

Grupo de Procesamiento Paralelo Aplicado.
Centro de Cálculo, Instituto de Computación

Diseño de redes de comunicaciones confiables

—

El problema de Steiner generalizado

Trabajo de investigación interna

Sergio Nesmachnow

Centro de Cálculo - Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Uruguay

Agosto 2002

Resumen

Este documento reúne conceptos vinculados con el diseño de redes de comunicaciones confiables mediante la resolución del problema de Steiner generalizado, relevados en el marco del proyecto "Algoritmos Genéticos Paralelos y su Aplicación al Diseño de Redes de Comunicaciones Confiables".

Diseño de redes de comunicaciones confiables

El problema de Steiner generalizado

Sergio Nesmachnow

Agosto 2002

Este documento reúne conceptos vinculados con el diseño de redes de comunicaciones confiables mediante la resolución del problema de Steiner generalizado, relevados en el marco del proyecto "Algoritmos Genéticos Paralelos y su Aplicación al Diseño de Redes de Comunicaciones Confiables".

El trabajo se organiza del modo que se describe a continuación. La sección 1 contiene una breve introducción al problema de diseño de redes de comunicaciones y la presentación del problema de Steiner generalizado (Generalized Steiner Problem – GSP). La sección 2 brinda una definición formal del problema GSP, su formulación matemática como un problema de Programación Lineal Entera y un ejemplo de resolución sobre un grafo dado. Casos particulares del GSP se presentan en la sección 3, reuniendo un breve estudio de complejidad del problema GSP y sus variantes y comentando algunas técnicas de resolución exacta y heurísticas encontradas en las referencias bibliográficas. Un relevamiento de las aplicaciones de las técnicas de programación evolutiva para la resolución de variantes del problema de Steiner se ofrece en la sección 4.

1 – Introducción

Una red de comunicaciones se compone de un conjunto de nodos emisores/receptores de información conectados por enlaces que permiten la transmisión de la información.

Uno de los principales problemas de construcción de redes de comunicaciones plantea el diseño de una topología de interconexión de sus nodos de modo que la red verifique ciertas características de confiabilidad. La confiabilidad de una red es una medida que evalúa la probabilidad de éxito en la comunicación entre pares de nodos.

La gran demanda de comunicaciones de datos en los últimos quince años ha propulsado el diseño y desarrollo de la infraestructura de redes. El continuo crecimiento en el tamaño de los problemas ha conducido a los investigadores a proponer alternativas a los enfoques exactos tradicionales para la resolución de problemas complejos. En este contexto, varias heurísticas se han aplicado al problema de diseño de redes de comunicaciones confiables. Entre ellas, las técnicas de programación evolutiva, y los algoritmos genéticos en particular, se han manifestado como métodos flexibles y robustos para la solución de los complejos problemas de optimización subyacentes al diseño de redes de comunicaciones.

Considerando una red de comunicaciones con ciertos nodos distinguidos, denominados terminales, el Problema de Steiner Generalizado (Generalized Steiner Problem – GSP) refiere al diseño de una subred de mínimo costo, que verifique ciertos requerimientos prefijados de conexión entre pares de nodos terminales.

La minimización del costo total de una red de comunicaciones y la maximización de su confiabilidad son objetivos contrapuestos. Por ello, un modelo que minimice el costo total de la red satisfaciendo el requisito de conexión entre todo par de nodos terminales sin agregar redundancia de caminos constituye una solución muy sensible a fallas en los nodos o en los enlaces que afectarían la operatividad de la red.

El GSP incorpora requisitos adicionales de conectividad sobre pares de nodos terminales, aplicándose al diseño de redes de comunicaciones en las cuales la alta confiabilidad queda garantizada por la existencia de diferentes caminos alternativos entre pares de nodos terminales, haciendo al funcionamiento de la red más resistente a fallas en sus componentes.

En las secciones siguientes se presenta el problema de Steiner y sus variantes, los modelos matemáticos y sus aplicaciones al diseño de redes de comunicaciones.

Este trabajo pretende brindar una introducción al problema de Steiner en el marco del proyecto "Algoritmos Genéticos Paralelos y su Aplicación al Diseño de Redes de Comunicaciones Confiables". La tesis de Robledo [Rob01] constituye un completo trabajo referente al problema de Steiner, sus modelos matemáticos y las técnicas de resolución exacta y heurísticas aplicables. Para el lector interesado en profundizar en los conceptos sobre el problema de Steiner que figuran en este trabajo, la tesis de Robledo [Rob01] es una excelente referencia.

2 – El problema de Steiner generalizado

2.1 – Formulaci3n del GSP

La siguiente formulaci3n del GSP se basa en la definici3n original de Krarup [Kra78], que puede encontrarse en Robledo [Rob01].

Sean los siguientes elementos :

Un grafo no dirigido $G=(V,E)$, con una matriz de costos c asociados a sus aristas.

