Distancia de separación de puntos aleatorios en la esfera

Jornada del Seminario de Probabilidad y Estadística (JoSePE)

Matías Valdés

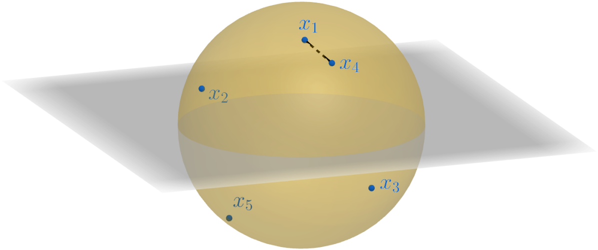
01/07/23

Distancia de separación

Definition

Sea $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ conjunto de n puntos en la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. La distancia de separación del conjunto, es la menor distancia entre todos los pares de puntos:

$$sep(X_n) := \min_{i \neq j}\{\|x_i - x_j\|_2\}.$$



Objetivos de la charla

- Analizar la distancia de separación de los siguientes conjuntos de puntos aleatorios en la esfera S^2:
  - Distribución Uniforme
  - Spherical ensemble (conjunto esférico)
  - Ceros de polinomios elípticos

Objetivos de la charla

- Analizar la distancia de separación de los siguientes conjuntos de puntos aleatorios en la esfera S^2:
  - Distribución Uniforme
  - Spherical ensemble (conjunto esférico)
  - Ceros de polinomios elípticos
- Como los puntos son aleatorios, la distancia de separación asociada a estos es una variable aleatoria.

Objetivos de la charla

- Analizar la distancia de separación de los siguientes conjuntos de puntos aleatorios en la esfera S^2:
  - Distribución Uniforme
  - Spherical ensemble (conjunto esférico)
  - Ceros de polinomios elípticos
- Como los puntos son aleatorios, la distancia de separación asociada a estos es una variable aleatoria.
- Interesa en particular su distribución (asintótica en $n \to \infty$), y sus primeros momentos (esperanza y varianza).

Objetivos de la charla

- Analizar la distancia de separación de los siguientes conjuntos de puntos aleatorios en la esfera S^2:
  - Distribución Uniforme
  - Spherical ensemble (conjunto esférico)
  - Ceros de polinomios elípticos
- Como los puntos son aleatorios, la distancia de separación asociada a estos es una variable aleatoria.
- Interesa en particular su distribución (asintótica en $n \to \infty$), y sus primeros momentos (esperanza y varianza).
- Cronograma:
  - presentar los resultados conocidos
  - dar una idea de las herramientas utilizadas en las pruebas
  - presentar posibles líneas de trabajo

Separación óptima

- Como la esfera es acotada, si hacemos crecer la cantidad de puntos n, la distancia de separación debe tender a cero.

Separación óptima

- Como la esfera es acotada, si hacemos crecer la cantidad de puntos n, la distancia de separación debe tender a cero.
- Queremos que tienda a cero "lentamente".

Separación óptima

- Como la esfera es acotada, si hacemos crecer la cantidad de puntos n, la distancia de separación debe tender a cero.
- Queremos que tienda a cero "lentamente".
- ¿Qué es lo mejor que se puede lograr? (lo más lento)

Separación óptima

- Como la esfera es acotada, si hacemos crecer la cantidad de puntos n, la distancia de separación debe tender a cero.
- Queremos que tienda a cero "lentamente".
- ¿Qué es lo mejor que se puede lograr? (lo más lento)

Definition (Problema de Tammes)

Consiste en buscar una configuración (determinística) de n puntos en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, con distancia de separación asociada máxima:

$$\max_{\{x_1,\dots,x_n\}\subset S^2} \left\{ \min_{i\neq j} \|x_i - x_j\|_2 \right\}.$$

Separación óptima

- No se conoce algoritmo eficiente para resolver Tammes.

