

Relatividad Especial

Gonzalo Abal¹ - agosto 2003

1. Antecedentes

a) La Física a fines del siglo XIX.

- i. Conceptos de espacio y tiempo.
- ii. Concepto de luz.
- iii. El principio de la Relatividad y la transformación Galileana de velocidades (TG).
- iv. Implicancias de la no covarianza del electromagnetismo.

b) Evidencia empírica contra el concepto de éter.

- i. Aberración estelar
- ii. Experiencia de Michelson-Morley
- iii. Opciones disponibles en el 1900.

2. El postulado de Einstein

- a) Diagramas de Minkowski.
- b) Transformaciones de Lorentz (TL).
- c) Consecuencias cinemáticas de las TL
 - i. Cuadrivectores.
 - ii. Clasificación de intervalos en el espacio-tiempo.
 - iii. Simultaneidad.
 - iv. Dilatación del tiempo.
 - v. Contracción de Lorentz.
 - vi. Transformación relativista de velocidades.

3. Dinámica Relativista

- a) 4 vectores velocidad y cantidad de movimiento.
- b) Energía Relativista.
- c) Principios de Conservación. Colisiones.

Bibliografía:

- A.P. French, Relatividad Especial, MIT Physics course, Reverté.
- R. Resnick, Introducción a la Teoría de la Especial de la Relatividad, LIMUSA
- J.A. Wheeler y J. Taylor, Spacetime Physics, FREEMAN Co. (en inglés)
- Electrodinámica Clásica, Jackson.
- Artículos originales: <http://www.fing.edu.uy/if/cursos/fismod>

¹ Se agradece comunicar erratas y demás comentarios sobre estas notas a: abal@fing.edu.uy.

1. Antecedentes

a) La Física a fines del siglo XIX.

A fines del s. XIX, la Mecánica Newtoniana estaba firmemente establecida. Se había desarrollado ampliamente la Termodinámica por parte de J. Maxwell, Boltzmann y Gibbs, inclusive con primeros pasos a nivel de sus fundamentos estadísticos. La Teoría Electromagnética ya estaba unificada gracias al trabajo de Maxwell y se reconocían los efectos ópticos como enmarcados dentro de la misma, en el límite de longitudes de onda muy pequeñas.

i. Los conceptos de espacio y tiempo.

Estos conceptos se mantenían tal y como los enunció Newton en sus “Principia”:

- *No definiré tiempo, espacio, lugar y movimiento ya que estos conceptos son bien conocidos por todos.*
- *El espacio absoluto, por su propia naturaleza, sin relación con nada externo se mantiene siempre similar e inamovible.*
- *El tiempo verdadero absoluto, el tiempo matemático, fluye sin variación ni relación con nada externo, debido a su propia naturaleza.*

Evidentemente, son los conceptos “naturales” con los cuales todos crecemos y que nos resultan mas bien obvios. Sin embargo, como veremos, la evidencia física forzó, a comienzos del s. XX, una profunda revisión de estos conceptos de tiempo y espacio.

ii. Evolución del concepto de luz.

La luz tiene un rol particularmente relevante en el surgimiento de las nuevas ideas de tiempo y espacio, por lo que realizamos un breve repaso de cómo se la interpretó a lo largo del tiempo.

El primer registro sobre un esfuerzo por interpretar la naturaleza de la luz se remonta a Pitágoras, que propone una teoría corpuscular en el siglo VI a.c. Según Pitágoras, una fuente de luz emite partículas luminosas que se propagan en línea recta hasta encontrar un obstáculo. Estas ideas explicaban adecuadamente las sombras y el hecho de que la luz pueda atravesar el vacío. Este modelo corpuscular se mantuvo firme por casi 2000 años, hasta el siglo XVII.

Recién a mediados del siglo XVII aparecen observaciones de la descomposición de la luz blanca en diversos colores, al reflejarse en películas delgadas de aceite. R. Hooke propone un primer modelo vibratorio para la luz en 1667. Luego Huygens desarrolla la teoría ondulatoria y a partir de la misma explica la refracción y reflexión de la luz, con lo cual la misma queda firmemente establecida. El electromagnetismo unificado por Maxwell, le da una forma matemática a la “vibración luminosa” de Huygens.

Es importante destacar que los modelos ondulatorio y corpuscular de la luz se eran considerados mutuamente excluyentes hasta comienzos del siglo XX.

iii. El Principio de la Relatividad y la transformación Galileana de velocidades.

La afirmación de que las leyes físicas deben ser las mismas en todos los referenciales inerciales, se conoce habitualmente como Principio de la Relatividad. Esta afirmación se remonta a los primeros trabajos sobre cinemática de Galileo y luego Newton.

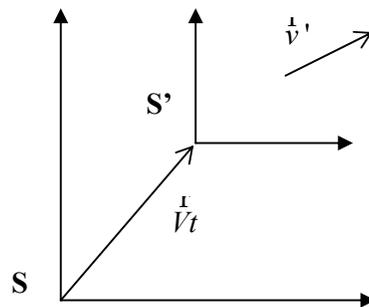


Figura 1

Si, como muestra la Figura 1, un referencial \mathbf{S}' se desplaza con cierta velocidad \vec{V} (supuesta constante²) en otro referencial \mathbf{S} , la transformación que vincula sus coordenadas es

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V}t \\ t' &= t \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde se ha supuesto que el origen de ambos sistemas coincide a $t=0$ y que el tiempo es absoluto, es decir no depende del referencial. Esto implica una transformación de velocidades

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (1.2)$$

que se conoce como la transformación Galileana de velocidades (TG).

Como es sabido, las leyes de la Mecánica Clásica son invariantes bajo la transformación (1.1). En el Práctico 1 se plantea verificar esto para un ejemplo concreto de un sistema de partículas interactuantes. Cuando una teoría o ecuación, adopta la misma forma bajo cierta transformación de coordenadas $(x, y, z; t) \leftrightarrow (x', y', z'; t')$, se dice que es **covariante** bajo la misma.

Sin embargo, las leyes del electromagnetismo **no son** covariantes bajo la transformación Galileana de coordenadas (1.1). En efecto, en el Práctico 1 se

² Nos limitamos a discutir situaciones en las no hay aceleraciones entre los referenciales de interés. De esto trata la *Teoría de la Relatividad Especial o Restringida*.

verificará que si una componente cualquiera del campo electromagnético, $f(\vec{r}', t')$, satisface la ecuación de ondas en el sistema S' ,

$$\left[\nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right] f(\vec{r}', t') = 0 \quad (1.3)$$

entonces, bajo la transformación (1.1), la ecuación se transforma en

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \vec{V} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\vec{V} \cdot \nabla)(\vec{V} \cdot \nabla) \right] f(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.4)$$

que no tiene la misma forma que (1.3), salvo si $\vec{V} = 0$.

iv. Implicancias de la no covarianza del electromagnetismo.

De acuerdo a lo anterior, existe un referencial (S') donde la ecuación que satisface una onda electromagnética es especialmente sencilla, es decir de la forma (1.3). Es más, de acuerdo a la teoría de Maxwell, la velocidad de fase $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ aparece relacionada con las propiedades eléctricas del medio (permeabilidad magnética y permitividad eléctrica) en el cual se propaga la onda. En realidad, esto no es sorprendente, dado que era la situación habitual con todas las ondas conocidas hasta el momento (ondas mecánicas en medios materiales). Sus ecuaciones de no eran covariantes, dado que existía un referencial privilegiado para describir la onda: el referencial solidario con el medio en el cual la misma se propaga.