Un conjunto distinguido de nodos T , llamados *terminales*, de cardinalidad $n_T=|T|$, tal que $2 \leq n_T \leq n$, siendo $n=|V|$ la cardinalidad del conjunto de v3rtices.

Una matriz $R=\{r_{ij}\}$ con $i,j \in T$, de dimensi3n $n_T \times n_T$, cuyos elementos son enteros positivos que indican los requerimientos de conectividad –cantidad de caminos– entre todo par de nodos terminales.

El problema GSP propone encontrar un subgrafo G_T de G , de costo m3nimo, tal que para todo par de nodos $i,j \in T$, $i \neq j$ estos sean localmente r_{ij} arista conexos (es decir, existen r_{ij} caminos disjuntos, que no comparten aristas, entre los nodos terminales i y j).

El problema GSP admite una formulaci3n an3loga, que exige la existencia de caminos nodo conexos (caminos que no comparten nodos).

Sobre los nodos no pertenecientes al conjunto de nodos terminales no se plantean requisitos de conectividad. Estos nodos, conocidos como *nodos de Steiner*, pueden formar parte o no de la soluci3n 3ptima, dependiendo de la conveniencia de utilizarlos.

2.2 – Modelo Matem3tico del GSP

A continuaci3n se presenta el modelo del problema GSP arista conexo, basada en la formulaci3n de Robledo [Rob01].

Para cada arista $(i,j) \in E$ se definen las variables x_{ij} (binaria), y la variable y_{ij}^{kl} que denota la utilidad de la arista (i,j) en la direcci3n de i hacia j en un camino que une a los nodos terminales k y l .

La soluci3n al problema GSP queda determinada por la resoluci3n del siguiente problema de Programaci3n Lineal Entera, que se denominar3 problema [GSP–PLE].

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ & \text{sujeto a:} \\ & x_{ij} \geq y_{ij}^{kl} + y_{ji}^{kl} \quad \forall (i,j) \in E, \forall k,l \in T, k \neq l \\ & \sum_{(k,j) \in E} y_{kj}^{kl} \geq r_{kl} \quad \forall k,l \in T, k \neq l \\ & \sum_{(i,l) \in E} y_{il}^{kl} \geq r_{kl} \quad \forall k,l \in T, k \neq l \\ & \sum_{(p,j) \in E} y_{pj}^{kl} - \sum_{(i,p) \in E} y_{ip}^{kl} \geq 0 \quad \forall k,l \in T, \forall p \in V \setminus \{k,l\} \\ & x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in E \\ & y_{ij}^{kl} \geq 0 \quad \forall i,j : (i,j) \in E, \forall k,l \in T, k \neq l \end{aligned}$$

Cuadro 1: Modelo matem3tico del GSP como problema de Programaci3n Lineal Entera

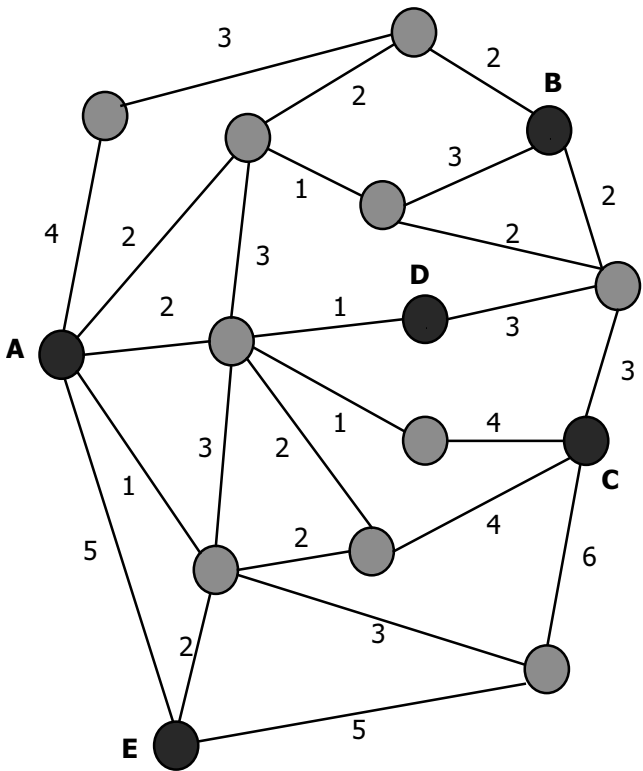
Llamando $U=\{u_{ij}\}$ a la solución óptima del problema [GSP-PL], el conjunto de aristas determinado por $\{(i,j) \in E / u_{ij} = 1\}$ define el subgrafo solución G_{SOL} .

Una formulación análoga puede obtenerse para la versión nodo conexo del GSP, utilizando la técnica de partición de nodos para transformar el grafo G.