Separación óptima

- No se conoce algoritmo eficiente para resolver Tammes.
- Sin embargo, el valor óptimo asintótico, asociado a una solución X_n^*, cumple: (Habicht y Van der Waerden 1951):

$$sep(X_n^*) = \frac{C}{n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right), \quad C = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} \simeq 3.8093 \quad (n \to \infty).$$

Separación óptima

- No se conoce algoritmo eficiente para resolver Tammes.
- Sin embargo, el valor óptimo asintótico, asociado a una solución X_n^*, cumple: (Habicht y Van der Waerden 1951):

$$sep(X_n^*) = \frac{C}{n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right), \quad C = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} \simeq 3.8093 \quad (n \to \infty).$$

- Es decir: en el mejor caso, la distancia de separación tiende a cero como $\frac{1}{n^{1/2}}$, cuando $n \to \infty$. Esto motiva la siguiente

Separación óptima

- No se conoce algoritmo eficiente para resolver Tammes.
- Sin embargo, el valor óptimo asintótico, asociado a una solución X_n^*, cumple: (Habicht y Van der Waerden 1951):

$$sep(X_n^*) = \frac{C}{n^{1/2}} + O\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right), \quad C = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} \simeq 3.8093 \quad (n \to \infty).$$

- Es decir: en el mejor caso, la distancia de separación tiende a cero como $\frac{1}{n^{1/2}}$, cuando $n \to \infty$. Esto motiva la siguiente

Definition

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de puntos en S^2. Esta sucesión tiene distancia de separación de orden óptimo (asintótico), si existe $C > 0$, independiente de n, tal que:

$$sep(X_n) = \frac{C}{n^{1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right), \quad (n \to \infty).$$

Uniforme en S^2 - Distribución asintótica

Uniforme en S^2 - Distribución asintótica

Theorem (Cai, Fan y Jiang (USA - 2013))

Dados n puntos uniformes i.i.d. en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$*, la variable aleatoria* $nSep(X_n)$ *converge en distribución a* $X \sim Weibull\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, 2\right)$.

Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Sep(X_n) \leq \frac{\alpha}{n}\right) = F(\alpha), \quad \forall\ \alpha.$$

$$F(x) := \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{8}x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Uniforme en S^2 - Distribución asintótica

Theorem (Cai, Fan y Jiang (USA - 2013))

Dados n puntos uniformes i.i.d. en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, la variable aleatoria $nSep(X_n)$ converge en distribución a $X \sim Weibull\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, 2\right)$.
Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Sep(X_n) \leq \frac{\alpha}{n}\right) = F(\alpha), \quad \forall\ \alpha.$$

$$F(x) := \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{8}x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Corollary

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Sep(X_n) > \frac{\alpha}{n}\right) = e^{-\frac{1}{8}\alpha^2} \to 1, \ \textit{cuando}\ \alpha \to 0.$$

Uniforme en S^2 - Distribución asintótica

Theorem (Cai, Fan y Jiang (USA - 2013))

Dados n puntos uniformes i.i.d. en $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, la variable aleatoria $nSep(X_n)$ converge en distribución a $X \sim Weibull\left(\frac{1}{\sqrt{8}}, 2\right)$.
Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Sep(X_n) \leq \frac{\alpha}{n}\right) = F(\alpha), \quad \forall\ \alpha.$$

$$F(x) := \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{8}x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Corollary

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Sep(X_n) > \frac{\alpha}{n}\right) = e^{-\frac{1}{8}\alpha^2} \to 1, \ \text{cuando } \alpha \to 0.$$

Ejemplo ($\alpha = 0.1$): $\lim_{n\to\infty} P\left(Sep(X_n) > \frac{0.1}{n}\right) = e^{-\frac{0.1^2}{8}} \simeq 0.998.$

Uniforme - Esperanza asintótica

Theorem (Brauchart, Reznikov, Saff, Sloan, Wang y Womersley (Australia, Austria y EEUU - 2018))

X_n sucesión de puntos uniformes i.i.d. en la esfera S^2. Se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(nsep(X_n)\right) = C_2, \quad C_2 = \frac{\sqrt{8\pi}}{2} \simeq 2.5066.$$

Uniforme - Esperanza asintótica

Theorem (Brauchart, Reznikov, Saff, Sloan, Wang y Womersley (Australia, Austria y EEUU - 2018))

X_n sucesión de puntos uniformes i.i.d. en la esfera S^2. Se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(nsep(X_n)\right) = C_2, \quad C_2 = \frac{\sqrt{8\pi}}{2} \simeq 2.5066.$$

Proof.