Por lo tanto, se razonó a fines del siglo XIX, debe existir un medio en el cual se propaga la onda electromagnética y en el cual la descripción de su propagación es especialmente sencilla. Este medio debía tener propiedades muy especiales:

- Debe permear todo el espacio, dado que la luz de las estrellas lejanas llega a la tierra.
- Teniendo en cuenta que la velocidad de la luz es altísima (del orden de 300000 km/s) y que la relación entre la velocidad de propagación de una onda y las propiedades del medio es de la forma $v: \sqrt{T/\rho}$, donde T es la tensión restauradora del medio y ρ su densidad, se concluye que el medio debería ser muy tenue pero a la vez ejercer una gran tensión restauradora.
- El hecho de que este medio nunca fuera percibido refuerza la idea de que deber ser extremadamente tenue.

Se denominó éter a este medio sutil y se intentaron desarrollar, sin éxito, diversas teorías mecánicas sobre su funcionamiento y estructura. Todo esto a pesar de que existía evidencia empírica en contra de su existencia.

b) Evidencia empírica contra el concepto de éter

i. Aberración Estelar.

La Aberración estelar³ es el hecho conocido de que un telescopio deber ser orientado formando un cierto ángulo con respecto a la posición real de una estrella, para que su luz llegue al objetivo. Esto es debido al movimiento relativo entre la tierra y la estrella.

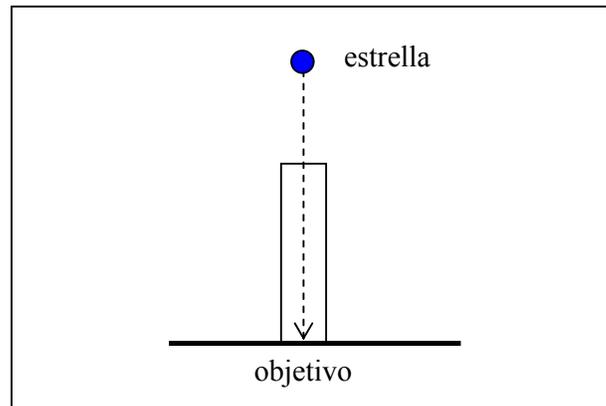


Figura 2a: Sin movimiento relativo.

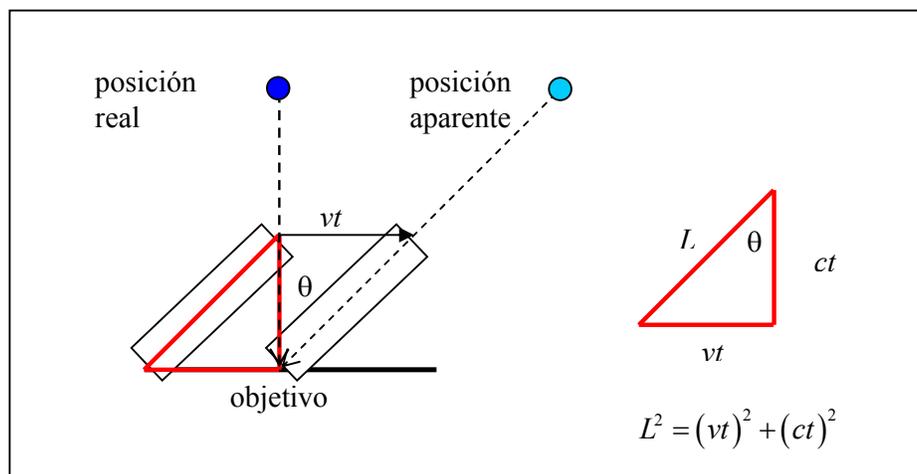


Figura 2b: Con movimiento relativo.

Como se muestra en la Figura 2b, hay que orientar el telescopio en un ángulo θ con la posición real de la estrella, para que la luz impacte en el

³ El efecto fue notado por primera vez por J. Bradley en 1728.

objetivo y no en las paredes del telescopio. Un cálculo elemental muestra que $\tan \theta = \frac{v}{c} \equiv \beta$.

La velocidad de la tierra con respecto a las estrellas lejanas tiene varias componentes (la de rotación día-noche, la de traslación orbital, la del sol con respecto al centro de la galaxia, la de la galaxia...). La velocidad dominante es la debida a la rotación terrestre en torno al sol (unos 30 km/s). De acuerdo con esto, la posición aparente de la estrella describe una circunferencia de diámetro angular $2v/c: 2 \times 10^{-4} \text{ rads} \approx 41''$, un efecto claramente observable con la tecnología de la época.

Las teorías del éter que suponían que el mismo tendría cierta viscosidad y sería “arrastrado” por la tierra quedaban descartadas por la aberración estelar. Existe una velocidad relativa entre la tierra y el medio en el cual se propaga la luz.

ii. Experiencia de Michelson-Morley.

Dado que, como muestra la aberración estelar, el éter no podía ser “arrastrado” por la tierra, los efectos del movimiento terrestre a través del “viento de éter” deberían poder ser detectados. Ya en 1881 Michelson diseñó un experimento de interferometría específicamente con este fin, sin llegar a resultados concluyentes. En 1887, repitiendo la experiencia junto con Morley, demuestra en forma concluyente que el efecto esperado del “viento de éter” no se observa. El interferómetro de Michelson-Morley se muestra en la Figura 3.

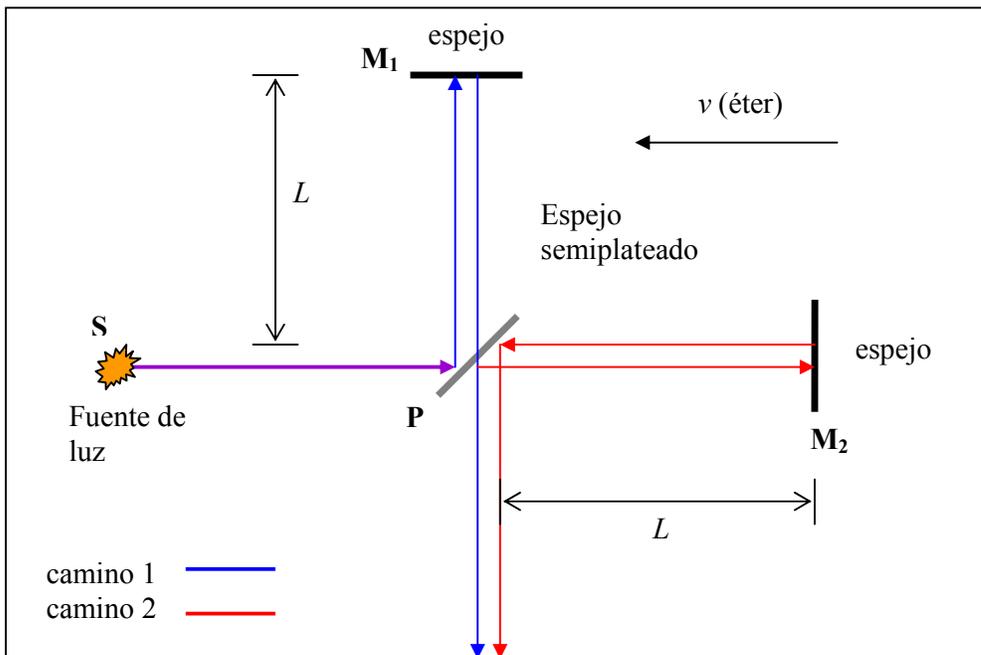


Figura 3: Esquema del interferómetro de Michelson-Morley.

