ tal que $f^n(y) \in W$. Entonces $z' = f(y) \in V(f(z))$ y $z'' = f^{n-1}(y) \in U(f^{-1}(z))$. Además, existe un arco γ_1 positivamente transversal a $\mathcal{F}$ de z a z' y un arco γ_2 positivamente transversal a $\mathcal{F}$ de z'' a z. Concatenando γ_1 con $\gamma_{f^i(z')}$ desde $i = 0$ hasta $n-2$ y finalmente con γ_2, obtenemos un loop positivamente transversal a $\mathcal{F}$ basado en z.

□

El siguiente lema se deja como ejercicio para el lector:

Ejercicio 20. (Curvas en posición general). *Sean Γ'_0 y Γ'_1 dos curvas positivamente transversales a $\mathcal{F}$. Entonces, existen curvas Γ_0 y Γ_1 positivamente transversales a $\mathcal{F}$ tales que:*

(1) Γ_0 *es homotópica a extremos fijos en* S *a* Γ_0',
(2) Γ_1 *es homotópica a extremos fijos en* S *a* Γ_1',
(3) Γ_0 *y* Γ_1 *no tienen puntos dobles ni de orden superior,*
(4) Γ_0 *y* Γ_1 *tienen un número finito de puntos dobles y las autointersecciones son transversas,*
(5) Γ_0 *y* Γ_1 *tienen un número finito de intersecciones, las intersecciones son transversas y a lo más dobles.*

Capítulo 11. Clases de homología en anillos y función de índice.

Consideramos el anillo abierto $A = S^1 \times (0,1)$ y el cubrimiento universal $(\tilde{A}, p)$, donde $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0,1)$ y $p : \tilde{A} \to A, p(x,y) = (e^{2\pi i x}, y)$. Si $\gamma : [0,1] \to A$ es una *curva cerrada*, o *loop*, es decir $\gamma(0) = \gamma(1)$, entonces cualquier levantamiento $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{A}$ de γ verifica $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in \mathbb{Z}$, y además este número entero no depende del levantamiento elegido $\tilde{\gamma}$. Es decir, para todo loop $\gamma : [0,1] \to A$ está bien definido $k \in \mathbb{Z}$ que llamamos la *clase de homología de* γ y denotamos $[\gamma]$.

Además, el conjunto:

$$\{[\gamma] : \gamma : [0,1] \to A \text{ es un loop}\}$$

tiene estructura de grupo con neutro $0 = $ [cualquier loop constante], la suma $[\gamma_1] + [\gamma_2] = k_1 + k_2$ e inverso $-[\gamma] = [\gamma(1-t)]$. Denotamos además $n[\gamma] = [\gamma] + [\gamma] + \ldots + [\gamma]$ donde sumamos n veces si $n > 0$ y si $n < 0$, $n[\gamma] = -(-n[\gamma])$. Dadas ahora finitas curvas $\gamma_i : [0,1] \to A$ y enteros $a_i, i = 1 \ldots n$, podemos escribir la suma formal $\sum_{i=1}^n a_i[\gamma_i]$ y definir el *primer grupo de homología* de A con coeficientes en $\mathbb{Z}$ como el conjunto de estas sumas formales:

$$H_1(A, \mathbb{Z}) = \{\sum_{i=1}^n a_i[\gamma_i] : a_i \in \mathbb{Z}, \gamma_i \text{ loops}\}.$$

La estructura de grupo $H_1(A, \mathbb{Z})$ viene dada por el mismo neutro (la clase de los loops constantes), suma la suma formal, y el inverso pasa a la suma formal término a término.

Observar que si $h : A \to X$ es un homeomorfismo, entonces h induce un isomorfismo entre $H_1(A, \mathbb{Z})$ y $H_1(X, \mathbb{Z})$. De esta manera tiene sentido $H_1(X, \mathbb{Z})$ para cualquier anillo topológico $X = h(A)$, y además $[h(\gamma)]$ genera $H_1(X, \mathbb{Z})$, donde $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, \frac{1}{2}), t \in [0,1]$.