- Trabajan con la distancia de separación geodésica.
- Equivalente a la euclideana cuando $n \to \infty$.
- "Extreme law for pairwise angles" juega un rol importante.

□

Uniforme - Esperanza asintótica

Theorem (Brauchart, Reznikov, Saff, Sloan, Wang y Womersley (Australia, Austria y EEUU - 2018))

X_n sucesión de puntos uniformes i.i.d. en la esfera S^2. Se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(nsep(X_n)\right) = C_2, \quad C_2 = \frac{\sqrt{8\pi}}{2} \simeq 2.5066.$$

Proof.

- Trabajan con la distancia de separación geodésica.
- Equivalente a la euclideana cuando $n \to \infty$.
- "Extreme law for pairwise angles" juega un rol importante.

$\square$

- Orden asintótico es $\frac{1}{n}$; peor que el orden óptimo $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
- Puntos X_n son independientes, por lo que no hay repulsión.

Distancia de separación versión conteo

Para configuraciones aleatorias con puntos **dependientes** entre sí, los resultados conocidos sobre la distancia de separación, se obtienen a través de la siguiente función:

Distancia de separación versión conteo

Para configuraciones aleatorias con puntos **dependientes** entre sí, los resultados conocidos sobre la distancia de separación, se obtienen a través de la siguiente función:

Definition (Distancia de separación versión conteo)

Cantidad de pares de puntos a distancia t o inferior:

$$G(t, X_n) := \#\{i < j \ / \ \|x_i - x_j\|_2 \leq t\}.$$

Distancia de separación versión conteo

Para configuraciones aleatorias con puntos **dependientes** entre sí, los resultados conocidos sobre la distancia de separación, se obtienen a través de la siguiente función:

Definition (Distancia de separación versión conteo)

Cantidad de pares de puntos a distancia t o inferior:

$$G(t, X_n) := \#\{i < j \ / \ \|x_i - x_j\|_2 \leq t\}.$$

Observación

- *Más "manejable" que la distancia de separación, dado que no involucra a la función mínimo.*
- $P\left(sep(X_n) > t\right) = P\left(G(t, X_n) = 0\right).$
- $P\left(sep(X_n) \leq t\right) = P\left(G(t, X_n) \geq 1\right).$

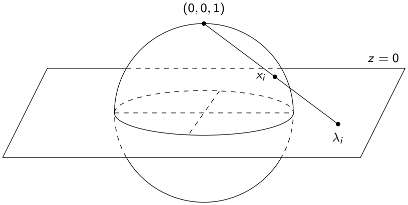
Spherical ensemble ("Conjunto Esférico")

Definition (spherical ensemble - Krishnapur 2006)

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices aleatorias independientes, con coeficientes complejos $N(0,1)$ independientes:

$$A_{ij} = a + ib, \quad a, b \sim N(0,1) \quad \text{independientes.}$$

Sean $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ los valores propios de $A_n^{-1} B_n$.
El spherical ensemble se obtiene mapeando los λ_i desde $\mathbb{C}$ a la esfera S^2, mediante la proyección estereográfica.



Spherical ensemble

Theorem (Alishahi y Zamani (Irán 2015))

$G\left(t=\frac{\alpha}{n^{3/4}}, X_n\right)$ *converge en distribución a* $X \sim$ *Poisson* $\left(\frac{\alpha^4}{64}\right)$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(G(t, X_n) \leq x\right) = P(X \leq x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ /\ P \text{ continua en } x.$$

Spherical ensemble

Theorem (Alishahi y Zamani (Irán 2015))

$G\left(t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}, X_n\right)$ converge en distribución a $X \sim Poisson\left(\frac{\alpha^4}{64}\right)$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(G(t, X_n) \leq x\right) = P(X \leq x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ /\ P \text{ continua en } x.$$

Corollary

$$\lim_{n\to\infty} P\left(sep(X_n) > \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) = e^{-\frac{\alpha^4}{64}}, \quad \forall\ \alpha > 0.$$

Spherical ensemble

Theorem (Alishahi y Zamani (Irán 2015))

$G\left(t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}, X_n\right)$ converge en distribución a $X \sim Poisson\left(\frac{\alpha^4}{64}\right)$:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(G(t, X_n) \leq x\right) = P(X \leq x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ /\ P \text{ continua en } x.$$

Corollary

$$\lim_{n\to\infty} P\left(sep(X_n) > \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) = e^{-\frac{\alpha^4}{64}}, \quad \forall\, \alpha > 0.$$

Proof.