2.3 – Un ejemplo de problema GSP

Un ejemplo de problema de Steiner generalizado sobre un grafo G se ofrece a continuación.

Sea el grafo G de la figura 1, en el cual se han marcado con color azul (oscuro) los nodos terminales, sobre los cuales se definen los requerimientos de conectividad indicados en la tabla 1, mientras que los nodos de Steiner se han marcado con color verde (claro).



Requerimientos de caminos

$A \leftrightarrow B$	3
$B \leftrightarrow D$	2
$A \leftrightarrow E$	1
$A \leftrightarrow C$	3
$B \leftrightarrow C$	3
$A \leftrightarrow D$	2

Tabla 1: Requerimientos de caminos sobre los nodos terminales del grafo G

Utilizando la notación del modelo matemático del cuadro I, se tiene que

$$\begin{aligned} r_{AB} &= 3, r_{AC} = 3, \\ r_{BD} &= 2, r_{BC} = 3 \\ r_{AE} &= 1, r_{AD} = 2. \end{aligned}$$

Figura 1 : Grafo G sobre el cual se resolverá el problema de Steiner con requerimientos r_{ij}

La solución al problema de Steiner planteado sobre el grafo G se ofrece en la figura 2, en la siguiente página.

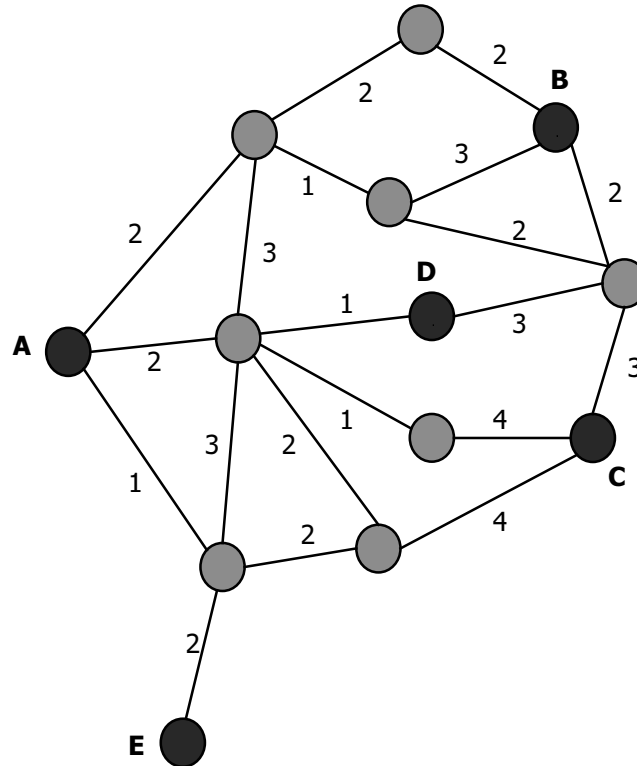


Figura 2 : Solución al problema de Steiner con requerimientos r_{ij} sobre el grafo G

3 – Variantes y casos particulares del problema de Steiner

3.1 – Variantes del problema de Steiner

La complejidad del problema de Steiner obedece a la generalidad de su planteo, que exige requerimientos variables de conectividad entre pares de nodos, lo cual implica la existencia de un número variable de caminos disjuntos en la solución.

Ciertas versiones del problema simplifican este requerimiento, exigiendo una cantidad fija de caminos disjuntos entre pares de nodos terminales.

Esta clase de problemas son conocidos como *problemas de k conexión*, siendo k el número de caminos disjuntos requeridos.

El caso más simple de problema de Steiner es aquel que solo exige un camino entre todo par de nodos ($k=1$). La solución de este problema, conocido como *problema del árbol de Steiner*, corresponde a un árbol de cubrimiento de costo mínimo del grafo G .

Estas variantes del problema de Steiner se definen y comentan a continuación.

3.1.1 – Problemas de k conexión

Los problemas de k conexión son casos especiales del GSP en los cuales los requerimientos de cantidad de caminos son constantes para todo par de nodos terminales.

Estos problemas son usuales en aplicaciones donde se desea reducir los costos de enlaces extra entre nodos de la red, manteniendo un número bajo de caminos disjuntos entre todo par de nodos. Como ejemplo, en el diseño de redes de comunicación telefónicas, una solución 2 arista conexas permite introducir el nivel mínimo de redundancia de caminos entre todo par de nodos terminales, limitando la cantidad de enlaces necesarios, los cuales usualmente tienen un costo elevado.

La resolución de un problema de k conexión involucra hallar un subgrafo de cubrimiento k arista conexo de un grafo dado. Por grafo k arista conexo se entiende aquel que no puede transformarse en desconexo removiendo menos de k aristas. Una red de comunicaciones k arista conexa continuará funcionando correctamente, garantizando la comunicación entre todo par de nodos, aún luego de $k-1$ fallos de enlace.

