

Caracterización de puntos críticos de Fekete mediante bases de Gröbner

Seminario de Álgebra del IMERL

24 de octubre de 2025

Matías Valdés



CENUR
NORESTE



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Trabajo conjunto con: Diego Armentano, Leandro Bentancur, Federico Carrasco, Marcelo Fiori y Mauricio Velasco.

Cronograma

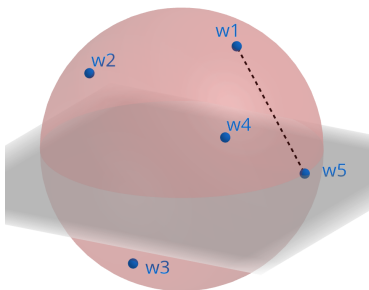
- 1 Introducción a Fekete
- 2 Formulación de las Configuraciones Críticas
- 3 Gröbner para contar soluciones
- 4 Cinco puntos
- 5 Seis puntos
- 6 Software y Hardware utilizado
- 7 Conclusiones y Trabajo Futuro

Problema de Fekete

Colocar n puntos en la superficie de la esfera $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, de forma de maximizar el producto de las distancias entre pares de puntos:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \|w_i - w_j\|,$$

$$w_i \in S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

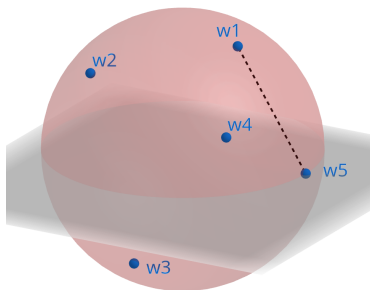


Problema de Fekete

Colocar n puntos en la superficie de la esfera $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, de forma de maximizar el producto de las distancias entre pares de puntos:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \|w_i - w_j\|,$$

$$w_i \in S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$



Equivale a: colocar los puntos para minimizar la energía logarítmica

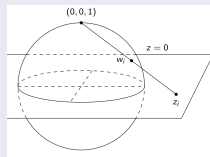
$$E_{\log}(w) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2), \quad w_i \in S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

¿Por qué preocuparnos por este problema?

¿Por qué preocuparnos por este problema?

Bezout III - Shub y Smale (1993) [1]

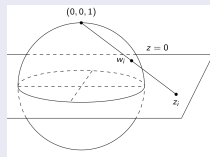
Soluciones de Fekete (proyectadas al plano) son útiles para inicializar algoritmos de homotopía (que permiten estimar raíces de polinomios numéricamente).



¿Por qué preocuparnos por este problema?

Bezout III - Shub y Smale (1993) [1]

Soluciones de Fekete (proyectadas al plano) son útiles para inicializar algoritmos de homotopía (que permiten estimar raíces de polinomios numéricamente).



Problema 7 de la lista de problemas de Smale (1998) [4]

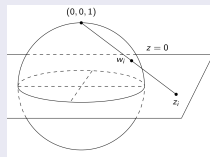
Dar un algoritmo “eficiente” que, para cada cantidad de puntos n , encuentre una configuración $\hat{w} \in (S^2)^n$ cuya energía sea “aproximadamente” igual a la energía óptima de Fekete:

$$E_{\log}(\hat{w}) - E_{\log}^* \leq c \log(n), \quad \text{para una constante universal } c.$$

¿Por qué preocuparnos por este problema?

Bezout III - Shub y Smale (1993) [1]

Soluciones de Fekete (proyectadas al plano) son útiles para inicializar algoritmos de homotopía (que permiten estimar raíces de polinomios numéricamente).



Problema 7 de la lista de problemas de Smale (1998) [4]

Dar un algoritmo “eficiente” que, para cada cantidad de puntos n , encuentre una configuración $\hat{w} \in (S^2)^n$ cuya energía sea “aproximadamente” igual a la energía óptima de Fekete:

$$E_{\log}(\hat{w}) - E_{\log}^* \leq c \log(n), \quad \text{para una constante universal } c.$$

Y porque nos gustan los problemas difíciles.

¿Qué se sabe del problema de Fekete?

- Configuración óptima conocida para pocos valores de n y d .
- En S^2 , conf. óptima conocida sólo para: $n = 2, 3, 4, 5, 6$ y 12 .
- Valor óptimo conocido asintóticamente, hasta factor lineal [9]:

$$\text{in } S^2: E_{\log}^* = \left(\frac{1}{2} - \log 2 \right) \frac{n^2}{2} - \frac{n \log n}{4} + Cn + o(n), \quad C = ?$$

- Toda configuración crítica satisface: $\sum_{i=1}^n w_i = \vec{0}$.
- Tiene puntos silla [8, 10], y mínimo local no global [11].
- Numéricamente: cantidad de mínimos locales no globales en S^2 crece “dramáticamente” con n [2]; aunque no se conoce ninguno en S^2 .
- Sólo se conoce un mínimo local no global [8, 10]: $n = 6$ en S^3 .