Con $t = t_\alpha := \frac{\alpha}{n^{3/4}}$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(sep(X_n) > \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(G(t_\alpha, X_n) = 0\right) = e^{-\frac{\alpha^4}{64}}.$$

$\square$

Polinomios elípticos (Kostlan-Shub-Smale)

Definition (Polinomio elíptico de grado n)

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sqrt{C_k^n} z^k, \quad c_k = a_k + ib_k, \quad a_k, b_k \sim N(0,1), \text{ indep.}$$

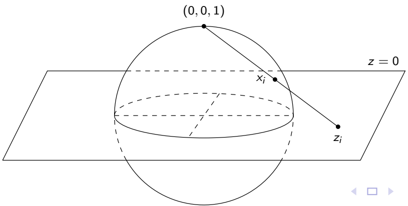
Polinomios elípticos (Kostlan-Shub-Smale)

Definition (Polinomio elíptico de grado n)

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sqrt{C_k^n} z^k, \quad c_k = a_k + ib_k, \quad a_k, b_k \sim N(0,1), \text{ indep.}$$

Definition (Ceros de polinomio elíptico (CPE))

Sean $\{z_1, \ldots, z_n\}$ los ceros de un polinomio elíptico de grado n. Se define $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, puntos aleatorios en S^2, como la proyección estereográfica de los z_i desde $\mathbb{C}$ a la esfera S^2.



Polinomios elípticos

- No hay resultados conocidos sobre la distribución asintótica de $sep(X_n)$, ni de $G(t, X_n)$, para ningún t (a diferencia del caso Uniforme y Spherical Ensemble).

Polinomios elípticos

- No hay resultados conocidos sobre la distribución asintótica de $sep(X_n)$, ni de $G(t, X_n)$, para ningún t (a diferencia del caso Uniforme y Spherical Ensemble).
- Se conoce la $E\left[G(t, X_n)\right]$; junto con la siguiente cota y su corolario.

Theorem (de la Torre, Marzo (España 2022))

Sea X_n un conjunto de n puntos obtenidos de CPE. Se cumple:

$$E[G(t, X_n)] \leq \frac{n^3 t^4}{128}, \quad \forall\ t \in [0, 2], \quad \forall\ n \geq 2.$$

Polinomios elípticos

- No hay resultados conocidos sobre la distribución asintótica de $sep(X_n)$, ni de $G(t, X_n)$, para ningún t (a diferencia del caso Uniforme y Spherical Ensemble).
- Se conoce la $E\left[G(t, X_n)\right]$; junto con la siguiente cota y su corolario.

Theorem (de la Torre, Marzo (España 2022))

Sea X_n un conjunto de n puntos obtenidos de CPE. Se cumple:

$$E[G(t, X_n)] \leq \frac{n^3 t^4}{128}, \quad \forall\ t \in [0, 2], \quad \forall\ n \geq 2.$$

- Para probar este resultado, se expresa $G(t, X_n)$ como una suma, y se utiliza el concepto de función de 2-correlación.

Prueba

Observación

$$G(t, X_n) = \#\{i < j \ / \ \|x_i - x_j\|_2 \le t\} = \sum_{i<j} 1_{\{\|x_i - x_j\|_2 \le t\}};$$

donde

$$1_A := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Prueba

Observación

$$G(t, X_n) = \#\{i < j \ / \ \|x_i - x_j\|_2 \leq t\} = \sum_{i<j} 1_{\{\|x_i - x_j\|_2 \leq t\}};$$

donde

$$1_A := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Esto permite escribir:

$$2E[G(t, X_n)] = E\left[\sum_{i\neq j} 1_{\|x_i - x_j\|_2 \leq t}\right].$$

Prueba

Definition (Función de 2-correlación en S^2)