Una fuente de luz S emite un haz que es dividido en dos en el espejo P. Una parte del haz (azul) se refleja en el espejo M1 y retorna a atravesar el espejo P. La otra parte del haz (roja) se refleja en el espejo M2 y se desvía en P. En la etapa final, los dos haces interfieren debido a la diferencia de recorridos ópticos y el patrón de interferencia es observado.

Los brazos del aparato tienen ambos el mismo largo L son perpendiculares entre si. Todo el aparato, solidario a la tierra, se desplaza con la velocidad v con respecto al éter. Supongamos que uno de sus brazos (PM_2) esta alineado con v y el otro (PM_1) es perpendicular a v. La diferencia de recorrido óptico es, en éste caso, la diferencia entre la distancia recorren ambos rayos. Calcularemos esta diferencia de caminos Δ . La separación entre dos franjas de interferencia corresponde a una diferencia de camino óptico igual a una longitud de onda. Por lo tanto, para una diferencia Δ , los máximos de interferencia aparezcan desplazados una distancia a

$$a = \frac{d}{\lambda} \Delta \quad (1.5)$$

donde d es la distancia entre dos máximos en la pantalla y λ la longitud de onda de la luz utilizada.

Para calcular $\Delta = d_1 + d_2$ analizamos el recorrido de cada rayo desde el referencial "privilegiado" del éter, con respecto al cual la luz tiene velocidad c. La Figura 4a muestra el recorrido PM_1P del rayo 1 (azul) visto desde éste referencial.

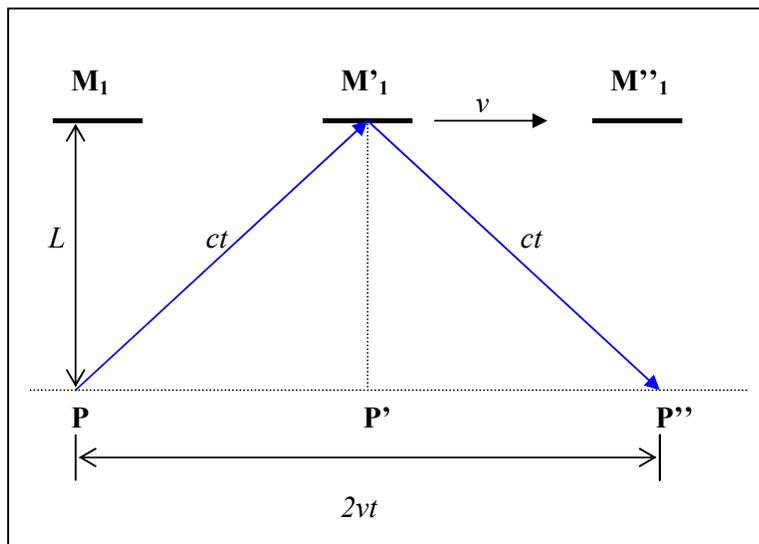


Figura 4a: trayectoria del rayo 1 vista desde el éter.

Se cumple $(ct)^2 = L^2 + (vt)^2 \Rightarrow t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$, por lo que el recorrido 1 es

$$d_1 = 2ct = 2\gamma L \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad (1.6)$$

El recorrido del otro rayo (2), visto desde el éter, se muestra en la Figura 4b.

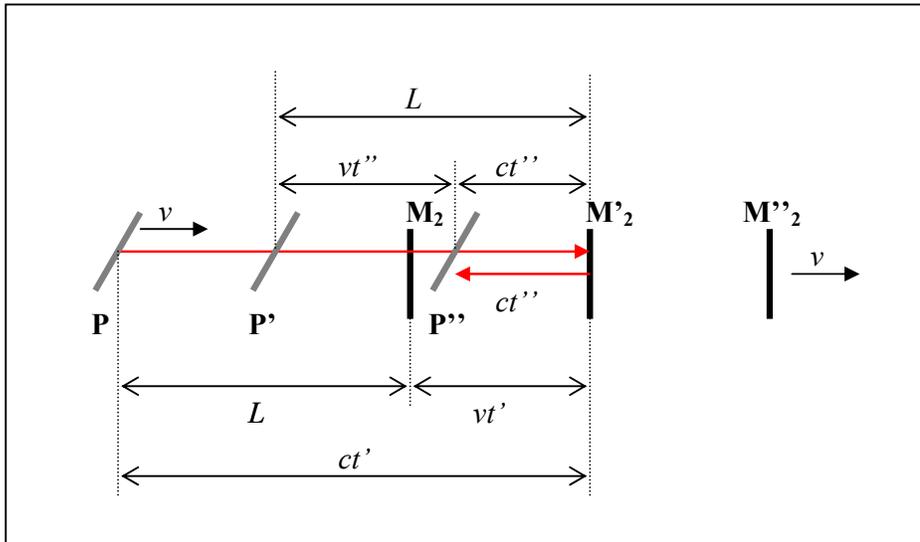


Figura 4b: Trayectoria del rayo 2 vista desde el éter.

Los espejos se desplazan hacia la derecha con velocidad v . En un tiempo t' , el rayo sale del espejo **P** y alcanza el espejo **M'₂** (tiempo de ida). En un tiempo t'' , el rayo sale reflejado del espejo **M'₂** y encuentra al espejo **P''** (tiempo de retorno). Se cumple $ct' = L + vt'$ y $L = (c + v)t''$, por lo que la distancia total recorrida es

$$d_2 = c(t' + t'') = \frac{cL}{c - v} + \frac{cL}{c + v} = 2\gamma^2 L. \quad (1.7)$$

Finalmente, la diferencia entre ambos recorridos es

$$\Delta = d_2 - d_1 = 2L\gamma(\gamma - 1). \quad (1.8)$$

Para maximizar el efecto, se rota el aparato 90° y se realiza el experimento con los papeles de los recorridos 1 y 2 invertidos, obteniéndose un desplazamiento Δ de las franjas en la otra dirección, lo cual se tiene en cuenta introduciendo un factor 2 adicional en (1.8). El desplazamiento esperado (expresado como fracción de la separación entre máximos consecutivos d) es

$$\frac{a}{d} = \frac{2\Delta}{\lambda} = \frac{4L\gamma(\gamma - 1)}{\lambda} \approx 0,37 \quad (1.9)$$

lo cual sería observable. La ecuación (1.9) fue evaluada con los valores típicos $L=11m$, $v=30 \text{ km/s}$, $c=300000 \text{ km/s}$, $\lambda=5900 \text{ \AA}$. Al rotar el aparato, las franjas deben desplazarse del orden de $1/3$ de la separación entre ellas.

El aparato de Michelson y Morley de 1887 podía apreciar corrimientos de hasta $1/100$ de la separación entre máximos. El corrimiento esperado es de unas 40 veces este valor, de modo que el resultado negativo es concluyente: no hay desplazamiento de la tierra en el éter.