Contribuciones y Estrategia

Contribuciones

- Formular las configuraciones críticas de Fekete como soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales.
- Formulación útil para esfera S^d de cualquier dimensión.
- Para $n \leq 6$ puntos, y esfera de cualquier dimensión d :
 - recuperamos resultados conocidos con un enfoque unificado.
 - encontramos y clasificamos todas las configuraciones críticas, incluido un punto silla que era desconocido.

Contribuciones y Estrategia

Contribuciones

- Formular las configuraciones críticas de Fekete como soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales.
- Formulación útil para esfera S^d de cualquier dimensión.
- Para $n \leq 6$ puntos, y esfera de cualquier dimensión d :
 - recuperamos resultados conocidos con un enfoque unificado.
 - encontramos y clasificamos todas las configuraciones críticas, incluido un punto silla que era desconocido.

Estrategia

- Determinar la cantidad de soluciones m del sistema de polinomios (cantidad de configuraciones críticas).
- Encontrar tantas soluciones como podamos, hasta llegar a m .

Configuraciones Críticas (candidatas a ser óptimas)

Problema de Fekete: minimizar la energía logarítmica en S^d

$$E_{\log}(w) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2), \quad \|w_k\|^2 = 1, \quad w_k \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Configuraciones Críticas (candidatas a ser óptimas)

Problema de Fekete: minimizar la energía logarítmica en S^d

$$E_{\log}(w) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2), \quad \|w_k\|^2 = 1, \quad w_k \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Lagrangeano asociado al problema

$$L(w, \lambda) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2) + \sum_{k=1}^n \lambda_k (\|w_k\|^2 - 1).$$

Configuraciones Críticas (candidatas a ser óptimas)

Problema de Fekete: minimizar la energía logarítmica en S^d

$$E_{\log}(w) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2), \quad \|w_k\|^2 = 1, \quad w_k \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Lagrangeano asociado al problema

$$L(w, \lambda) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2) + \sum_{k=1}^n \lambda_k (\|w_k\|^2 - 1).$$

Condiciones de optimalidad de Lagrange

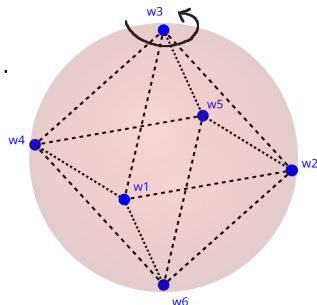
$$\begin{cases} \nabla_{w_i} L = \vec{0}, \\ \|w_i\|^2 = 1, \end{cases} \quad \forall i \Leftrightarrow (n-1)w_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{w_i - w_j}{\|w_i - w_j\|^2} = 0, \quad \forall i.$$

Eliminando Simetría Ortogonal

$$E_{\log}(w) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2).$$

Energía es invariante mediante rotaciones de la esfera.

Esto da ∞ soluciones en las w_i (pero necesitamos contar soluciones).

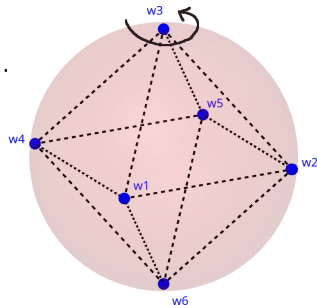


Eliminando Simetría Ortogonal

$$E_{\log}(w) := - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log(\|w_i - w_j\|^2).$$

Energía es invariante mediante rotaciones de la esfera.

Esto da ∞ soluciones en las w_i (pero necesitamos contar soluciones).



Cambio de variables

En lugar de $w_i \in \mathbb{R}^{d+1}$, usamos producto interno (“ángulos”) como variable:

$$x_{ij} := w_i^T w_j = \cos(\theta_{ij}).$$

Rotaciones de una solución dan la misma solución (en los x_{ij}).

Ecuaciones en términos del producto interno

Condiciones de optimalidad de Lagrange, expresadas en los $x_{ij} := w_i^T w_j$ (previo producto interno con w_k en cada ecuación):

$$(n-1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{x_{ki} - x_{kj}}{1 - x_{ij}} = 0, \quad \forall i \neq k.$$

Ecuaciones en términos del producto interno

Condiciones de optimalidad de Lagrange, expresadas en los $x_{ij} := w_i^T w_j$ (previo producto interno con w_k en cada ecuación):

$$(n-1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{x_{ki} - x_{kj}}{1 - x_{ij}} = 0, \quad \forall i \neq k.$$

Introducimos variables auxiliares z_{ij} , y las ecuaciones que las definen:

$$\boxed{z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1.} \quad (1)$$

Ecuaciones en términos del producto interno

Condiciones de optimalidad de Lagrange, expresadas en los $x_{ij} := w_i^T w_j$ (previo producto interno con w_k en cada ecuación):

$$(n-1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{x_{ki} - x_{kj}}{1 - x_{ij}} = 0, \quad \forall i \neq k.$$

Introducimos variables auxiliares z_{ij} , y las ecuaciones que las definen:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1. \quad (1)$$

$$(n-1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj})z_{ij} = 0, \quad \forall i \neq k. \quad (2)$$

Expresión es polinomial, y con puntos distintos: $x_{ij} \neq 1$ ($w_i \neq w_j$).