Una formulación del problema de k conexión como problema de programación lineal puede encontrarse en el trabajo de Grötschel, Monma y Stoer [GMS95a].

El problema de k conexión ha sido estudiado extensamente. En particular, el caso $k=2$, que propone el diseño de un grafo 2 conexo que cubre un conjunto de nodos terminales con costo mínimo es ampliamente considerado como modelo de redes de comunicaciones y transporte. Monma, Munson y PulleyBlank [MMP90], estudiaron el problema de 2 conexión, para el caso en que donde la función de costo cumple la desigualdad triangular entre aristas, una referencia a este trabajo puede encontrarse en Robledo [Rob01].

El caso genérico del problema de k conexión, con $k \geq 3$ es estudiado por Bienstock, Brickell y Monma [BBM90].

3.1.2 – Problema del árbol de Steiner

El problema del árbol de Steiner es un caso particular del problema de k conexión, para el caso $k=1$. Ha sido extensamente estudiado como uno de los problemas clásicos de optimización combinatoria.

El requerimiento de conexión simple entre pares de nodos se soluciona encontrando un árbol de cubrimiento del conjunto distinguido de nodos terminales, que tenga costo mínimo.

Existe una gran diversidad de algoritmos exactos y heurísticas que resuelven el problema del árbol de Steiner, al respecto puede consultarse el trabajo de Robledo [Rob01]. Dentro de los algoritmos exactos es posible mencionar los de enumeración de árboles de cubrimiento, los de enumeración de topologías, algoritmos basados en programación dinámica, y en relajación lagrangeana entre otros. Las heurísticas empleadas utilizan técnicas golosas siguiendo caminos de costo mínimo o costo promedio, estrategias de contracción o de cubrimiento.

Complejidad del problema de Steiner

El problema generalizado de Steiner es NP-Completo, tal cual fue demostrado por Krarup [Kra78] tanto para el caso de requerimientos de caminos de aristas disjuntas como para caminos de nodos disjuntos.

El problema de k conexión es también NP difícil, tal cual prueban Luebke y Provan reduciendo una forma especial del problema TSP a la versión planar del problema de 2 conexión, o de acuerdo a la referencia de Robledo [Rob01], es posible reducir el problema de determinar un ciclo hamiltoniano al problema 2 conexo

El propio problema del árbol de Steiner, que plantea la restricción menos general en cuanto a caminos, es NP completo, de acuerdo a la prueba de Karp [Kar72]. Inclusive versiones simplificadas, como los casos con costos uniformes de las aristas, grafo planar, o bipartito en terminales y no terminales, aún son problemas NP difíciles.

Como consecuencia de la complejidad de las versiones del problema de Steiner, la resolución utilizando algoritmos exactos se hace cada vez menos tratable al aumentar el tamaño del problema. Por tal motivo, se buscan soluciones alternativas utilizando heurísticas que permitan encontrar buenas soluciones en tiempos razonables.

Una variada gama de enfoques se han utilizado para la resolución del problema del árbol de Steiner. A manera de ejemplo, es posible citar las heurísticas aplicables al problema del árbol de Steiner detalladas en los trabajos de Werneck [Wer01], Poggi y Werneck [PoW02] y Poggi et al. [Pog01]

Un algoritmo de aproximación de factor 2 es propuesto por Jain en su trabajo de 1998 [Jai98]. Hajba [Haj02] adopta la idea proponiendo una variante para el problema de k – conexión.

Casos Particulares del problema de Steiner generalizado

Retornando al problema generalizado de Steiner, ciertos casos particulares son de interés por reducir su complejidad a un orden polinomial.

Algunos casos particulares se comentan a continuación, basados en la reseña de Robledo [Rob01].

Problema GSP con costos uniformes

Si los costos asociados a las aristas del grafo G son idénticos, el problema GSP se resuelve hallando un subgrafo con mínimo número de aristas que satisfaga los requerimientos r_{ij} de conectividad para los nodos terminales.

Robledo [Rob01] presenta un algoritmo de orden polinomial original de Couch-Frank para resolver el problema reducido con costos idénticos. Esta solución permite la existencia de aristas paralelas entre nodos. El caso en que no se permiten aristas paralelas en la construcción de la solución ha sido atacado solo en la versión del problema de k conexión, con requerimientos de conectividad uniformes entre nodos.

GSP con Costos Booleanos

El caso del GSP con matriz de costos booleana, es conocido como Augmentation Problem, cuya formulación propone hallar el mínimo número de aristas tal que al agregarlas al grafo se satisface los requerimientos de conexión dados por una matriz R .

Las versiones 2-arista-conexa de este problema fueron estudiadas por Eswaran y Tarjan [EsT76] y Goldner y Rosenthal [GoR79]. Watanabe y Nakamura [WaN87] analizaron el caso de k -conexión.