Consideramos el anillo abierto $A = S^1 \times (0,1)$, $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, \frac{1}{2}), t \in [0,1]$ y un homeomorfismo $h : A \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ tal que $h(\gamma(t)) = e^{2\pi i t}, t \in [0,1]$. Para cada punto $z \in \mathbb{C}$, definimos el anillo $A_z = \mathbb{C} \backslash \{z\}$ y un homeomorfismo $h_z : A_0 \to A_z$ preservando la orientación (en ambos casos se considera la orientación inducida por la orientación usual de $\mathbb{C}$). Si $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ es un loop, y $z \notin \Gamma([0,1])$, definimos el *índice de* Γ *alrededor de* z y denotamos $i(\Gamma, z)$ al entero $[\Gamma] \in H_1(A_z, \mathbb{Z})$. Observar que $i(\Gamma, 0) = [\Gamma] \in H_1(\mathbb{C} \backslash (0), \mathbb{Z})$ y que podemos extender la definición del índice linealmente a cualquier suma formal $\sum_{i=1}^n a_i \gamma_i, a_i \in \mathbb{Z}, \gamma_i$ loops.

Entonces si $\Gamma = \sum_{i=1}^n a_i \gamma_i$ es una multicurva en A_0, está definido $i(\Gamma, z)$ para cualquier $z \in A_0 \backslash \{\cup_{i=1}^n \Gamma([0,1])\}$. Para acortar la notación, definimos $\Lambda : A_0 \backslash \{\cup_{i=1}^n \Gamma([0,1])\} \to \mathbb{Z}$, $\Lambda(z) = i(\Gamma, z)$. Observar que Λ es localmente constante, vale 0 en la componente no acotada de $A_0 \backslash \{\cup_{i=1}^n \Gamma([0,1])\}$ y que si $[\Gamma] = 0 \in H_1(A_0, \mathbb{Z})$, entonces también vale 0 en la otra componente de $A_0 \backslash \{\cup_{i=1}^n \Gamma([0,1])\}$ que no tiene clausura compacta (en A_0). Obviamente $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$ depende de Γ, pero cuando a esté claro a que curva nos referimos escribimos solo Λ.

Capítulo 12. Aplicaciones de la existencia de foliaciones transversas a la dinámica de homeomorfismos de superficies.

Comenzamos dando una prueba alternativa del Teorema 8:

Teorema 12. (Franks). *Sea $f \in \mathrm{Homeo}_0^+(A)$ tal que $\Omega(f) = A$. Supongamos que existen $z_0, z_1 \in A$ puntos positivamente recurrentes tales que $\rho(f, z_0) < 0 < \rho(f, z_1)$. Entonces $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$.*

Proof. Consideramos la isotopía $(f_t)_{t\in[0,1]}$ de la identidad a f y su levantamiento $(F_t)_{t\in[0,1]}$ al cubrimiento universal comenzando en la identidad. Podemos suponer que no hay puntos fijos contractibles, y por lo tanto conseguir $\mathcal{F}$ en A positivamente transversal a $(f_t)_{t\in[0,1]}$. Sabemos que existen lazos Γ_0, Γ_1 positivamente transversales a $\mathcal{F}$ y enteros $n_0 > 0, n_1 > 0$ tales que $[\Gamma_0] \neq 0 \in H_1(A, \mathbb{Z})$, $[\Gamma_0] \neq 0 \in H_1(A, \mathbb{Z})$, $n_0[\Gamma_0] + n_1[\Gamma_1] = 0$. Existe ahora una función $\Lambda : A\backslash\{\Gamma_0 \cup \Gamma_1\} \to \mathbb{Z}$ que vale 0 en las dos componentes que no tienen clausura compacta en A. Además, podemos suponer que Γ_0 y Γ_1 están en posición general (ver Ejercicio 20). Como la función Λ no es constante, o bien el máximo o bien el mínimo de Λ deben ser no nulos. Supongamos $\max \Lambda > 0$ y sea U componente conexa de $A\backslash\{\Gamma_0 \cup \Gamma_1\}$ donde se da el máximo. Observar que la multicurva induce una orientación en el borde de U y que U está a la derecha de su borde. Aplicando el Teorema de Poincaré-Bendixon a la dinámica de la foliación $\mathcal{F}$ concluimos que hay una hoja cerrada ϕ dentro de U. Esto contradice $\Omega(f) = A$.