Con posterioridad a la experiencia de 1887 se realizaron muchos otros intentos mas refinados para detectar los efectos del viento de eter, siempre con resultados negativos. Esto se resume en el cuadro que sigue:

DIVERSAS REALIZACIONES DEL EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY*

<i>Observador; año</i>	<i>l, cm.</i>	δ_{refl}	δ_{obs}	<i>(límite superior)</i>	<i>Razón</i>
Michelson; 1881	120	0,04		0,02	2
Michelson y Morley; 1887	1100	0,40		0,01	40
Morley y Miller; 1902-1904	3220	1,13		0,015	80
Miller, 1921	3220	1,12		0,08	15
Miller; 1923-1924	3220	1,12		0,03	40
Miller (luz solar); 1924	3220	1,12		0,014	80
Tomaschek (luz estelar); 1924	860	0,3		0,02	15
Miller; 1925-1926	3200	1,12		0,08	13
Kennedy; 1926	200	0,07		0,002	35
Illingworth; 1927	200	0,07		0,0004	175
Piccard y Stahl; 1927	280	0,13		0,006	20
Michelson y otros; 1929	2590	0,9		0,01	90
Joos; 1930	2100	0,75		0,002	375

* De una revisión llevada a cabo por Shankland y otros. *Rev. Mod. Phys.*, 27, 167 (1955).

iii. Las opciones disponibles en el 1900

¿Cuáles son las opciones disponibles para un físico de fines del siglo XIX con respecto al problema de la no covarianza de la ecuación de ondas electromagnética bajo las TG?

Opción 1:

El Principio de la Relatividad es general y las ecuaciones de Maxwell son incorrectas. La “verdadera” teoría electromagnética debe ser covariante bajo las transformaciones de Galileo. ¿Porqué entonces no se conoce ningún experimento que indique que las ecuaciones de Maxwell son inadecuadas? ¿Por qué las ondas electromagnéticas se comportan diferente a las demás, que tienen un referencial privilegiado en aquel fijo al medio en que se propagan?

Opción 2:

El Principio de la Relatividad no es general. Vale para la Mecánica pero no para el Electromagnetismo. Existe un referencial privilegiado (fijo al éter) donde la ecuación de ondas adopta una forma especialmente sencilla. ¿Porqué entonces la experiencia de Michelson-Morley da un resultado negativo?

Opción 3:

El Principio de la Relatividad es válido, pero las transformaciones de Galileo y la Mecánica Clásica no lo son. Existen otras transformaciones, bajo las cuales la Teoría Electromagnética es covariante. La Mecánica “verdadera” debe ser covariante también bajo estas transformaciones. Esto implica nada menos que adoptar una nueva concepción de tiempo y espacio. ¿Porqué entonces no hay experimentos que cuestionen a la Mecánica clásica ?

El genio de Einstein frente a sus contemporáneos, fue reconocer la Opción 3 como la correcta y seguir sus implicancias hasta el final. La transformación de coordenadas que deja invariante la ecuación de ondas había sido obtenida antes de 1900 por Lorentz, pero dado que no dejaba invariante a la Mecánica se le prestó poca atención. Einstein reconoció que al reformular los conceptos de tiempo y espacio, era indispensable reescribir la Mecánica.

En 1905, Einstein publica sus conclusiones en su famoso trabajo “[Sobre la Electrodinámica de los cuerpos en movimiento](#)”, donde desarrolla toda la Teoría Especial de la Relatividad de modo incuestionable.

En el cuadro adjunto resumimos las características principales de las tres alternativas.

Opción	Principio de la Relatividad	Transformaciones de Galileo (TG)	Mecánica Clásica	Electromagnetismo	Problema
1	Vale para toda la Física	OK	OK. Es covariante bajo las TG	Incorrecta. La "verdadera" teoría debería ser covariante bajo las TG.	No hay evidencia experimental contra el electromagnetismo. La síntesis de Maxwell fue el último gran logro de la Física del siglo XIX.
2	Sólo vale para la Mecánica	OK	OK, es covariante bajo las TG	OK. No es covariante bajo las TG, como todos los otros fenómenos ondulatorios conocidos. Existe un referencial privilegiado fijo al "éter" donde la ecuación de ondas es especialmente simple.	No se logra detectar al éter en experiencias diseñadas para ello.
3	Vale para toda la Física	Incorrectas. Las "verdaderas" transformaciones (TL) deben dejar invariante el electromagnetismo.	Incorrecta. No es covariante bajo las TL.	OK. Es covariante bajo las Transformaciones de Lorentz (TL). No hay éter, ni referencial privilegiado.	Implica: Un nuevo concepto de tiempo y espacio. Reformular la Mecánica Clásica. Resolver el problema de la velocidad de la luz en el vacío.

2. El Postulado de Einstein

Habiendo elegido el camino de preservar el Principio de la Relatividad aun a costa de las transformaciones galileanas y de la Mecánica Clásica, Einstein toma como punto de partida de su nueva teoría una afirmación anti-intuitiva relativa a la propagación de la luz.

La velocidad de la luz en el vacío tiene el mismo valor en todos los referenciales inerciales.

En esto, la luz se comporta diferente a una onda mecánica, para la cual la velocidad depende de la velocidad relativa entre el sistema de referencia y el medio de propagación. En el referencial propio, en cual el medio está en reposo, la descripción de una onda acústica es especialmente sencilla. Sin embargo, si admitimos que la luz se propaga en el vacío, sin un medio material de por medio, el Postulado adquiere más sentido: La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los referenciales inerciales y no hay un referencial privilegiado para las ondas electromagnéticas.

Aún así, el Postulado de la constancia de la velocidad de la luz fue muy resistido en su época⁴, sobre todo porque destruye de un plumazo las bases de la Mecánica Clásica.

En este apartado introducimos los diagramas de Minkowski como herramienta para visualizar los procesos en el espacio-tiempo y obtenemos las relaciones entre las coordenadas de dos sistemas inerciales (las Transformaciones de Lorentz) a partir del postulado de Einstein.

a. Diagramas de Minkowski.

El diagrama de Minkowski se utiliza para representar eventos en el espacio tiempo. En rigor, deberían representarse puntos en un espacio de 4 dimensiones $(x,y,z; ct)$, pero para simplificar usaremos diagramas bidimensionales $(x; ct)$, como el indicado en la Figura 5a.

Representaremos los siguientes eventos en el diagrama:

- **(E₁)** En $t=0$, se dispara un pulso luminoso desde el punto medio **C** de un segmento **AB** de largo L_0 (esto puede corresponder a un foco encendido en el centro **C** de una sala).
- **(E_{2A})** El pulso luminoso alcanza el extremo izquierdo (**A**) de la sala.
- **(E_{2B})** El pulso luminoso alcanza el extremo derecho (**B**) de la sala.

Se llama “línea del mundo” a la trayectoria de un punto espacial en el espacio-tiempo. En primer lugar, notamos que las líneas del mundo de los extremos de la sala (**A**) y (**B**), al ser puntos estacionarios en **S**, se describen como rectas verticales. Las líneas del pulso luminoso originado en **C**

⁴ Véase: *Resource Letter on Relativity*, American Journal of Physics **30**, p. 462 (1962).

corresponden a dos rectas de pendientes ± 1 . La línea del mundo de una partícula que se desplaza con velocidad $v = \frac{dx}{dt} = \beta c$ es una recta de pendiente $\left| \frac{cdt}{dx} \right| = \frac{1}{\beta} \geq 1$. En el ejemplo (Figura 5a) el pulso llega a los extremos de la sala simultáneamente en $t=t_A=t_B$.