El caso más genérico de Augmentation Problem con requerimientos de conexión variables es estudiado por Kajitani, Ueno y Wada [KUW88], Cai y Sun [CaS89] y Frank [Fra90] quien presenta algoritmos de resolución de orden polinomial.

El algoritmo de menor complejidad conocido hasta el momento, que incrementa la conectividad de aristas de un grafo a un nivel k en tiempo polinomial fue propuesto por Gusfield, Martel y Naor. [GMN90]. Salvo este último algoritmo, los demás permiten soluciones que utilicen aristas paralelas.

4 – Técnicas evolutivas aplicadas a la resolución del problema de Steiner

De acuerdo al relevamiento realizado, es posible afirmar que no existen antecedentes de aplicación de los Algoritmos Genéticos al problema generalizado de Steiner.

Existen varias referencias a aplicaciones de técnicas evolutivas al problema del árbol de Steiner y sus variantes.

El primer trabajo data de 1989, fecha en que Hesser, Männer y Stucky [HOM89], proponen la codificación de un algoritmo genético para la optimización de árboles de Steiner a partir árboles de cubrimiento. El problema resuelto en este caso utiliza el algoritmo exacto para hallar los árboles de cubrimiento con $O(n \log n)$ operaciones y luego utiliza un algoritmo genético para optimizar el costo de las variantes obtenidas al agregar puntos de Steiner. El algoritmo codifica árboles de Steiner utilizando cromosomas con la información de posiciones de los puntos de Steiner, utiliza como función de fitness el costo asociado con el árbol de Steiner que es posible construir con los puntos originales y los puntos de Steiner codificados en el individuo, y el algoritmo es configurado de acuerdo a los valores de los parámetros que sugiere Grefenstette [Gre86]. Los resultados se comparan con los obtenidos aplicando la técnica de optimización de Simulated Annealing y el algoritmo de Rayward-Smith y Clare (RCA), uno de las mejores heurísticas desarrolladas particularmente para el problema. El algoritmo genético propuesto mostró una performance similar a la del algoritmo RCA, siendo este altamente especializado para la resolución del problema.

En 1993, Kapsalis, Rayward-Smith y Smith [KRS93] trabajaron sobre una variante del problema del árbol de Steiner, conocida como Problema de Steiner Rectilíneo. En este problema el grafo subyacente es planar, en el sentido de que los nodos terminales, puntos a conectar mediante el árbol de Steiner, se suponen ubicados en el plano euclídeo. Adicionalmente, las conexiones entre nodos terminales y/o puntos de Steiner deben ser horizontales o verticales. Este problema tiene aplicación directa en el diseño de redes de comunicaciones, sistemas mecánicos en edificaciones, tableros de circuitos y paquetes VLSI. El problema consiste en hallar el árbol de Steiner rectilíneo de costo mínimo. El algoritmo genético de Kapsalis, Rayward-Smith y Smith trabaja sobre un espacio de individuos que incluye soluciones no factibles al problema, sobre los cuales se aplica un término de penalización al evaluar la función de fitness.

El mismo problema rectilíneo de Steiner fue estudiado por Julstrom en sus trabajos de 1993 [Jul93] y 1994 [Jul94]. Julstrom propone un algoritmo genético que utiliza una codificación mixta (binaria y no-binaria) basada en un mapeo de árboles de cubrimiento de n vértices con strings de largo $n-2$ derivado de una prueba de la fórmula de Cayley original de Prüfer. Un operador de cruzamiento modificado se introduce para evitar la excesiva pérdida de material genético en la descendencia. En el trabajo inicial de Julstrom [Jul93] el algoritmo genético no permitía alcanzar la misma calidad de soluciones que otras técnicas heurísticas. Posteriormente, el autor propuso un algoritmo genético híbrido [Jul01] que utiliza una heurística específica para la construcción de la población inicial sobre la cual opera el algoritmo genético. Esta mejora permite obtener resultados de mayor calidad y más eficientemente que el algoritmo genético estándar, comparables con los resultados de técnicas heurísticas específicas para el problema.

En su tesis de doctorado de 1994 [Esb94], publicada en 1995 [Esb95], Esbensen propuso alternativas a la anterior propuesta de Kapsalis, al implementar un algoritmo genético para resolver el problema del árbol de Steiner. Esbensen impuso el trabajo con soluciones factibles, evitando términos de penalización en la función de fitness y utilizando un operador genético de inversión, que reordena las componentes de un vector genotipo, tomando en cuenta una cierta probabilidad de inversión. Sobre la idea del trabajo inicial, Esbensen y Mazumder [EsM94] presentaron un algoritmo genético para el problema del árbol de Steiner y su aplicación al diseño de circuitos VLSI. Basando su codificación en la heurística determinística DNH propuesta por Kou et al. [Kou81], el algoritmo genético mostró una calidad superior en las soluciones obtenidas respecto a dos heurísticas bien conocidas para el problema del árbol de Steiner, siendo competitivo en términos de performance.