□

Si buscamos obtener una foliación transversa a una isotopía de la identidad (f_t) en una superficie S necesitamos que el levantamiento canónico $F : \tilde{S} \to \tilde{S}$ no tenga puntos fijos. La primer idea es considerar la superficie $S' = S\backslash \mathrm{Fix}(f)$, pero el problema es que la restricción de f a S' no tiene por qué resultar isotópica a la identidad. Para poder restringir la isotopía necesitaríamos encontrar entonces una isotopía (f_t) que verifique $f_t(z) = z$ para todo $t \in [0, 1]$ y $z \in \mathrm{Fix}(f)$.

Esto nos lleva a considerar las siguientes definiciones:

Definición 21. *Un subconjunto $X \subset \mathrm{Fix}(f)$ está* desenlazado *si existe una isotopía $(f_t)_{t\in[0,1]}$ de la identidad a f tal que $f_t(z) = z$ para todo $t \in [0, 1]$ y $z \in X$.*

Un subconjunto $X \subset \mathrm{Fix}(f)$ es desenlazado maximal *si es desenlazado, y para cualquier $z \in \mathrm{Fix}(f), z \notin X$, $X \cup \{z\}$ no es desenlazado.*

Observar que si $\mathrm{Fix}(f)$ es finito, siempre podemos encontrar $X \subset \mathrm{Fix}(f)$ desenlazado maximal.

Lemma 18. *Si $\#X = 3$ y $S = S^2$, entonces X es desenlazado.*

Proof. Sea $X = \{z_1, z_2, z_3\}$ y $(f_t)_{t\in[0,1]}$ isotopiía de Id a f. Queremos encontrar $(g_t)_{t\in[0,1]}$ isotopiía de Id a f tal que $g_t(z_i) = z_i$ para todo $t \in [0, 1]$ y para todo $i = 1, 2, 3$. Observar que para todo $t \in [0, 1]$ existe $\varphi_t : S^2 \to S^2$ transformación de Mobius tal que $\varphi_t(f_t(z_i)) = z_i$ para todo $i = 1, 2, 3$. Entonces la isotopía $(g_t)_{t\in[0,1]}, g_t = \varphi_t f_t$ verifica lo pedido.

□

Lemma 19. *Sea* $X \subset \mathrm{Fix}(f)$ *desenlazado maximal,* $S' = S \backslash X$ *y* $f_t : S' \to S'$ *isotopía de* Id *a* $f|_{S'}$*. Entonces, el levantamiento canónico* $F : \tilde{S}' \to \tilde{S}'$ *no tiene puntos fijos.*

Proof. Observar que si F tiene un punto fijo z, entonces el loop $(f_t(p(z)))_{t\in[0,1]}$ es contractible en S'. Esto quiere decir que $X \cup \{p(z)\}$ es desenlazado, contradiciendo la maximalidad de X.

□

Teorema 13. *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}_0(S^2)$*,* $f \neq \mathrm{Id}$ *tal que* $\Omega(f) = S^2$ *y* $\#\,\mathrm{Fix}(f) \geq 3$*. Entonces* f *tiene puntos periódicos de período arbitrariamente grande.*

Haremos la demostración en el caso que $\mathrm{Fix}(f)$ sea finito.