Ecuaciones en términos del producto interno (resumen)

Ecuaciones:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1,$$

$$(n - 1) x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj}) z_{ij} = 0, \forall i \neq k.$$

Ecuaciones en términos del producto interno (resumen)

Ecuaciones:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1,$$

$$(n - 1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj})z_{ij} = 0, \forall i \neq k.$$

Variables: x_{ij} , z_{ij} , $i < j$.

Ecuaciones en términos del producto interno (resumen)

Ecuaciones:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1,$$

$$(n - 1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj})z_{ij} = 0, \forall i \neq k.$$

Variables: x_{ij} , z_{ij} , $i < j$.

Cantidad de variables y ecuaciones

	n	3	4	5	6	7	8
variables	$2\binom{n}{2}$	6	12	20	30	42	56
ecuaciones	$n(3n - 1)/2$	12	22	35	51	70	92

Ecuaciones en términos del producto interno (resumen)

Ecuaciones:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1,$$

$$(n - 1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj})z_{ij} = 0, \forall i \neq k.$$

Variables: x_{ij} , z_{ij} , $i < j$.

Cantidad de variables y ecuaciones

	n	3	4	5	6	7	8
variables	$2\binom{n}{2}$	6	12	20	30	42	56
ecuaciones	$n(3n - 1)/2$	12	22	35	51	70	92

Estrategia (para hallar todas las configuraciones críticas)

- Calcular la cantidad de soluciones m del sistema.
- Encontrar soluciones hasta llegar a m .

Bases de Gröbner

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{C}^3.$$

Bases de Gröbner

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{C}^3.$$

El ideal generado por los polinomios es:

$$I = (x + y + z - 3, x^2 + y^2 + z^2 - 5, x^3 + y^3 + z^3 - 7).$$

Bases de Gröbner

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{C}^3.$$

El ideal generado por los polinomios es:

$$I = (x + y + z - 3, x^2 + y^2 + z^2 - 5, x^3 + y^3 + z^3 - 7).$$

Una base de Gröbner G de I es otro generador de I , que tiene propiedades “buenas”:

$$G = \{g_1, \dots, g_m\}, \quad (G) = I.$$

Bases de Gröbner

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 7 \end{cases}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{C}^3.$$

El ideal generado por los polinomios es:

$$I = (x + y + z - 3, x^2 + y^2 + z^2 - 5, x^3 + y^3 + z^3 - 7).$$

Una base de Gröbner G de I es otro generador de I , que tiene propiedades “buenas”:

$$G = \{g_1, \dots, g_m\}, \quad (G) = I.$$

Análogo a escalarizar un sistema de ecuaciones lineales (revela propiedades, como la existencia y cantidad de soluciones).

Bases de Gröbner

Bases de Gröbner

En 1965 Bruno Buchberger publica sus tesis doctoral, con:

- 1 un criterio para determinar si un conjunto es base de Gröbner,
- 2 un algoritmo para calcular una base de Gröbner, a partir de un conjunto generador cualquiera (finito).

Bases de Gröbner

En 1965 Bruno Buchberger publica sus tesis doctoral, con:

- 1 un criterio para determinar si un conjunto es base de Gröbner,
- 2 un algoritmo para calcular una base de Gröbner, a partir de un conjunto generador cualquiera (finito).

Aplicando este algoritmo al sistema del ejemplo (con Macaulay2):

```
R = QQ[x,y,z];  
I = ideal(x+y+z-3, x^2+y^2+z^2-5, x^3+y^3+z^3-7);  
G = gens gb I;
```

Bases de Gröbner

En 1965 Bruno Buchberger publica sus tesis doctoral, con:

- 1 un criterio para determinar si un conjunto es base de Gröbner,
- 2 un algoritmo para calcular una base de Gröbner, a partir de un conjunto generador cualquiera (finito).

Aplicando este algoritmo al sistema del ejemplo (con Macaulay2):

```
R = QQ[x,y,z];  
I = ideal(x+y+z-3, x^2+y^2+z^2-5, x^3+y^3+z^3-7);  
G = gens gb I;
```

Obtenemos:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

Bases de Gröbner

En 1965 Bruno Buchberger publica sus tesis doctoral, con:

- 1 un criterio para determinar si un conjunto es base de Gröbner,
- 2 un algoritmo para calcular una base de Gröbner, a partir de un conjunto generador cualquiera (finito).

Aplicando este algoritmo al sistema del ejemplo (con Macaulay2):

```
R = QQ[x,y,z];  
I = ideal(x+y+z-3, x^2+y^2+z^2-5, x^3+y^3+z^3-7);  
G = gens gb I;
```

Obtenemos:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

¿Y entonces?... ¿qué hacemos?

¿El conjunto de soluciones es finito?

¿El conjunto de soluciones es finito?

Theorem

Sea G base de Gröbner de $I = (f_1, \dots, f_k)$. El sistema $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ tiene una cantidad finita de soluciones, sii: para cada variable x_i , G tiene algún polinomio con “Monomio Líder” de la forma $x_i^{m_i}$ ($m_i \geq 0$).

¿El conjunto de soluciones es finito?