Diversos problemas sobre redes de comunicaciones tienen como solución el problema del árbol de Steiner, y sobre ellos se han aplicado algoritmos genéticos.

En el caso de Zhu, Wainwright y Schoenefeld [ZWS98], utilizaron un híbrido con técnicas heurísticas para hallar árboles de Steiner, entre las cuales se menciona la heurística evolutiva propuesta por Esbensen y un algoritmo genético propio para la optimización de requerimientos de conexiones multipunto sobre la red de comunicaciones.

Voß y Gutenschwager [VoG98] investigaron sobre la hibridación entre algoritmos genéticos y una técnicas de inteligencia artificial, la técnicas de troceado. Las técnicas de aprendizaje por troceado se basan en un conjunto de hipótesis específicas que se utilizan para hallar relaciones de alto nivel en el espacio de búsqueda. En el contexto de los algoritmos genéticos, los esquemas son definidos por troceado, combinando trozos superiores de forma que sean separables por el operador de cruzamiento con una probabilidad baja. Las investigaciones sobre el mecanismo híbrido se realizan sobre el problema del árbol de Steiner.

Hwang, Do y Yang [HDY00] desarrollaron un algoritmo genético para resolver el problema del árbol de Steiner, aplicado al diseño de una solución para el problema de ruteo multicasting. En su propuesta, cada cromosoma codifica rutas entre un nodo origen y un conjunto de nodos destino, de acuerdo al método de codificación propuesto en el trabajo de Hiramatsu, Shimamoto y Yamasaki [HSY93].

Sobre el mismo problema del ruteo multicasting, Xianwei, Changjia y Gang propusieron un algoritmo genético híbrido en su trabajo de 2000 [XCG00]. El AG implementado utiliza una representación binaria que indica el conjunto presente de nodos de Steiner en la solución que representa el individuo. La propuesta combina a una heurística para decodificar el genotipo binario y construir el árbol de Steiner asociado a la representación, diversas técnicas estándar de reducción de redes y un mecanismo evolutivo para minimizar el costo del árbol de Steiner. Los autores reportan la obtención de soluciones de mejor calidad que las obtenidas con heurísticas deterministas y con Simulated Annealing, en tiempos de ejecución moderados.

Galiasso y Wainwright [GaW01] propusieron un algoritmo genético híbrido para el problema de ruteo multipunto. La propuesta extiende el trabajo de Zhu et al. [ZSW98] combinando la heurística propuesta por Esbensen [Esb94] para hallar árboles de Steiner y un algoritmo genético para determinar el ordenamiento óptimo de procesamiento de requerimientos y porcentajes de ancho de banda asignados a diferentes caminos de comunicación.

Aplicado al problema de diseño de circuitos VLSI, Wakabayashi [Wak02] presentó recientemente un algoritmo genético para la resolución del problema del árbol de Steiner rectilíneo. El cromosoma solamente codifica la información topológica del árbol de Steiner. Conjuntamente con ésta, se utiliza la información geométrica determinada durante la evaluación de la función de fitness para la construcción del árbol de Steiner siguiendo un método constructivo similar al método de Kruskal. La función de fitness cuantifica el costo de la red y la máxima demora entre origen y destino. Un mecanismo especial de cruzamiento, denominado intercambio de subárboles, es utilizado. El algoritmo se presenta como efectivo en términos de calidad de soluciones de los árboles rectilíneos de Steiner obtenidos, aunque se menciona que la performance es mala comparada con algoritmos estándar, y se propone investigar sobre su mejora en el futuro.