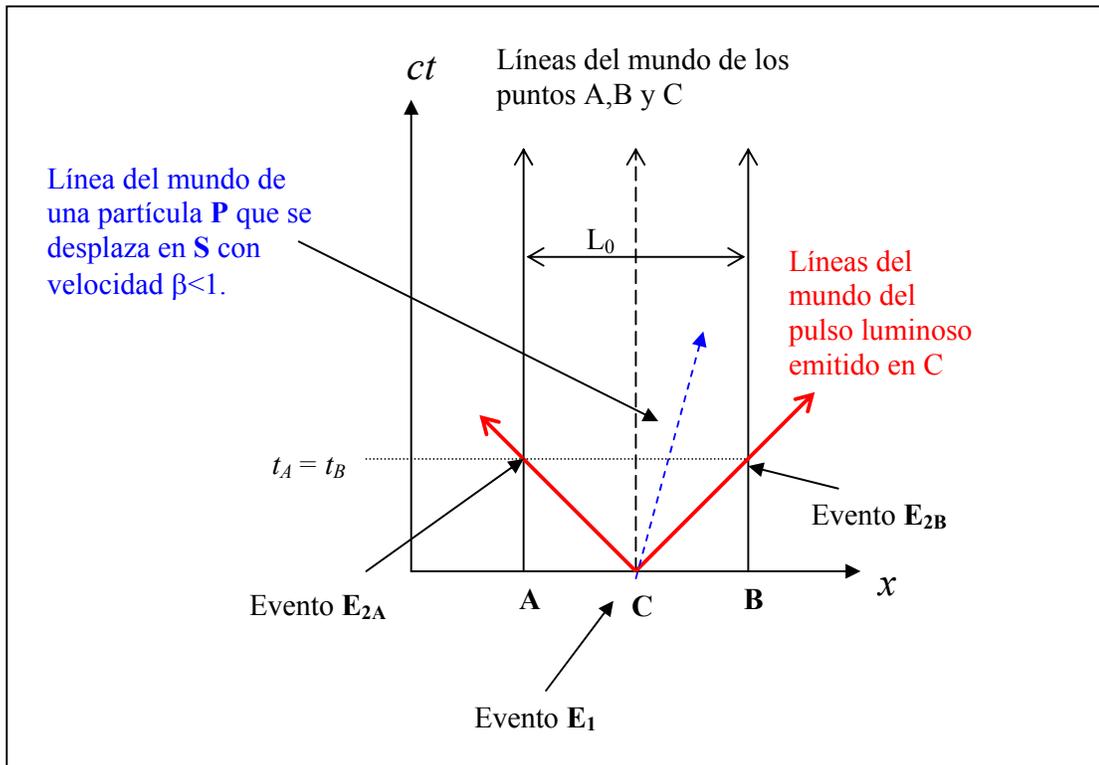


Figura 5a: Diagrama de Minkowski. Sistema S.

Supongamos ahora que la barra **AB** se desplaza en **S** con velocidad β . Elegimos centrar S en el punto medio de la barra ($O=C$) por simplicidad. En $t=0$ se dispara el pulso luminoso desde el punto medio **C**.

¿Como se ven los mismos eventos (E_1 , E_{2A} , E_{2B}) observados desde **S** y desde un sistema **S'** solidario con la partícula **P** que se desplaza en **S** con velocidad β ?

Lo primero es ubicar los ejes de **S'** en **S**. Suponiendo que en $t=0$, los orígenes de ambos sistemas coinciden (en el medio de la barra), la línea del mundo del origen O' de **S'** es una recta por **O** con pendiente $1/\beta$. Esto ubica el eje $O'ct'$, en **S**. Por otro lado, los eventos E_{2A} , E_{2B} son simultáneos en **S'** (el sistema propio de la barra, la barra **AB** está en reposo en **S'**, la situación es básicamente la descrita en la Figura 5a.)

Las líneas del mundo de **A** y **B** son rectas de pendiente $1/\beta$. Los eventos E_{2A} y E_{2B} , simultáneos en **S'**, están dados por los cortes de estas líneas con el

cono de luz emitido en **C**. Esta es la dirección de las rectas $ct'=cte$. Entonces, la dirección del eje $O'x'$ ($ct'=0$) está dada por éstos puntos de corte.

Note que los eventos E_{2A} y E_{2B} son simultáneos en S' pero no en S , donde E_{2A} ocurre antes que E_{2B} . La **relatividad de la simultaneidad** es un primer efecto cinemático del movimiento de la barra y la constancia de la velocidad de la luz.

Note también que la barra (de largo en reposo o largo propio L_0), tiene una longitud diferente vista por S . En efecto, la longitud $L=AB$ es menor que la longitud propia (distancia en S' entre los eventos E_{2A} y E_{2B}). Este es otro efecto cinemático (la contracción de Lorentz) del movimiento de la barra y la constancia de la velocidad de la luz.

Para pensar:

El eje ct' de S' tiene pendiente $1/\beta$ en S . Mostrar:

- a) que el eje $O'x'$ tiene pendiente β .
- b) que el ángulo θ entre los ejes esta dado por

$$\tan \theta = \frac{1 - \beta^2}{2\beta}$$

de modo que para $\beta \rightarrow 1 \Rightarrow \theta \rightarrow 0$ y los ejes de S' se hacen mas

oblicuos hasta coincidir en la recta de pendiente 1. Por el contrario, si

$$\beta \rightarrow 0 \text{ entonces } \theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ y } S' \text{ es ortogonal y coincide con } S.$$

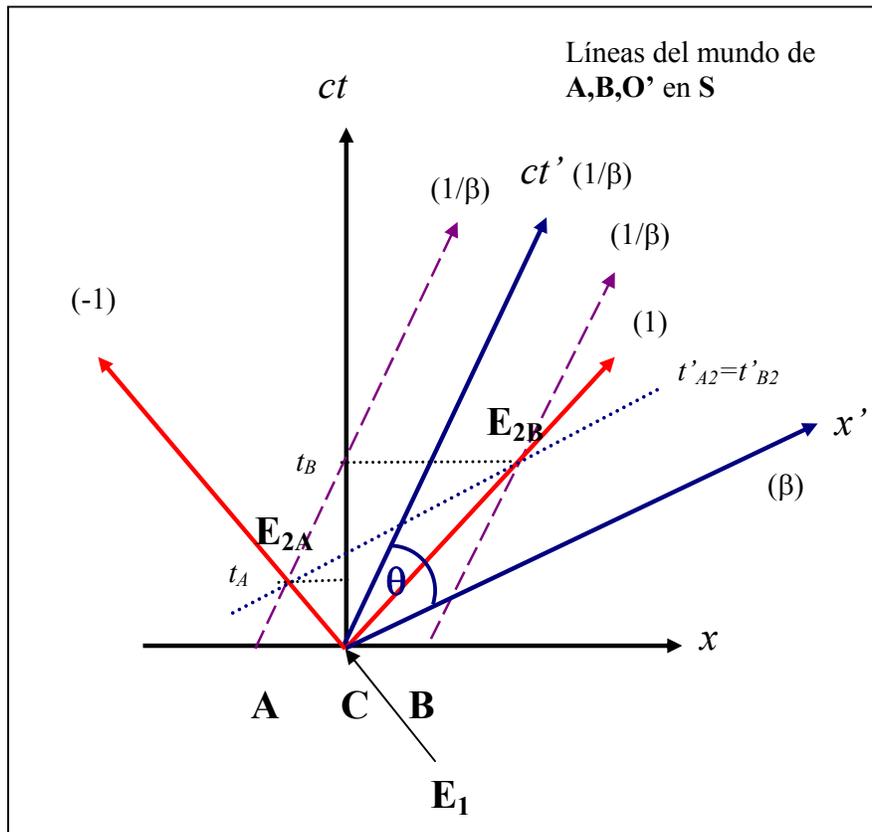


Figura 5b: Barra **AB** en movimiento en **S**. Sistema **S'** solidario a la barra. Los eventos E_{2A} y E_{2B} son simultáneos en S' pero en S E_{2A} precede a E_{2B} . Entre parentesis se indican las pendientes de las rectas.