Proof. Consideramos $X \subset \mathrm{Fix}(f)$ desenlazado maximal y observamos que por el Lema 18 $\#X \geq 3$. Además, el lema anterior implica que el levantamiento canónico $F : \tilde{S}' \to \tilde{S}'$ no tiene puntos fijos. Por lo tanto, existe $\mathcal{F}$ foliación en S' tal que $\mathcal{F}$ es transversa a la isotopía. Como $\Omega(f) = S^2$, el Teorema de Poincaré-Bendixon implica que toda hoja ϕ de $\mathcal{F}$ es una conexión entre dos singularidades de $\mathcal{F}$, es decir, entre dos puntos distintos de X. Consideramos una hoja ϕ de $\mathcal{F}$ y sean $z_1 = \alpha(\phi), z_2 = \omega(\phi)$. Observar que $A = S^2 \backslash \{z_1, z_2\}$ es un anillo, y que $f|_A : A \to A$ tiene un punto fijo (porque $\#X \geq 3$). Concluimos entonces utilizando el Lema 20.

□

Lemma 20. *Sea* $f \in \mathrm{Homeo}_0^+(A)$ *tal que:*

(1) *Existe una línea* ϕ *que conecta ambos fines del anillo y tal que* $f(\phi) \cap \phi = \emptyset$
(2) $\mathrm{Fix}\, f \neq \emptyset$
(3) $\Omega(f) = A$

Entonces f *tiene puntos periódicos de período arbitrariamente largo.*

Proof. Consideramos F el levantamiento de f que fija $\tilde{z}$, un representante de $z \in \mathrm{Fix}\, f$. Si $\tilde{\phi}$ es una preimagen de ϕ por p, la línea $\tilde{\phi}$ separa $\tilde{A}$ en dos componentes conexas $D(\tilde{\phi})$ e $I(\tilde{\phi})$. Como $f(\phi) \cap \phi = \emptyset$, podemos suponer que $F(\tilde{\phi}) \subset D(\tilde{\phi})$ (la demostración en el otro caso es análoga). Observar que para cualquier $n \geq 1$,si consideramos el levantamiento $G = T^{-1}F^n$ de f^n, G tiene un disco libre que regresa para atrás (podemos considerar un pequeño disco alrededor de $\tilde{z}$).

Para terminar basta encontrar algún n tal que G tenga $U \subset \tilde{A}$ disco libre que regresa para adelante y utilizar el Teorema 6. Ya que en ese caso existe $x \in \tilde{A}$ tal que $G(x) = x$ y $G(\tilde{z}) = z - 1$, por lo cual tenemos número de rotación 0 y $-1/n$ y concluimos utilizando el Corolario 3.

Para encontrar n y U consideramos la región comprendida entre $\tilde{\phi}$ y $F(\tilde{\phi})$. Sabemos que existen $n, k > 0$ tal que $F^n(U) \cap (U + k) \neq \emptyset$, y queremos asegurarnos $k > 1$, así $G(U) \cap (U + k - 1) \neq \emptyset$ y $k - 1 > 0$ y U regresa para adelante para G. Si justo tenemos la mala suerte de que $k = 1$ hay dos posibilidades: o bien $F^n(U) \subset (U + 1)$ o bien existe $V \subset U$ tal que $F^n(V) \cap (V + 1) = \emptyset$. En el primer caso, el Teorema de Brouwer en el disco nos da que existe $x \in \mathrm{Fix}\, G$ que es lo que queremos. Y en el segundo caso, V tiene necesariamente que regresar para adelante para F con $k > 1$.

□

Capítulo 13. Cubrimientos del anillo.

Este capítulo está motivado por el siguiente problema abierto:

Conjetura de Shub: Sea $f : S^2 \to S^2$ de clase C^1 y $\deg(f) = d$, $|d| > 1$. Entonces se verifica la desigualdad:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\#\{\mathrm{Fix}(f^n)\})}{n} \geq \log(d).$$

Ejercicio 21. *Demostrar que si $f : S^1 \to S^1$ es continua y $\deg(f) = d$, $|d| > 1$, entonces $\#\{\mathrm{Fix}(f^n)\} \geq |d|^n$. Concluir que se verifica la desigualdad de la Conjetura de Shub.*

Cuando un mapa $f : S^2 \to S^2$ verifique la desigualdad de la Conjetura de Shub, diremos que f *tiene la tasa.*

Lemma 21. (Si f es C^1 los críticos son atractores). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que:*

- $f(0) = 0$
- *existen U, V abiertos entornos de 0 tales que $f|_U : U\backslash\{0\} \to V\backslash\{0\}$ es un cubrimiento $d : 1$.*

Entonces 0 es un punto atractor de f. Más precisamente, existe $\delta > 0$ tal que si $||v|| < \delta$, entonces $||f(v)|| < ||v||$.