Referencias bibliográficas

- [ASW94] – Designing telecommunications networks using genetic algorithms and probabilistic minimum spanning trees.
Faris N. Abuali , Dale A. Schoenefeld , Roger L. Wainwright
Proceedings of the 1994 ACM Symposium on Applied Computing, Phoenix, Arizona, USA,
pp. 242-246, 1994.
- [BBM90] – On the Structure of Minimum-Weight k-Connected Spanning Networks.
Daniel Bienstock, Ernest F. Brickell, Clyde L. Monma
SIAM Journal on Discrete Mathematics 3(3), pp. 320-329, 1990
- [CCP00a] – Digital Data Networks Design Using Genetic Algorithms
Chao-Hsien Chu , Hsingua Chou, G. Premkumar
European Journal of Operational Research, Vol. 127, No. 1 (2000), pp. 140-158.
- [CCP00b] – Telecommunications Network Design Decision: A Genetic Algorithm Approach
G. Premkumar, C. Chu, H. Chou
Decision Sciences, Vol. 31, No. 2 (Spring 2000), pp. 483-506.
- [CCP01] – Genetic Algorithm for Communication Network Design - An Empirical Study of the Factors that Influence Performance
H. Chou, G. Premkumar, C. Chu,
IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. 5, No. 3 (June 2001), pp. 236-249.
- [Coo97] – Efficiently Solving the Euclidean Steiner Tree Problem in Two Dimensions
Jonathan Coombs
Computing and System Sciences, Taylor University, Upland, IN.
- [Esb94] – Computing Near-Optimal Solutions to the Steiner Problem in a Graph Using a Genetic Algorithm
Henrik Esbensen
Ph. D. Tesis, University of Aarhus, Department of Computer Science, febrero 1994.
Disponible en Networks, 26:173-185, 1995.
- [EsM94] – A Genetic Algorithm for the Steiner Problem in a Graph.
Henrik Esbensen, Pinaki Mazumder
EDAC-ETC-EUROASIC 1994 pp. 402-406.
- [Est76] – Augmentation Problems.
Kapali P. Eswaran, Robert Endre Tarjan
SIAM Journal on Computing. 5(4): pp. 653-665, 1976.
Citado en [Rob01]
- [CaS89] – The minimum augmentation of any graph to a k-edge-connected graph
G. R. Cai , Y. G. Sun.
Networks, Vol. 19, 1989, pp. 151-172.
Citado en [Rob01]
- [Fra90] – Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements
A. Frank.
Reporte técnico del Institute for Operations Research, University of Bonn, 1990.
Citado en [Rob01]
- [GMN90] – A fast algorithm for optimally increasing the edge-connectivity
D. Gusfield, Ch. Martel, D. Naor.
Proceedings of Foundation of Computer Science ' 90, pp. 698-707, 1990.
Citado en [Rob01]
- [Gre86] – Optimization of control parameters for genetic algorithms
J Grefenstette.
IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, v.16 n.1, pp.122-128, 1986
Citado en [HMS89]

- [FSV98] – Ring Network Design for Metropolitan Area Networks.
A. Fink, G. Schneidereit and S. Voß.
Technische Universität Braunschweig, Marzo 1998.
- [GaW01] – A hybrid genetic algorithm for the point to multipoint routing problem with single split paths.
Pablo Galiasso, Roger L. Wainwright
ACM Symposium on Applied Computing (SAC) 2001, pp. 327-332
- [GMS91] – Polyhedral Approaches to Network Survivability
Martin Grötschel, Clyde L. Monma, Mechthild Stoer
AMS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 5, pp. 121-141 1991.
- [GMS95a] – Polyhedral and Computational Investigations for Designing Communication Networks with High Survivability Requirements
Martin Grötschel, Clyde L. Monma, Mechthild Stoer
Journal Operations Research, 43:6, pp. 1012-1024, 1995
- [GMS95b] – Design of Survivable Networks
Martin Grötschel, Clyde L. Monma, Mechthild Stoer
Network Models, Handbooks in Operations Research and Management Science 7,
North-Holland, pp. 617-672, 1995.
- [GoR77] – Smallest augmentation to biconnect a graph
A. Goldner, A. Rosenthal and,
SIAM Journal on Computing, Vol. 46, 1977, pp. 55-66.
Citado en [Rob01]
- [Haj02] – Approximation algorithms for finding a k-connected subgraph of a graph with minimum weight.
Tamás Hajba
Hungarian Electronic Journal,
online <http://heja.szif.hu/ANM/ANM-001130-A/anm001130a.pdf>, consultado agosto 2002.
- [HDY00] – Multicast Routing Based on Genetic Algorithms
Ren-Hung Hwang, Wei-Yuan Do, Shyi-Chang Yang
Journal of Information Science and Engineering, Vol. 16, No. 6, pp. 885-901, 2000.
- [HMO91] – On Steiner Trees and Genetic Algorithms.
J. Hesser, R. Männer, O. Stucky
Parallelism, Learning, Evolution, Lecture Notes in Comp. Science. 565, pp. 509-525, 1991.
- [HOM89] – Optimization of Steiner Trees by Genetic Algorithms;
J. Hesser, R. Männer, O. Stucky
Proceedings of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms, pp. 231-236,
Faifax, VA, 1989.
- [HSY93] – A dynamic routing control based on a Genetic Algorithm
A. Hiramatsu, N. Shimamoto, K. Yamasaki.
IJCNN'93, pp. 1123-1128, 1993.
- [Jai98] – A Factor 2 Approximation Algorithm for the Generalized Steiner Network Problem,
K. Jain.
Combinatoria, 2001, Vol 21-1, pp. 39-60, disponible en FOCS 1998, pp.448-457.
- [Jul93] – A genetic algorithm for the rectilinear Steiner problem.
Bryant A. Julstrom
Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, pp. 474-480.
Morgan Kaufmann Publishers, 1993.
- [Jul94] – Seeding the population: improved performance in a genetic algorithm for the rectilinear Steiner problem.
Bryant A. Julstrom
ACM Symposium on Applied Computing (SAC) 1994, pp. 222-226