La ecuación en **S** de la línea del mundo de su extremo **P** es

$$ct = \frac{1}{\beta}(x - L). \quad (1.11)$$

Por otra parte, consideramos la situación vista desde el sistema **S'** solidario a la regla⁵ donde la línea del mundo del extremo **P** es simplemente,

$$x' = L_0. \quad (1.12)$$

El cociente de ambas ecuaciones es una constante que sólo depende de la velocidad β ,

$$\frac{x - \beta ct}{x'} = \frac{L}{L_0} = K(\beta) = \text{const.} \quad (1.13)$$

La razón entre el largo de la regla visto desde **S** y el largo propio de la regla es K . De acuerdo con el **Principio de la Relatividad**, las observaciones deben ser coincidentes desde todos los referenciales inerciales. Invirtamos los roles de **S** y **S'**, es decir supongamos ahora que **S** es el referencial propio de la regla y la misma es vista desde un referencial **S'** que se desplaza con respecto a **S** con velocidad β . Esta situación se muestra en la Figura 6b. El largo visto por **S** será L_0 (largo propio de la regla) y el largo visto por **S'** será L y de acuerdo al Principio de la Relatividad, se mantiene inalterada la razón $K=L/L_0$. La ecuación en **S'** de la línea del mundo de **P** corresponde a la de una partícula que se desplaza con velocidad $-\beta$ y es

$$ct' = -\frac{1}{\beta}(x' - L) \quad (1.14)$$

en tanto que, desde **S**, la línea del mundo de **P** es simplemente

$$x = L_0. \quad (1.15)$$

Nuevamente, el cociente entre ambas ecuaciones es la constante K

$$\frac{x' + \beta ct'}{x} = \frac{L}{L_0} = K(\beta) = \text{const.} \quad (1.16)$$

La simetría existente entre las ecuaciones (1.11-1.13) y (1.14-1.16) es una manifestación del Principio de la Relatividad. Se pueden obtener unas de otras realizando los reemplazos $x' \leftrightarrow x$, $t' \leftrightarrow t$, $\beta \leftrightarrow -\beta$. Rescribimos la línea del mundo de **P**, ecuaciones (1.13) y (1.16), como

$$\begin{aligned} x - \beta ct &= Kx' \\ x' + \beta ct' &= Kx. \end{aligned} \quad (1.17)$$

⁵ En $t=t'=0$, los orígenes **O** y **O'** de ambos sistemas coinciden.

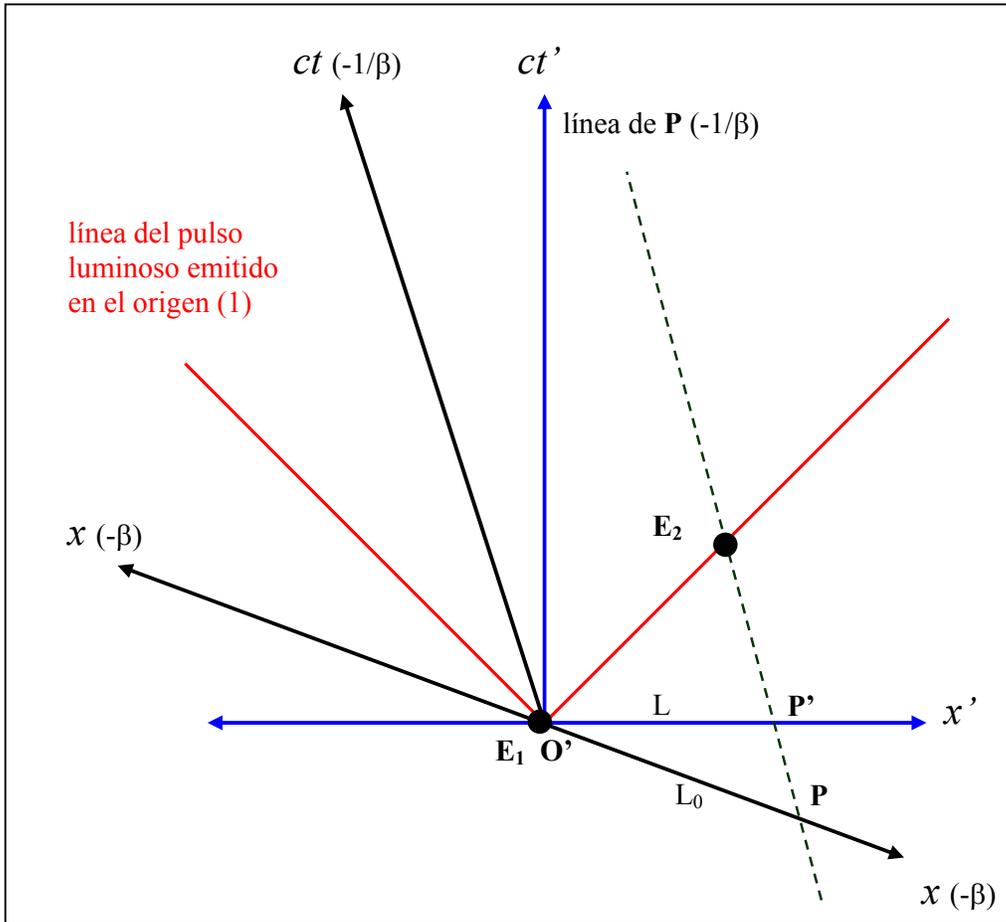


Figura 6b: La regla **OP** está fija en **S**. La situación se observa desde **S'**, donde el sistema **S** (y la regla) se desplazan a la izquierda con velocidad $-\beta$. El pulso de luz se emite en $t'=0$ en el origen (evento E_1) y luego alcanza a **P** (evento E_2).

Para completar las reglas de transformación falta determinar la constante K . Para ello, utilizamos el Postulado de Einstein: un pulso de luz se desplaza con velocidad c visto desde cualquier referencial. Consideramos el evento $E_1 =$ *emisión de un pulso luminoso en el origen*. Las líneas del mundo de este pulso serán, en cada sistema,

$$\begin{aligned} x &= ct \text{ en } S \\ x' &= ct' \text{ en } S'. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Consideramos ahora el evento $E_2 =$ *el pulso luminoso alcanza al extremo **P** de la regla*. El evento E_2 está en la intersección de las líneas del mundo del punto **P** y del pulso luminoso, por lo que sus coordenadas satisfacen las ecuaciones (1.17) y (1.18). Sustituyendo las ecs. (1.18) en las ecs. (1.17), se obtiene

$$\begin{aligned} ct(1-\beta) &= Kct' \\ ct'(1+\beta) &= Kct. \end{aligned} \quad (1.19)$$

De estas últimas ecuaciones se eliminan los tiempos y resulta la expresión para la constante K ,

$$K = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}. \quad (1.20)$$

Finalmente, usando las ecs. (1.19) y teniendo en cuenta que no hay movimiento relativo en las direcciones y, z , se obtienen las Transformaciones de Lorentz,

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) & ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) & x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \end{aligned} \quad (1.21)$$

El segundo conjunto de ecuaciones son las Transformaciones inversas. Como ya se mencionó, se puede obtener un conjunto del otro usando la simetría $x' \leftrightarrow x$, $t' \leftrightarrow t$, $\beta \leftrightarrow -\beta$ en aplicación directa del Principio de la Relatividad.