Theorem

Sea G base de Gröbner de $I = (f_1, \dots, f_k)$. El sistema $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ tiene una cantidad finita de soluciones, sii: para cada variable x_i , G tiene algún polinomio con “Monomio Líder” de la forma $x_i^{m_i}$ ($m_i \geq 0$).

En nuestro ejemplo, una base de Gröbner es:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

¿El conjunto de soluciones es finito?

Theorem

Sea G base de Gröbner de $I = (f_1, \dots, f_k)$. El sistema $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ tiene una cantidad finita de soluciones, sii: para cada variable x_i , G tiene algún polinomio con “Monomio Líder” de la forma $x_i^{m_i}$ ($m_i \geq 0$).

En nuestro ejemplo, una base de Gröbner es:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

Cada variable aparece **sola** como potencia en el Monomio Líder de algún polinomio.

¿El conjunto de soluciones es finito?

Theorem

Sea G base de Gröbner de $I = (f_1, \dots, f_k)$. El sistema $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ tiene una cantidad finita de soluciones, sii: para cada variable x_i , G tiene algún polinomio con “Monomio Líder” de la forma $x_i^{m_i}$ ($m_i \geq 0$).

En nuestro ejemplo, una base de Gröbner es:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

Cada variable aparece **solamente** como potencia en el Monomio Líder de algún polinomio. Por lo tanto, el conjunto de soluciones es finito.

Si es finito, ¿cuántas soluciones son exactamente?

Si es finito, ¿cuántas soluciones son exactamente?

Theorem

Sea $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ con finitas soluciones y G base de Gröbner del sistema. La cantidad de soluciones (en $\mathbb{C}^n$ y contando multiplicidad), es la cantidad de monomios (del anillo) que no son múltiplo de los Monomios Líder de G .

Si es finito, ¿cuántas soluciones son exactamente?

Theorem

Sea $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ con finitas soluciones y G base de Gröbner del sistema. La cantidad de soluciones (en $\mathbb{C}^n$ y contando multiplicidad), es la cantidad de monomios (del anillo) que no son múltiplo de los Monomios Líder de G .

En el ejemplo, una base de Gröbner es:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

Si es finito, ¿cuántas soluciones son exactamente?

Theorem

Sea $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ con finitas soluciones y G base de Gröbner del sistema. La cantidad de soluciones (en $\mathbb{C}^n$ y contando multiplicidad), es la cantidad de monomios (del anillo) que no son múltiplo de los Monomios Líder de G .

En el ejemplo, una base de Gröbner es:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

Monomios que no son múltiplo de ningún Monomio Líder de G :
 $\{1, y, z, z^2, yz, yz^2\}$.

Si es finito, ¿cuántas soluciones son exactamente?

Theorem

Sea $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ con finitas soluciones y G base de Gröbner del sistema. La cantidad de soluciones (en $\mathbb{C}^n$ y contando multiplicidad), es la cantidad de monomios (del anillo) que no son múltiplo de los Monomios Líder de G .

En el ejemplo, una base de Gröbner es:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

Monomios que no son múltiplo de ningún Monomio Líder de G : $\{1, y, z, z^2, yz, yz^2\}$. Sistema tiene exactamente 6 soluciones (en $\mathbb{C}^3$ y contando multiplicidad).

Si es finito, ¿cuántas soluciones son exactamente?

Theorem

Sea $f_1 = 0, \dots, f_k = 0$ con finitas soluciones y G base de Gröbner del sistema. La cantidad de soluciones (en $\mathbb{C}^n$ y contando multiplicidad), es la cantidad de monomios (del anillo) que no son múltiplo de los Monomios Líder de G .

En el ejemplo, una base de Gröbner es:

$$G = \{x + y + z - 3, y^2 + yz + z^2 - 3y - 3z + 2, 3z^3 - 9z^2 + 6z + 2\}.$$

Monomios que no son múltiplo de ningún Monomio Líder de G : $\{1, y, z, z^2, yz, yz^2\}$. Sistema tiene exactamente 6 soluciones (en $\mathbb{C}^3$ y contando multiplicidad).

No fue necesario hallar las soluciones (resolver el sistema).

Cantidad de soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

Volvemos a las ecuaciones de Fekete:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1,$$

$$(n-1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj})z_{ij} = 0, \quad \forall i \neq k.$$

Cantidad de soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

Volvemos a las ecuaciones de Fekete:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1,$$

$$(n - 1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj})z_{ij} = 0, \forall i \neq k.$$

Para $n = 5$, a partir de una base de Gröbner, se obtiene:
el sistema tiene 38 soluciones (en $\mathbb{C}$ y contando multiplicidad).

Cantidad de soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

Volvemos a las ecuaciones de Fekete:

$$z_{ij}(1 - x_{ij}) = 1,$$

$$(n - 1)x_{ki} - \sum_{j=1, j \neq i}^n (x_{ki} - x_{kj})z_{ij} = 0, \quad \forall i \neq k.$$

Para $n = 5$, a partir de una base de Gröbner, se obtiene:
el sistema tiene 38 soluciones (en $\mathbb{C}$ y contando multiplicidad).