Proof. Observar primero que basta probar que $d_0 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es nulo. En ese caso, la fórmula de Taylor nos da:

$$f(v) = ||v||R(0, v)$$

con $R(0, v) \to_{||v||\to 0} 0$ y obtenemos la tesis.

Supongamos entonces que existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $d_0 f(v) \neq 0$. Consideremos la curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U, \gamma(t) = tv$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Entonces $f\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to V$ es una curva diferenciable y $(f\gamma)'(0) \neq 0$. Como $f|_U : U\backslash\{0\} \to V\backslash\{0\}$ es un cubrimiento $d : 1$, $f\gamma$ tiene d preimágenes en U, $\gamma = \gamma_0$ y otras $d-1$ curvas más que pasan por 0, que llamamos $\gamma_i, i = 1, \ldots, d-1$. Consideremos una componente conexa D de $U\backslash \cup_{i=0}^n \gamma_i$ cuyo borde contenga $\gamma([0, \epsilon)$. Observar que $f(D) = V\backslash f\gamma([0, \epsilon))$. Por lo tanto, $f(D)$ contiene a $f\gamma((-\epsilon, 0])$. Esto quiere decir que D contiene preimágenes de $f\gamma$, lo cual es absurdo por definición de D.

□

Observar que si $f : S^2 \to S^2$, $\deg(f) = d$, $|d| > 1$ y existen $p, q \in \mathrm{Fix}(f)$ tales que $f^{-1}(p) = p, f^{-1}(q) = q$, entonces f induce un mapa del anillo $A = S^2\backslash\{p, q\}$

por restricción, $f|_A : A \to A$, donde $\deg(f|_A) = d$. Se deduce del lema anterior que si $f : S^2 \to S^2$ es de clase C^1, ambos fines del anillo A son atractores.

Vamos entonces a estudiar mapas $f : A \to A, A = S^1 \times (0,1)$, $\deg(f) = d, |d| > 1$.

Definición 22. *Sea $A = S^1 \times (0,1)$ y $K \subset A$. Decimos que K es* trivial *en A si existe un disco topológico abierto $D \subset A$ tal que $K \subset D$. Si K no es trivial en A, decimos que K es esencial en A.*

Lemma 22. (El complemento de las cuencas es un compacto esencial invariante). *Sean $f : S^2 \to S^2$ de clase C^1, $\deg(f) = d$, $|d| > 1$, $p, q \in \mathrm{Fix}(f)$ tales que $f^{-1}(p) = p, f^{-1}(q) = q$ y $A = S^2 \backslash \{p, q\}$. Entonces existe $K \subset A$ compacto esencial tal que $f(K) \subset K$.*

Proof. Definamos los conjuntos:

$$B_p := \{x \in A : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = p\}, B_q := \{x \in A : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = q\}.$$

Por el Lema 21 sabemos que los conjuntos B_p y B_q son abiertos no vacíos y evidentemente además son disjuntos. Como A es conexo, sabemos que $K = (B_p \cup B_q)^c \neq \emptyset$. Además, K es compacto y $f(K) \subset K$. Para ver que K es esencial, supongamos que existe un disco topológico abierto $D \subset A$ tal que $K \subset D$. Observar que $A\backslash D$ es conexo y $A\backslash D \subset B_p \cup B_q$, absurdo.

□

Teorema 14. (Si todo lift tiene un punto fijo, f tiene por lo menos $|d-1|$). *Sea $f : A \to A, A = S^1 \times (0,1)$, $\deg(f) = d, |d| > 1$. Si $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$ para todo lift $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$, entonces $\mathrm{Fix}(f) \geq |d-1|$.*

Proof. Si $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ es un lift de f, entonces cualquier otro lift de f es de la forma $F + k : \tilde{A} \to \tilde{A}, (F + k)(x) = F(x) + (k, 0), k \in \mathbb{Z}$.