Es una función $\rho_2 : S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}$, tal que:

$$E\left[\sum_{i \neq j} f(x_i, x_j)\right] = \int_{S^2 \times S^2} f(p,q)\rho_2(p,q)d\sigma(p,q), \quad \forall\ f.$$

Prueba

Definition (Función de 2-correlación en S^2)

Es una función $\rho_2 : S^2 \times S^2 \to \mathbb{R}$, tal que:

$$E\left[\sum_{i \neq j} f(x_i, x_j)\right] = \int_{S^2 \times S^2} f(p,q)\rho_2(p,q)d\sigma(p,q), \quad \forall\ f.$$

Por lo tanto:

$$2E[G(t, X_n)] = E\left[\sum_{i \neq j} 1_{\{\|x_i - x_j\|_2 \leq t\}}\right] =$$

$$= \int_{S^2 \times S^2} 1_{\{\|p-q\|_2 \leq t\}} \hat{\rho}_2(p,q)d\sigma(p,q).$$

Prueba

- Por invarianza rotacional, podemos tomar $q = \hat{q} := (0, 0, -1)$:

$$2E[G(t, X_n)] = \int_{S^2} 1_{\{\|p-\hat{q}\|_2 \leq t\}} \hat{\rho_2}(p, \hat{q}) d\sigma(p).$$

Prueba

- Por invarianza rotacional, podemos tomar $q = \hat{q} := (0, 0, -1)$:

$$2E[G(t, X_n)] = \int_{S^2} 1_{\{\|p-\hat{q}\|_2 \leq t\}} \hat{\rho_2}(p, \hat{q}) d\sigma(p).$$

- Parametrizando S^2 con la proyección estereográfica, y usando que $\hat{q} := (0, 0, -1) \to (0, 0)$:

$$2E[G(t, X_n)] = \pi \int_{\mathbb{C}} 1_{\left\{\frac{2|z|}{\sqrt{1+|z|^2}} \leq t\right\}} \rho_2(z, 0) dz = \text{cuentas (difíciles)}.$$

Prueba

- Por invarianza rotacional, podemos tomar $q = \hat{q} := (0,0,-1)$:

$$2E[G(t,X_n)] = \int_{S^2} 1_{\{\|p-\hat{q}\|_2 \le t\}} \hat{\rho_2}(p,\hat{q})d\sigma(p).$$

- Parametrizando S^2 con la proyección estereográfica, y usando que $\hat{q} := (0,0,-1) \to (0,0)$:

$$2E[G(t,X_n)] = \pi \int_{\mathbb{C}} 1_{\left\{\frac{2|z|}{\sqrt{1+|z|^2}} \le t\right\}} \rho_2(z,0)dz = \text{cuentas (difíciles)}.$$

Proposición (HKPV-2009)

La función de 2-correlación del proceso puntual CPE, es tal que:
$\rho_2(z,0) =$

$$\frac{n^2\left[\left(1-\frac{N|z|^2}{(1+|z|^2)^n-1}\right)^2(1+|z|^2)^{n-2}+\left(1-\frac{N|z|^2(1+|z|^2)^{n-1}}{(1+|z|^2)^n-1}\right)^2\right]}{\pi^2\left[(1+|z|^2)^n-1\right]}.$$

Corollary

$$P\left(sep(X_n) > \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) \geq 1 - \frac{\alpha^4}{128}, \quad \forall\ n \geq 2,\ \alpha > 0.$$

Corollary

$$P\left(sep(X_n) > \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) \geq 1 - \frac{\alpha^4}{128}, \quad \forall\ n \geq 2,\ \alpha > 0.$$

Proof.

Usando la relación entre G y $sep(X_n)$, y la desigualdad de Markov:

$$P(sep(X_n) \leq t) = P(G(t, X_n) \geq 1) \leq E[G(t, X_n)] \leq \frac{n^3 t^4}{128}.$$

En particular, tomando $t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}$, para $\alpha > 0$, se obtiene:

$$P\left(sep(X_n) \leq \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) \leq \frac{\alpha^4}{128}, \quad \forall\ n \geq 2,\ \alpha \in (0, 1].$$

$\square$

Corollary

$$P\left(sep(X_n) > \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) \geq 1 - \frac{\alpha^4}{128}, \quad \forall\ n \geq 2,\ \alpha > 0.$$

Proof.