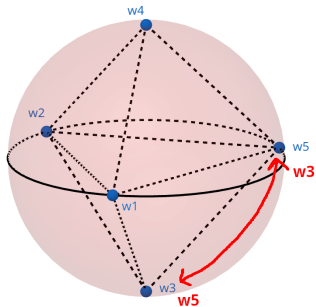
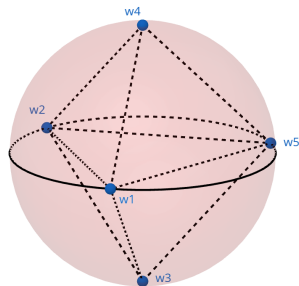
Siguiente paso

Buscar soluciones del sistema, hasta obtener las 38 existentes.

Buscando soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

Sencillo verificar que una de las configuraciones críticas en S^2 es la 1:3:1.

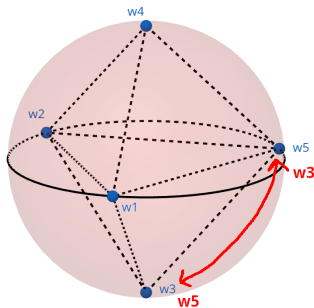
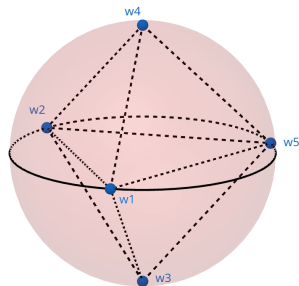
Algunas de sus permutaciones dan otra solución en x_{ij} , aunque del mismo “tipo”.



Buscando soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

Sencillo verificar que una de las configuraciones críticas en S^2 es la 1:3:1.

Algunas de sus permutaciones dan otra solución en x_{ij} , aunque del mismo “tipo”.

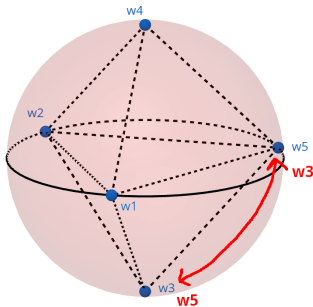
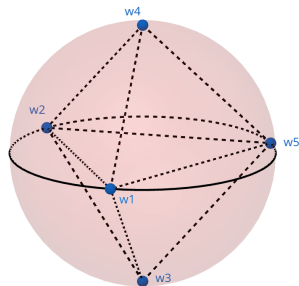


Dado un “tipo” de solución: ¿cuántas permutaciones de los w_i dan soluciones distintas en las variables x_{ij} ?

Buscando soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

Sencillo verificar que una de las configuraciones críticas en S^2 es la 1:3:1.

Algunas de sus permutaciones dan otra solución en x_{ij} , aunque del mismo “tipo”.

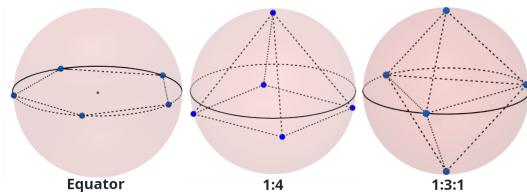


Dado un “tipo” de solución: ¿cuántas permutaciones de los w_i dan soluciones distintas en las variables x_{ij} ?

Respondemos probando las $n!$ permutaciones posibles.

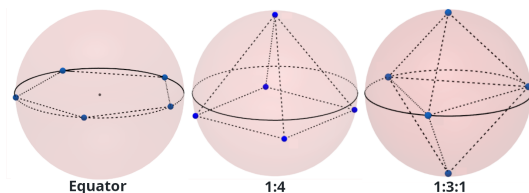
Buscando soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

Es sencillo imaginar otro tipo de soluciones.



Buscando soluciones para 5 puntos (cualquier esfera)

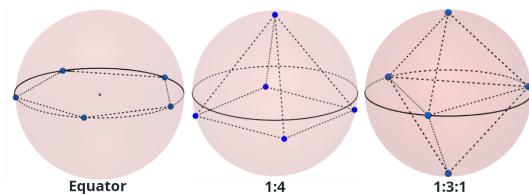
Es sencillo imaginar otro tipo de soluciones.



La cantidad de permutaciones distintas de cada tipo son:

Conf.	Ecuador	1:4	1:3:1	4-simplex	Halladas	Existen
$\neq$ perms.	12	15	10	1	38	38
esfera	S^1	S^2		S^3		✓

Es sencillo imaginar otro tipo de soluciones.



La cantidad de permutaciones distintas de cada tipo son:

Conf.	Ecuador	1:4	1:3:1	4-simplex	Halladas	Existen
$\neq$ perms.	12	15	10	1	38	38
esfera	S^1	S^2		S^3		$\checkmark$

Theorem (Para $n = 5$ puntos)

El único tipo de configuraciones críticas son las que imaginamos.

Cantidad de soluciones para 6 puntos (cualquier esfera)

Cantidad de soluciones para 6 puntos (cualquier esfera)

Para $n = 6$, calculamos una base de Gröbner y obtenemos:
el sistema tiene 938 soluciones (en $\mathbb{C}$ y contando multiplicidad).