- [Jul01] – Encoding rectilinear Steiner trees as lists of edges.
Bryant A. Julstrom
ACM Symposium on Applied Computing (SAC) 2001, pp. 356-360
- [Kar72] – Reducibility among combinatorial problems
R. M. Karp
Complexity of Computer Communications, pp. 85-103, Plenum Press, 1972.
- [Kra78] – Generalized Steiner problem
J. Krarup, unpublished note, 1978.
Citado en [Rav93]
- [KRS93] – Solving the graphical Steiner tree problem using genetic algorithms.
Kapsalis, Rayward-Smith and Smith
Journal of the Operational Research Society 44, 1993.
- [LuP00] – On the structure and complexity of the 2-connected Steiner network problem in the plane.
E.L. Luebke, J. S Provan
Operations Research Letters 26 2000, pp. 111-116.
- [Kou81] – A Fast Algorithm for Steiner Trees
L. Kou, G. Markowsky, L.Berman.
Acta Informatica, Springer-Verlag, vol. 15, pp.141-145, 1981.
Citado en [EsM94]
- [KUW88] – Minimum augmentation of a tree to a k-edge-connected graph
S. Ueno, Y. Kajitani, H. Wada.
Networks, Vol. 18, pp. 19-25, 1988.
Citado en [Rob01]
- [May97] – Genetic Algorithms and Multi-Coordination in Network Design
Robert R. Meyer
DIMACS Workshop on Network Design: Connectivity and Facilities Location, 1997
- [MMP90] – Minimum-weight two connected spanning networks,
C.L. Monma, B.S. Munson, and W.R. Pulleyblank
Mathematical Programming 46, pp. 153-171, 1990
- [Pog01] – Hybrid local search for the Steiner problem in graphs
M. Poggi de Aragão, C. C. Ribeiro, E. Uchoa, Renato F. Werneck,.
Extended Abstracts of the 4th Metaheuristics International Conference (MIC 2001),
pp. 429-433, Porto, Portugal, 2001.
- [PoW02] – On the implementation of MST-based heuristics for the Steiner problem in graphs
M. Poggi de Aragão, Renato F. Werneck,.
Proceedings of the 4th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'02)
San Francisco, 2002.
- [Rob01] – Diseño Topológico de Redes, Casos de Estudio: The Generalized Steiner Problem
y The Steiner 2-Edge-Connected Subgraph Problem.
F. Robledo
Tesis de Maestría en Informática, PEDECIBA Informática, 2001.
- [Rav93] – Steiner Trees and Beyond: Approximation Algorithms for Network Design.
Ramamurthy Ravi
Technical Report CS-93-41, Brown University Computer Science, 1993.
Ph. D Thesis, 1994.
- [SaT95] – Mathematical programming in a hybrid genetic algorithm for Steiner point problems
Pulin Sampat, David J. Thuent
Proceedings of the 1995 ACM symposium on Applied computing
ACM Press, NY, USA, pp. 357 – 363, 1995.

- [Vaz00] – Recent results on approximating the Steiner tree problem and its generalizations
Vijay V. Vazirani
Theoretical Computer Science March 2000, Volume 235 Issue 1.
- [VoG98] – A chunking based genetic algorithm for the Steiner tree problem in graphs.
Voß, K. Gutenschwager
Network Design: Connectivity and Facilities Location, DIMACS Series in Discrete
Mathematics and Theoretical Computer Science 40, AMS, Providence, 1998, pp. 335-355.
- [Wak02] – A Genetic Algorithm for the Rectilinear Steiner Tree Problem in VLSI Interconnect Layout
Shin'ichi Wakabayashi
Information Processing Society of Japan – IPSJ JOURNAL Vol.43 No.05 – 019, Mayo 2002.
- [WaN87] – Edge-connectivity augmentation problems
T. Watanabe, A. Nakamura
Computer and System Sciences, Vol. 35, pp. 96-144, 1987.
Citado en [Rob01]
- [Wer01] – Problema de Steiner em Grafos: Algoritmos Primais, Duais e Exatos;
Renato F. Werneck
Master's Thesis, Department of Informatics, PUC-Rio, Julio 2001.
- [XCG00] – A Genetic Algorithm for Multicasting Routing Problem
Zhou Xianwei, Chen Changjia, Zhu Gang
Northern Jiaotong Univ, Beijing, China, 2000
Proceedings of the International Conference on Communication Technology - ICCT 2000
- [ZSW98] – A Genetic Algorithm for the Point to Multipoint Routing Problem with Varying Number of
Requests
L. Zhu, D. Schoenefeld, R. Wainwright
Proceeding of the 1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computing
(ICEC'98), Anchorage, Alaska, Mayo 1998.