Denotamos $F_k = F + k$ y escribimos $F(x) + (k, 0) = F(x) + k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Para todo $k \in \mathbb{Z}$ sea $x_k \in \tilde{A}$ tal que $F_k(x_k) = x_k$. Queremos contar cuántos $p(x_k)$ diferentes hay, donde $p : \tilde{A} \to A$ es la proyección de cubrimiento. Para eso estudiamos la ecuación $x_k = x_l + j$, $j, k, l \in \mathbb{Z}$. Observar que $x_k = x_l + j$ sii

$$x_k = F_k(x_k) = F_k(x_l + j) = F_k(x_l) + dj = F(x_l) + k + dj = F_l(x_l) - l + k + dj =$$
$$= x_l - l + k + dj = x_k - j - l + k + dj$$

sii

$$k - l = j - dj = j(1 - d).$$

Es decir $p(x_k) = p(x_l)$ sii $k-l \in (1-d)\mathbb{Z}$. Por lo tanto los puntos $p(x_0), p(x_1), \ldots p(x_{|d-1|-1})$ son todos distintos y $\mathrm{Fix}(f) \geq |d-1|$.

$\square$

Observación 3. *Pasamos entonces a tener el problema de encontrar puntos fijos para lifts $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$. Observar que $\tilde{A}$ es topológicamente un plano, y que si $f : A \to A$ es un cubrimiento, entonces $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ es un homeo del plano y podemos utilizar la Teoría de Brouwer.*

Teorema 15. *Sea $f : A \to A, A = S^1 \times (0,1)$ un cubrimiento, $\deg(f) = d, |d| > 1$. Supongamos además que existe $K \subset A$ compacto esencial tal que $f(K) \subset K$. Entonces $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$ para todo lift $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$.*

La demostración de este teorema consiste en encontrar un compacto invariante asociado a un lift $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ y aplicar el Teorema de Brouwer. Observar que el conjunto $\tilde{K} = p^{-1}(K)$, donde $p : \tilde{A} \to A$ es la proyección de cubrimiento, no es compacto porque K es esencial, y por lo tanto no sirve. Sin embargo, podemos encontrar el compacto invariante buscado utilizando una semiconjugación entre f y el mapa z^d en el círculo.

Teorema 16. (f restricta a un compacto es semiconjugada a z^d). *Sea $f : A \to A, A = S^1 \times (0,1)$, $\deg(f) = d, |d| > 1$, $K \subset A$ compacto tal que $f(K) \subset K$ y $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ un lift de f. Entonces existe $H : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ continua tal que:*

(1) $H((x,y) + (1,0)) = H(x,y) + (1,0)$ *para todo* $(x,y) \in \tilde{K}$
(2) $HF = dH$
(3) *existe* $M > 0$ *tal que* $|H(x,y) - x| < M$ *para todo* $(x,y) \in \tilde{K}$

Proof. Observar que el espacio $\mathcal{H} = \{H : \tilde{K} \to \mathbb{R} : H$ es continua y $H((x,y) + (1,0)) = H(x,y) + (1,0)$ para todo $(x,y) \in \tilde{K}\}$ es un espacio métrico completo con la métrica del supremo. Además, si para $H \in \mathcal{H}$ definimos $T(H) = \frac{HF}{d}$ tenemos que:

(1) $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
(2) T es contractivo.