Cantidad de soluciones para 6 puntos (cualquier esfera)

Para $n = 6$, calculamos una base de Gröbner y obtenemos:
el sistema tiene 938 soluciones (en $\mathbb{C}$ y contando multiplicidad).

Cálculo de la base de Gröbner con msolve (con 20 procesadores)

- Tiempo: 1 hora y 6 minutos.
- Memoria RAM: 37 GB.
- Cantidad de polinomios de la base: 2473.
- Cantidad de monomios de la base: 2.133.497

Cantidad de soluciones para 6 puntos (cualquier esfera)

Para $n = 6$, calculamos una base de Gröbner y obtenemos:
el sistema tiene 938 soluciones (en $\mathbb{C}$ y contando multiplicidad).

Cálculo de la base de Gröbner con msolve (con 20 procesadores)

- Tiempo: 1 hora y 6 minutos.
- Memoria RAM: 37 GB.
- Cantidad de polinomios de la base: 2473.
- Cantidad de monomios de la base: 2.133.497

Siguiente paso:

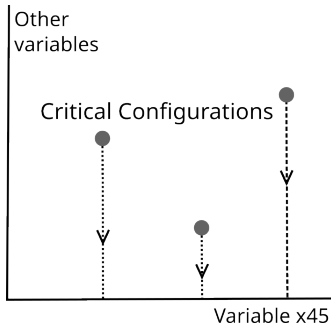
buscar soluciones hasta llegar a las 938 que existen.

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Soluciones “Imaginables” no son suficientes: como veremos, existen soluciones complejas.

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Soluciones “Imaginables” no son suficientes: como veremos, existen soluciones complejas.

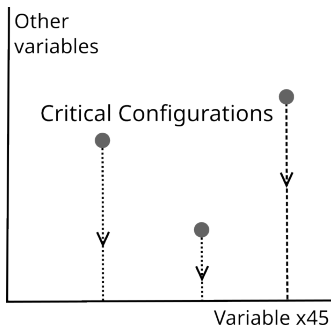


Método para obtener todas las soluciones

- Proyectar el conjunto de soluciones en la variable x_{45} .
- Da posibles valores de x_{45} .

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Soluciones “Imaginables” no son suficientes: como veremos, existen soluciones complejas.

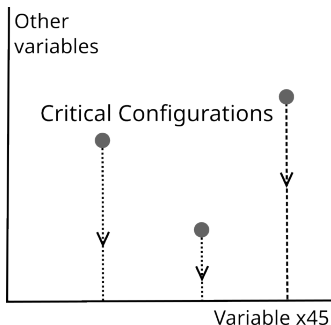


Método para obtener todas las soluciones

- Proyectar el conjunto de soluciones en la variable x_{45} .
- Da posibles valores de x_{45} .
- Se hace calculando base de Gröbner del ideal, con orden monomial que elimine todas las variables, excepto x_{45} .

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Soluciones “Imaginables” no son suficientes: como veremos, existen soluciones complejas.



Método para obtener todas las soluciones

- Proyectar el conjunto de soluciones en la variable x_{45} .
- Da posibles valores de x_{45} .
- Se hace calculando base de Gröbner del ideal, con orden monomial que elimine todas las variables, excepto x_{45} .
- Requiere 10 horas y 190 GB de RAM (vs. 1 hora y 37 GB si se usa orden Grevlex).

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Ideal proyectado es generado por un único polinomio (PID):

$$I \cap \mathbb{Q}[x_{45}] = (p), \text{ algún } p.$$

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Ideal proyectado es generado por un único polinomio (PID):

$$I \cap \mathbb{Q}[x_{45}] = (p), \text{ algún } p.$$

Raíces de p son los posibles valores de x_{45} .

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Ideal proyectado es generado por un único polinomio (PID):

$$I \cap \mathbb{Q}[x_{45}] = (p), \text{ algún } p.$$

Raíces de p son los posibles valores de x_{45} .

Generador p de grado 42

$$\begin{aligned} p = & 28610229492187500000000000x^{42} + \\ & 28276443481445312500000000x^{41} + \\ & \dots - 23238606766480x^2 \\ & + 391378248800x \end{aligned}$$

Valores posibles del producto interno para $n = 6$

Ideal proyectado es generado por un único polinomio (PID):

$$I \cap \mathbb{Q}[x_{45}] = (p), \text{ algún } p.$$

Raíces de p son los posibles valores de x_{45} .

Generador p de grado 42

$p =$

$$\begin{aligned} &286102294921875000000000000000x^{42} + \\ &282764434814453125000000000000x^{41} + \\ &\dots - 23238606766480x^2 \\ &+ 391378248800x \end{aligned}$$

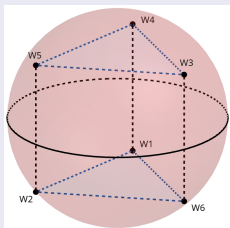
Factorizamos p en $\mathbb{Q}$, usando *Macaulay2*.