Usando la relación entre G y $sep(X_n)$, y la desigualdad de Markov:

$$P(sep(X_n) \leq t) = P(G(t, X_n) \geq 1) \leq E[G(t, X_n)] \leq \frac{n^3 t^4}{128}.$$

En particular, tomando $t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}$, para $\alpha > 0$, se obtiene:

$$P\left(sep(X_n) \leq \frac{\alpha}{n^{3/4}}\right) \leq \frac{\alpha^4}{128}, \quad \forall\ n \geq 2,\ \alpha \in (0, 1].$$

$\square$

- El orden obtenido es $\frac{1}{n^{3/4}}$; que no es el óptimo: $\frac{1}{n^{1/2}}$.
- Pero es mejor que el de la Uniforme independiente: $\frac{1}{n}$.

Resultados numéricos

- Para cada cantidad de puntos $n \in [10 : 20 : 250]$:
  1. generar $k = 100$ muestras de la distribución deseada.
  2. calcular $sep(X_n)$ de cada muestra.
  3. calcular la media estadística de las k muestras.

Resultados numéricos

- Para cada cantidad de puntos $n \in [10 : 20 : 250]$:
  1. generar $k = 100$ muestras de la distribución deseada.
  2. calcular $sep(X_n)$ de cada muestra.
  3. calcular la media estadística de las k muestras.
- Ajustar (con mínimos cuadrados) la media estadística a un modelo teórico de la forma:

$$sep(X_n) = \frac{C}{n^r} \Leftrightarrow \log\left(sep(X_n)\right) = \log\left(C\right) - r\log(n).$$

Resultados numéricos

- Para cada cantidad de puntos $n \in [10 : 20 : 250]$:
  1. generar $k = 100$ muestras de la distribución deseada.
  2. calcular $sep(X_n)$ de cada muestra.
  3. calcular la media estadística de las k muestras.
- Ajustar (con mínimos cuadrados) la media estadística a un modelo teórico de la forma:

$$sep(X_n) = \frac{C}{n^r} \Leftrightarrow \log\left(sep(X_n)\right) = \log\left(C\right) - r\log(n).$$

- Interesa en particular el valor del orden r.

Resultados numéricos

- Para cada cantidad de puntos $n \in [10 : 20 : 250]$:
  1. generar $k = 100$ muestras de la distribución deseada.
  2. calcular $sep(X_n)$ de cada muestra.
  3. calcular la media estadística de las k muestras.
- Ajustar (con mínimos cuadrados) la media estadística a un modelo teórico de la forma:

$$sep(X_n) = \frac{C}{n^r} \Leftrightarrow \log\left(sep(X_n)\right) = \log\left(C\right) - r\log(n).$$

- Interesa en particular el valor del orden r.

	Uniforme	Spherical Ensemble	Ceros pol. elíp.	Óptimo
r	0.97	0.64	0.59	0.50
C	2.16	1.27	1.15	$\simeq 3.81$
tiempo	130.2 s	359.4 s	254.7 s	NC

Líneas de Trabajo

- Ceros de Polinomios Elípticos (CPE):

Líneas de Trabajo

- Ceros de Polinomios Elípticos (CPE):
  1. Hallar la distribución asintótica de $G(t, X_n)$:
     - CPE no es proceso determinantal
     - Buscar desigualdad alternativa a la de la prueba para el SE, que sí es determinantal (y se usa en la prueba).

Líneas de Trabajo

- Ceros de Polinomios Elípticos (CPE):
  1. Hallar la distribución asintótica de $G(t, X_n)$:
     - CPE no es proceso determinantal
     - Buscar desigualdad alternativa a la de la prueba para el SE, que sí es determinantal (y se usa en la prueba).
  2. Calcular (o acotar superiormente) el segundo momento de $G(t, X_n)$, para $t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}$. Permite usar la 2a cota de Markov:

$$P\left(sep(X_n) \leq t\right) = P\left(G(t, X_n) \geq 1\right) \leq \frac{E\left(G(t, X_n)^2\right)}{1^2}.$$