Para ver esto, hacemos los siguientes cálculos:

(1) $T(H)((x,y)+(1,0)) = \frac{HF}{d}((x,y)+(1,0)) = \frac{HF((x,y)+(1,0))}{d} = \frac{H(F(x,y)+(d,0))}{d} = \frac{H(F(x,y))+(d,0)}{d} = \frac{H(F(x,y))}{d} + (1,0) = T(H)((x,y)) + (1,0)$ por lo cual $T(H) \in H$
(2) Sea ρ la métrica del supremo en $\mathcal{H}$. Entonnces $\rho(T(H_1), T(H_2)) = \sup_{(x,y)\in\tilde{K}} |T(H_1)(x,y) - T(H_2)(x,y)| = \sup_{(x,y)\in\tilde{K}} |\frac{H_1F}{d}(x,y) - \frac{H_2F}{d}(x,y)| \leq \frac{1}{|d|} \sup_{(x,y)\in\tilde{K}} |H_1(x,y) - H_2(x,y)| < \rho(H_1, H_2)$ por lo cual T es contractivo.

Se deduce que $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tiene un punto fijo H. Por definición, obtenemos:

(1) $H((x,y) + (1,0)) = H(x,y) + (1,0)$ para todo $(x,y) \in \tilde{K}$
(2) $HF = dH$

Además, por ser H continua y periódica tenemos que existe $M > 0$ tal que $|H(x,y) - x| < M$ para todo $(x,y) \in \tilde{K}$.

$\square$

Observación 4. *Notar que $f : A \to A$ no es necesariamente semiconjugada a z^d actuando en S^1, veremos un ejemplo más adelante.*

Demostración del Teorema 15 en el caso que f preserve orientación:

Proof. Sea $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$ un lift de F y consideremos $H : \tilde{K} \to \mathbb{R}$ dada por el Teorema 16. Observar que $H^{-1}(0) \subset \tilde{K} \subset \tilde{A}$ es no vacío por ser K esencial. Ademś, es compacto e invariante, por lo tanto, como asumimos que f preserva orientación, el Teorema de Brouwer garantiza $\mathrm{Fix}(F) \neq \emptyset$. $\square$

Para demostrar el Teorema 15 en el caso que f revierte orientación, utilizamos el siguiente resultado:

Teorema 17. [K] *Sea f un homeo del plano que revierte orientación, y $X \subset \mathbb{R}^2$ un continuo f-invariante. Entonces* $\mathrm{Fix}(f) \cap X \neq \emptyset$.

También utilizaremos el siguiente lema, que establece que podemos modificar f en un entorno de los fines del anillo para que sea semiconjugada a z^d en el círculo:

Lemma 23. *Sea $g : A \to A$ un cubrimiento, $K \subset A$ compacto. Entonces existe un cubrimiento del anillo cerrado $g' : \overline{A} \to \overline{A}$ tal que $g = g'$ en K.*

Proof. Hacemos la prueba en el caso que g preserva los fines del anillo, ya que si g intercambia los fines la demostración es análoga. Sea $G : \tilde{A} \to \tilde{A}$ un lift de g y sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1) : \epsilon < y < 1 - \epsilon\}$, $\epsilon > 0$ tal que $\tilde{K} = p^{-1}(K) \subset V$. Probaremos que existe $G' : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R} \times [0, 1]$ tal que:

(1) $G'(x, y) = (dx, y)$ para $y = 0$ e $y = 1$
(2) $G'((x, y) + (1, 0)) = G'(x, y) + (d, 0)$ para todo (x, y)
(3) $G' = G$ en V

Para construir G',cramos el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, \epsilon]$. Observar que las propiedades que queremos para G' determinan su valor en los lados horizontales del rectángulo. Sea s un arco simple que une $G'(0, 0)$ con $G'(0, \epsilon)$ y disjunto de $G(y = \epsilon)$. Definimos G' en el segmento $\{0\} \times [0, \epsilon]$ como un homeo sobre s. Observar que esto determina G' también en $\{1\} \times [0, \epsilon]$. Tenemos entonces definida G' en ∂R que es una curva cerrada simple, como un homeo sobre su imagen. Utilizando el Teorema de Jordan-Schoenflies extendemos G' a un homeo de todo R. La misma construcción se hace para construir G' "contra el borde de arriba". Terminamos observando que G' induce un mapa $g' : \overline{A} \to \overline{A}$ y que $g = g'$ en K. $\square$