Generator Factor	Roots
x_{45}	0
$(x_{45} + 1)^2$	-1
$2x_{45} - 1$	1/2
$2x_{45} + 1$	-1/2
$(5x_{45} - 1)^2$	1/5
$5x_{45} + 1$	-1/5
$(5x_{45} + 7)^2$	-7/5
$(5x_{45}^2 + 1)^2$	$\pm \frac{i}{\sqrt{5}}$
$5x_{45}^2 - 22x_{45} + 5$	$\frac{11 \pm 4\sqrt{6}}{5}$
$5x_{45}^2 + 2x_{45} - 1$	$\frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$
$5x_{45}^2 + 14x_{45} - 1$	$\frac{-7 \pm 3\sqrt{6}}{5}$
$25x_{45}^2 + 28x_{45} + 19$	$\frac{-14 \pm i3\sqrt{31}}{25}$
$125x_{45}^2 + 50x_{45} - 31$	$\frac{-5 \pm 6\sqrt{5}}{25}$
$100x_{45}^4 + 95x_{45}^3 - 21x_{45}^2 - 22x_{45} + 10$	4 complex
$250x_{45}^4 + 110x_{45}^3 - 21x_{45}^2 - 19x_{45} + 4$	4 complex
$400x_{45}^4 + 488x_{45}^3 - 111x_{45}^2 - 196x_{45} + 67$	4 complex
$3x_{45} + 1$	-1/3
$5x_{45} + 4$	-4/5
$10x_{45} - 1$	1/10
$25x_{45} - 1$	1/25
$25x_{45} + 11$	-11/25
$25x_{45} + 23$	-23/25

Soluciones para cada valor de la coordenada x_5

Para cada factor p_i del generador (cada valor x_{45})

1. Agregar $p_i = 0$ al sistema original.
2. Encontrar soluciones del sistema simplificado, y contar sus permutaciones.

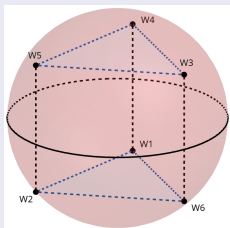


Configuración	# perms	Esfera
Ecuador	60	S^1
1:5	72	S^2
1:4:1	15	S^2
3:3	60+60	S^2
Complex 1	90	S^2
Complex 2	360	S^2
Real 1	15	S^3
Real 2	45	S^3
Real 3	60	S^3
Real 4	10	S^3
5-simplex	1	S^4
Halladas	848	
Existen	938	
Diferencia	$938 - 848 = 90$	$\times$

Soluciones para cada valor de la coordenada x_5

Para cada factor p_i del generador (cada valor x_{45})

1. Agregar $p_i = 0$ al sistema original.
2. Encontrar soluciones del sistema simplificado, y contar sus permutaciones.



Configuración	# perms	Esfera
Ecuador	60	S^1
1:5	72	S^2
1:4:1	15	S^2
3:3	60+60	S^2
Complex 1	90	S^2
Complex 2	360	S^2
Real 1	15	S^3
Real 2	45	S^3
Real 3	60	S^3
Real 4	10	S^3
5-simplex	1	S^4
Halladas	848	
Existen	938	
Diferencia	$938 - 848 = 90$	$\times$

Complex 1 tiene multiplicidad 2: $+90^\circ$.

Clasificación de configuraciones críticas **reales** ($n = 6$)

Configuration	S^1	S^2	S^3	S^4
Equator	GM	S	S	S
1:5	-	S	S	S
1:4:1	-	GM	S	S
3:3 ($\sqrt{6}$)	-	S	S	S
Real 1	-	-	SM	S
Real 2	-	-	S	S
Real 3	-	-	S	S
Real 4	-	-	GM	S
5-simplex	-	-	-	GM

Clasificación de configuraciones críticas **reales** ($n = 6$)

Configuration	S^1	S^2	S^3	S^4
Equator	GM	S	S	S
1:5	-	S	S	S
1:4:1	-	GM	S	S
3:3 ($\sqrt{6}$)	-	S	S	S
Real 1	-	-	SM	S
Real 2	-	-	S	S
Real 3	-	-	S	S
Real 4	-	-	GM	S
5-simplex	-	-	-	GM

- Mínimo global se clasifica comparando valores de energía.
- Las configuraciones restantes se clasifican con la Hessiana del Lagrangiano.
- Se sabe que el problema no admite máximo local/global.

Conclusiones y Trabajo Futuro

Contribuciones

- Configuraciones críticas como solución de sistema polinomial.
- Todas las confs. críticas, y en particular las óptimas, para $n \leq 6$, $d \geq 1$.
- Para $n = 6$ en S^2 : primera lista exhaustiva de configuraciones críticas y su clasificación.

Conclusiones y Trabajo Futuro

Contribuciones

- Configuraciones críticas como solución de sistema polinomial.
- Todas las confs. críticas, y en particular las óptimas, para $n \leq 6$, $d \geq 1$.
- Para $n = 6$ en S^2 : primera lista exhaustiva de configuraciones críticas y su clasificación.

Ventajas y Desventajas

- ✓ Enfoque Unificado.
- ✓ Formulación útil para esfera S^d de cualquier dimensión d .