Líneas de Trabajo

- Ceros de Polinomios Elípticos (CPE):
  1. Hallar la distribución asintótica de $G(t, X_n)$:
     - CPE no es proceso determinantal
     - Buscar desigualdad alternativa a la de la prueba para el SE, que sí es determinantal (y se usa en la prueba).
  2. Calcular (o acotar superiormente) el segundo momento de $G(t, X_n)$, para $t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}$. Permite usar la 2a cota de Markov:

$$P\left(sep(X_n) \leq t\right) = P\left(G(t, X_n) \geq 1\right) \leq \frac{E\left(G(t, X_n)^2\right)}{1^2}.$$

- Resultados para otras distribuciones no mencionadas, como los Armónicos Esféricos (proceso determinantal).

Líneas de Trabajo

- Ceros de Polinomios Elípticos (CPE):
  1. Hallar la distribución asintótica de $G(t, X_n)$:
     - CPE no es proceso determinantal
     - Buscar desigualdad alternativa a la de la prueba para el SE, que sí es determinantal (y se usa en la prueba).
  2. Calcular (o acotar superiormente) el segundo momento de $G(t, X_n)$, para $t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}$. Permite usar la 2a cota de Markov:

$$P\left(sep(X_n) \leq t\right) = P\left(G(t, X_n) \geq 1\right) \leq \frac{E\left(G(t, X_n)^2\right)}{1^2}.$$

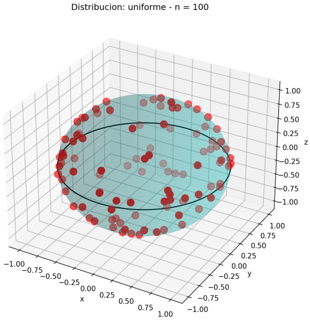
- Resultados para otras distribuciones no mencionadas, como los Armónicos Esféricos (proceso determinantal).
- Tratar directamente con la función mínimo de la definición de $sep(X_n)$ (sin pasar por $G(t, X_n)$)

Líneas de Trabajo

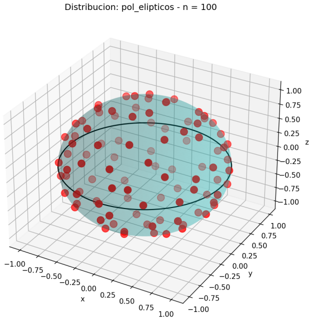
- Ceros de Polinomios Elípticos (CPE):
  1. Hallar la distribución asintótica de $G(t, X_n)$:
     - CPE no es proceso determinantal
     - Buscar desigualdad alternativa a la de la prueba para el SE, que sí es determinantal (y se usa en la prueba).
  2. Calcular (o acotar superiormente) el segundo momento de $G(t, X_n)$, para $t = \frac{\alpha}{n^{3/4}}$. Permite usar la 2a cota de Markov:

$$P\left(sep(X_n) \leq t\right) = P\left(G(t, X_n) \geq 1\right) \leq \frac{E\left(G(t, X_n)^2\right)}{1^2}.$$

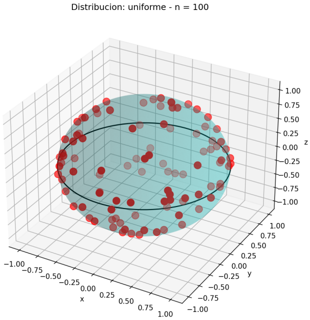
- Resultados para otras distribuciones no mencionadas, como los Armónicos Esféricos (proceso determinantal).
- Tratar directamente con la función mínimo de la definición de $sep(X_n)$ (sin pasar por $G(t, X_n)$)
- Analizar "radio de cobertura" (medida complementaria de distancia de separación). Involucra un máximo.



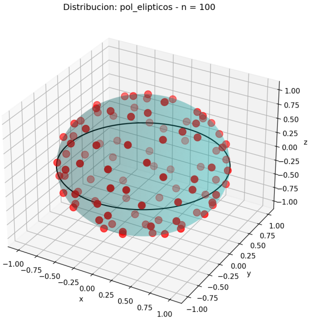
(a) Uniforme



(b) Ceros polinomios Elípticos



(a) Uniforme



(b) Ceros polinomios Elípticos

Gracias