En el caso en que la velocidad del referencial \mathbf{S}' en \mathbf{S} sea un vector $\hat{\beta}$ con orientación arbitraria, las Transformaciones de Lorentz (1.21) (en su versión directa) se generalizan a

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left(ct - \hat{\beta} \cdot \mathbf{r} \right) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\hat{\beta} \cdot \mathbf{r}) \hat{\beta} - \gamma \beta ct. \end{aligned} \quad (1.22)$$

c. Consecuencias Cinemáticas de las Transformaciones de Lorentz.

i) Cuadrivectores

Las TL son una transformación lineal entre las coordenadas de un evento representado por un punto (ct, x, y, z) en el espacio-tiempo.

Se puede asociar a este punto un vector de cuatro componentes:

$$\mathfrak{R} = (ct, \overset{\perp}{r}) = (ct, x, y, z) \quad (1.23)$$

donde $\overset{\perp}{r}$ es el vector posición en el espacio tri-dimensional usual⁶.

Podemos intentar extender la noción de vector cartesiano tridimensional al espacio de Minkowski. Consideremos dos 4-vectores

$\mathfrak{R}_A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ y $\mathfrak{R}_B = (b_0, b_1, b_2, b_3)$, entonces la cantidad

$a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ es la extensión directa del producto escalar cartesiano. Es fácil ver que esta cantidad no es invariante bajo las TL. Sin embargo, la cantidad $a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = a_0b_0 - \overset{\perp}{r}_A \cdot \overset{\perp}{r}_B$ sí lo es. Definimos entonces el **producto escalar entre dos 4-vectores** como

$$\mathfrak{R}_A \cdot \mathfrak{R}_B \equiv a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = a_0b_0 - \overset{\perp}{r}_A \cdot \overset{\perp}{r}_B \quad (1.24)$$

Esta cantidad escalar es invariante bajo las T.L, lo cual justifica extender el concepto de vector al espacio de Minkowski. Esto implica que la norma s de un 4-vector $\mathfrak{R} = (ct, \overset{\perp}{r}) = (ct, x, y, z)$ esta dada por

$$s \equiv \|\mathfrak{R}\| = (\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R})^{1/2} = \left[(ct)^2 - r^2 \right]^{1/2} = \left[(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \right]^{1/2} \quad (1.25)$$

Note que la cantidad s^2 puede ser negativa y por tanto s un número imaginario. La norma de un 4-vector no tiene otro significado físico que ser invariante bajo las T.L.

ii. Clasificación de intervalos de espacio-tiempo.

Consideramos dos eventos **A** y **B** en el espacio-tiempo, determinados por dos cuadrivectores

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_A &= (ct_A, \overset{\perp}{r}_A) \\ \mathfrak{R}_B &= (ct_B, \overset{\perp}{r}_B) \end{aligned} \quad (1.26)$$

A la separación entre estos eventos, se asocia el 4-vector diferencia $\mathfrak{R}_B - \mathfrak{R}_A$, cuya norma al cuadrado es

⁶ Recordamos que en el espacio euclideo, el producto escalar de dos vectores (y en particular la norma de un vector) es invariante bajo una rotación del sistema de referencia. Esta es la característica básica de un vector.

$$(\Delta s)^2 = \|\mathfrak{R}_B - \mathfrak{R}_A\|^2 = (ct_B - ct_A)^2 - \|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\|^2. \quad (1.27)$$

Esta norma al cuadrado es un invariante de Lorentz y por lo tanto permite caracterizar la separación entre los eventos de forma independiente del sistema de coordenadas. La norma al cuadrado puede ser positiva (separación temporal), negativa (separación espacial) o nula (separación lumínica). Analizaremos los tres casos.

Eventos con separación temporal: $(\Delta s)^2 > 0$

Para este tipo de eventos siempre se puede encontrar un referencial en el cual ocurran en el mismo punto. En efecto, supongamos que **A** precede a **B** en S , entonces $\Delta t \equiv t_B - t_A > 0$ y por ser la separación de tipo temporal (suponiendo $\Delta x > 0$, sin perder generalidad)

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0 \Rightarrow c\Delta t > \Delta x. \quad (1.28)$$

Las TL muestran que

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) > 0 & \forall \beta \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\Delta x}{c\Delta t}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Es decir que **A** precede a **B** en todos los referenciales inerciales (y por tanto es admisible una relación causal entre **A** y **B**) y que existe un referencial S' que se desplaza con b en S , en el cual los eventos **A** y **B** coinciden en el espacio.

Los eventos con separación de tipo temporal **admiten una relación causal**. Por ejemplo, pueden formar la línea del mundo de una partícula.

Para pensar:

Puede mostrar que si **A** precede a **B** en algún referencial, no existe un referencial S' (que se mueve con $\beta < 1$ en S) en el cual **B** preceda (o sea simultáneo con) a **A**?

Eventos con separación espacial: $(\Delta s)^2 < 0$

Si la separación entre dos eventos es de tipo espacial, siempre se puede encontrar⁷ un referencial S' en el cual se van simultáneos. En efecto, en este caso

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0 \Rightarrow c\Delta t < \Delta x \quad (1.30)$$

y, suponiendo $\Delta t > 0$, las TL muestran que

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) = 0 \Rightarrow \beta = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \\ \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) > 0 & \forall \beta \end{aligned} \quad (1.31)$$

⁷ Evidentemente, que se desplaza con velocidad menor o igual que la de la luz visto por S . Omitimos esta aclaración de aquí en mas.

Es decir que la distancia $L = \overline{AB} = \Delta x = x_B - x_A$ es positiva en todos los referenciales con $\beta < 1$ y se puede asociar la misma a una longitud física. Por otra parte, existe un referencial S' en el cual **A** y **B** son simultáneos e inclusive otros en los cuales **B** precede a **A**. Por lo tanto no se puede vincular a los eventos **A** y **B** causalmente en este caso.

Eventos con separación lumínica: $(\Delta s)^2 = 0$

En este caso los eventos pertenecen a la línea del mundo de una señal luminosa o una partícula que se desplaza con $\beta = 1$. En efecto,

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0 \Rightarrow c\Delta t = \Delta x. \quad (1.32)$$

Estas consideraciones se resumen en la **Figura 7**, donde se ubica el evento **A** en el origen de un diagrama de Minkowski y se consideran tres eventos **B**, **B'**, **B''** con separación temporal, espacial y lumínica con respecto a **A**.