Conclusiones y Trabajo Futuro

Contribuciones

- Configuraciones críticas como solución de sistema polinomial.
- Todas las confs. críticas, y en particular las óptimas, para $n \leq 6$, $d \geq 1$.
- Para $n = 6$ en S^2 : primera lista exhaustiva de configuraciones críticas y su clasificación.

Ventajas y Desventajas

- ✓ Enfoque Unificado.
- ✓ Formulación útil para esfera S^d de cualquier dimensión d .
- × Requiere calcular bases de Gröbner en $2\binom{n}{2}$ variables.

Conclusiones y Trabajo Futuro

Contribuciones

- Configuraciones críticas como solución de sistema polinomial.
- Todas las confs. críticas, y en particular las óptimas, para $n \leq 6$, $d \geq 1$.
- Para $n = 6$ en S^2 : primera lista exhaustiva de configuraciones críticas y su clasificación.

Ventajas y Desventajas

- ✓ Enfoque Unificado.
- ✓ Formulación útil para esfera S^d de cualquier dimensión d .
- × Requiere calcular bases de Gröbner en $2\binom{n}{2}$ variables.

Trabajo futuro

- Hallar configuración óptima para 7 puntos ($\exists$ candidata)
- Determinar si formulación tiene finitas soluciones para $n > 6$.
- “simplificar” el sistema de ecuaciones, explotando simetrías.

Gracias por su atención

Código y presentación

<http://www.github.com/matiasvd>



Agradecimientos

- Cluster.UY por la infraestructura de hardware.
- ANII y CAP por becas de doctorado.
- Grupo de *msolve*, *Macaulay2* y *SymPy* por su excelente trabajo.

Referencias

- [1] Shub and Smale (1993). Complexity of bezout's theorem: iii. Condition number and packing. Journal of complexity.
- [2] Rakhmanov, Saff, Zhou (1995). Electrons on the sphere. In Computational Methods and Function Theory.
- [3] Kolushov, Yudin (1997). Extremal dispositions of points on the sphere. Analysis Mathematica.
- [4] Smale, Stephen (1998). Mathematical problems for the next century. The mathematical intelligencer.
- [5] J.C. Faugère (1999). A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F4). Journal of pure and applied algebra.
- [6] Dragnev, Legg, Townsend (2002). Discrete logarithmic energy on the sphere. Pacific journal of mathematics.
- [7] Horn, Johnson (2013). Matrix analysis. (2nd ed.). Cambridge university press.
- [8] Dragnev (2016). Log-optimal configurations on the sphere. In Modern trends in constructive function theory.
- [9] Bétermin, Sandier (2018). Renormalized energy and asymptotic expansion of optimal logarithmic energy on the sphere.
- [10] Dragnev, Musin (2023). Log-optimal $(d + 2)$ -configurations in d -dimensions. Trans. AMS.
- [11] Constantineau, et. al (2023). Determination of stable branches of relative equilibria of the N -vortex problem on the sphere.

msolve executions ($n = 6$ points)

AVX512 instructions, 20 threads, Xeon-Gold 6138.

GRevLex monomial order (*msolve* 0.73) - With null CM equations

<i>msolve</i> GB in $\mathbb{Q}$		reduced GB size	
total time	RAM	# pols	# mons
1 hour, 6 minutes	37 GB	2473	xx

Elimination order to project to x_{45} (*msolve* 0.73)

msolve takes 10 hours and 190 GB of RAM.

GRevLex without lifting GB to $\mathbb{Q}$ (*msolve* 0.90)

	<i>msolve</i> GB		reduced GB size	
Null Center of Mass equations	total time	RAM	# pols	# mons
Yes	485 s	3.35 GB	2473	2.133.497
No	433 s	3.36 GB	2473	2.133.497

Configurations for $n = 6$ points in $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

Optimal configuration: Real 4

Two equilateral triangles, each inscribed in a copy of S^1 lying in orthogonal spaces.

The other configurations

- Real 1 (SM): analogous to 1:4:1 of S^2 : it has the poles, and then the optimal configuration for 4 points in the equatorial sphere.
- Real 3 (S): analogous to 1:5 of S^2 : it has a pole, and then the optimal configuration for 5 points in the corresponding sphere.
- Real 2 (S): no analogous on S^2 . Has 4 points on the Equator of a sphere and the optimal configuration for 2 points in another sphere. Line through these two points is orthogonal to the plane of the 4 point Equator.

From x_{ij} to w_i

Any solution in the variables w_i has an associated solution $x_{ij} = w_i^T w_j$. Reciprocal is also true in $\mathbb{C}$.

Theorem (Autonne-Takagi factorization [7, Corollary 2.6.6])

If $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ is symmetric, there is a unitary $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$, and a non-negative diagonal matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, such that: $X = P^T D P$. Furthermore, the entries of D are the singular values of X .

Corollary

If $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ is symmetric with rank d , and ones on its diagonal, there exists $W \in \mathbb{C}^{d \times n}$, such that: $X = W^T W$, $w_i^T w_i = 1$, $\forall i$.

Proof.

As X is symmetric: $X = P^T D P$. Take: $W = \sqrt{\hat{D}} P$; where $\hat{D} \in \mathbb{R}^{d \times n}$ is the submatrix of D with positive singular values. □