Lemma 24. *Sea $f : S^1 \times [0, 1] \to S^1 \times [0, 1]$, $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R} \times [0, 1]$ un lift de f y $H : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $HF = dH$. Entonces existe $C \subset H^1(O)$ tal que:*

(1) *C es conexo*
(2) *$C \cap \mathbb{R} \times \{0\} \neq \emptyset$*
(3) *$C \cap \mathbb{R} \times \{1\} \neq \emptyset$*
(4) *$F(C) \subset C$*

Un conjunto que satisface las primeras tres condiciones decimos que es un *conector.*

Proof. Primero observamos que existe un conector $C \subset H^{-1}(0)$. Sino, $(h^{-1}(0))^c$ sería un abierto esencial en el anillo, lo cual es absurdo porque h es sobre en cualquier conjunto esencial. Luego $F(C)$ es otro conexo en $H^{-1}(0)$, por lo cual o bien $F(C) = C$ o bien $F(C) \cap C \neq \emptyset$. En el primer caso ya terminamos, y en el segundo consideramos U la componente conexa acotada de $\mathbb{R} \times [0,1] \backslash (C \cup F(C))$. Observar que $U \subset H^{-1}(0)$ porque $|H(x,y) - x|$ está acotado y por lo tanto $\cup_{n \geq 0} F^n(C)$ está acotado. En ese caso el conector buscado es $\overline{\cup_{n \geq 0} F^n(U)}$.

□

En nuestro caso, queremos aplicar el Teorema 17 al homeomorfismo $F : \tilde{A} \to \tilde{A}$. Para eso observamos que si $f : A \to A$ revierte orientación, tenemos dos casos:

(1) f preserva los fines y $d < 0$
(2) f intercambia los fines y $d > 0$

(1) En este caso podemos modificar f para que extienda al anillo cerrado sin cambiar f en K. Sea F un levantado de f, y extendamos F a la compactificación de $\mathbb{R} \times [0,1]$ agregando dos puntos al infinito $\{-\infty, \infty\}$. Notar que F es un homeo de un disco cerrado, y se puede extender a un homeo de todo el plano que revierte orientación. Además, el conjunto $X = p^{-1}(K) \cup \{-\infty, \infty\}$ es conexo, aún si $p^{-1}(K)$ no lo es, compacto e invariante. Por lo tanto, $\mathrm{Fix}(F) \cap X \neq \emptyset$. Como los puntos $\{-\infty, \infty\}$ se intercambian, el punto fijo debe estar en $p^{-1}(K)$, demostrando que todo levantado tiene un punto fijo.

(2) En este caso podemos modificar f sin cambiar el conjunto de puntos fijos para que se extienda a un homeomorfismo del anillo cerrado. Sea F un lift de f y consideramos $H : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $HF = dH$. Consideramos $C \subset H^{-1}(0)$ conector invariante dado por el Lema 24. Ahora, el Teorema 17 implica la existencia de un punto fijo en ese conector, demostrando que todo levantado tiene un punto fijo.

References

[B] K. Borsuk. Einige Satze uber stetige Streckenbilder, Fund. Math 24 (1935), 5158.

[Be] A fixed point theorem for plane homeomorphisms, Fund. Math. 100 (1978),119128.

[Bro77] M. Brown. A short proof of the Cartwright-Littlewood fixed point Theorem. Proc. Amer.Math. Soc. 65, p.372 (1977)

[C-L] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood. Some fixed point theorems, Annals of Math. 54 (1951), 137.

[F] A. Fathi. An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs. L' enseignement Mathématique 33, (1987), 315-322

[F] J.Franks. Generalizations of the Poincare-Birkhoff theorem Annals of Mathematics, 128 (1988), 139-151

[H] A. Hatcher. Algebraic Topology.

[K] K. Kuperberg. Fixed points of orientation reversing homeomorphisms of the plane. Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 223229.

[L] P. Le Calvez. Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer Publications Mathmatiques de l'IHS, Tome 102 (2005), pp. 1-98.

[S] M. Sambarino. Introducción a los sistemas dinámicos.