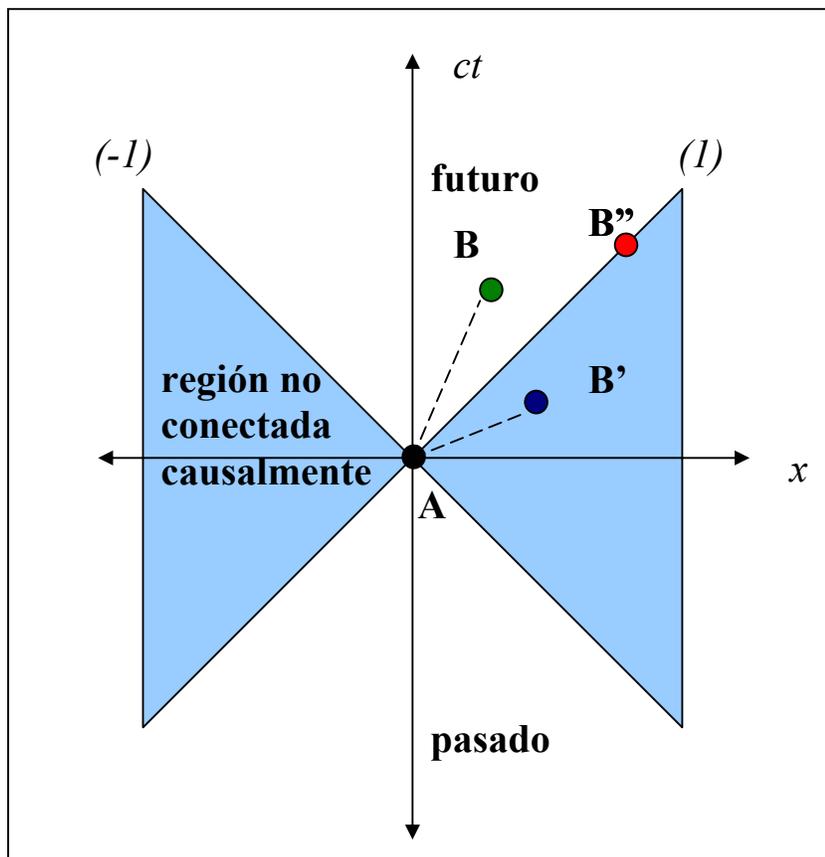


Figura 7: Tipos de separación entre dos eventos, tomando el evento **A** en el origen como referencia. La región blanca se denomina el "cono de luz" del evento **A**. Contiene a todos los eventos que pueden ser afectados por **A** (en el futuro) y a los que pueden afectar a **A** (en el pasado).

En la **Figura 7** se muestra el cono de luz con origen en **A**. En este cono se ubican todos los eventos **B** con separación lumínica. Estos eventos **A** y **B** solo se pueden conectar a través de señales luminosas.

Dentro del cono de luz se encuentran todos los eventos **B** que se pueden conectar causalmente con **A**. En el cono superior ($t > 0$) están los eventos precedidos por **A** (el futuro). En el cono inferior ($t < 0$) están los eventos **B** que preceden a **A** (el pasado).

Fuera del cono de luz, se encuentran los eventos que no se pueden conectar causalmente con **A**. La explosión de una supernova fuera del cono de luz de **A** jamás será percibida por un observador en **A**.

iii. Dilatación del tiempo propio.

Consideramos dos eventos que ocurren en un mismo punto de cierto referencial S' que se desplaza con velocidad β en S (por ejemplo, dos lecturas de un reloj fijo a S'). Vistos por S , los eventos tienen coordenadas (ct_A, x_A) y (ct_B, x_B) respectivamente. El intervalo de tiempo entre ellos es $\Delta t = t_B - t_A$ y el intervalo espacial es $\Delta x = x_B - x_A$.

¿Como se ve el intervalo desde el referencial propio de los eventos (S') en el cual su separación es nula?

Las transformaciones de Lorentz muestran que

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) = 0 \Rightarrow \Delta x = \beta c\Delta t \\ c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) = \gamma(1 - \beta^2)c\Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma}\end{aligned}\quad (1.33)$$

es decir que el intervalo de tiempo propio $\Delta t'$ aparece dilatado un factor γ cuando es visto por un observador en S . En general, se tiene

$$\boxed{\Delta t = \gamma\tau = \gamma\Delta t'} \quad (1.34)$$

donde τ es el intervalo de tiempo medido en el referencial propio de un evento puntual.

Este fenómeno se ha comprobado empíricamente con dos relojes atómicos idénticos muy precisos, poniendo uno de ellos a bordo de un avión que circunda la tierra a alta velocidad. Se obtienen diferencias en sus lecturas concordantes con (1.34).

Ejemplo:

El efecto de la dilatación del tiempo se comprueba a diario en los aceleradores de partículas. Un conjunto de N_0 partículas inestables decae siguiendo una ley exponencial de modo que el número de partículas que subsisten a tiempo t es,

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1.35)$$

donde τ , la constante de decaimiento, es la vida media de la partícula en reposo.

En el Fermilab se producen piones con energía $E=200$ GeV y el haz se transporta por 300 mts. Con pérdidas por decaimiento inferiores al 3%. La vida media de un pión es $\tau = 2.56 \times 10^{-8}$ s.

Los piones tienen una masa en reposo⁸ $mc^2 = 139.6$ MeV. Por tanto, con esta energía, su velocidad es esencialmente la de la luz y su factor γ es alto:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1.43 \times 10^3$$

A la velocidad de la luz, los piones demoran unos $\Delta t = d/c = 10^{-6}$ s en recorrer los 300 mts del acelerador. En ese tiempo, clásicamente decaería una fracción

$$f_{clas} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 1 - e^{-39.1} \approx 1$$

Es decir, prácticamente todos decaerían y el haz no llegaría a recorrer esa distancia!

Sin embargo, debido a la dilatación del tiempo propio, la vida media de los piones vista desde el laboratorio es mucho mayor: $\gamma\tau = 3.66 \times 10^{-5}$ s. La fracción que decae en el tiempo requerido para recorrer los 300 mts es entonces

$$f_{rel} = 1 - e^{-\frac{t}{\gamma\tau}} \approx 1 - e^{-0.027} \approx 0.027$$

es decir, menos de 3% de las partículas del haz decaen en esa distancia, de acuerdo a lo observado. El efecto es dramático debido a que el factor γ aparece en el exponente de la ley de decaimiento.

Iv. La contracción de Lorentz

La medida de la longitud de un objeto en reposo puede hacerse determinando las coordenadas espaciales de sus extremos sin preocuparse de que esto sea simultáneo. Es decir que, en el referencial propio del objeto, se

⁸ El concepto de masa en reposo y energía relativista se explica mas adelante.

mide una longitud propia $\Delta x' = L_0$, en tanto que el intervalo temporal $\Delta t'$ entre las medidas puede ser arbitrario, ya que el objeto está en reposo.

Por otra parte, si se desea medir la longitud $\Delta x = L$ de un objeto que se desplaza en relación a nosotros⁹ con velocidad β , es necesario determinar las coordenadas de los extremos en forma simultánea, es decir $\Delta t = 0$. De otro modo obtendríamos una medida errónea de su longitud, debido al desplazamiento de sus extremos en el intervalo de tiempo entre las medidas.

Recurriendo a las transformaciones de Lorentz obtenemos la relación entre las medidas de la longitud del objeto vista por S y por S' (referencial propio).

$$L_0 = \Delta x' = \gamma \left(\Delta x - \beta c \Delta t \right) = \gamma L$$

por lo que la longitud propia del objeto aparece contraída en un factor γ , debido al movimiento relativo:

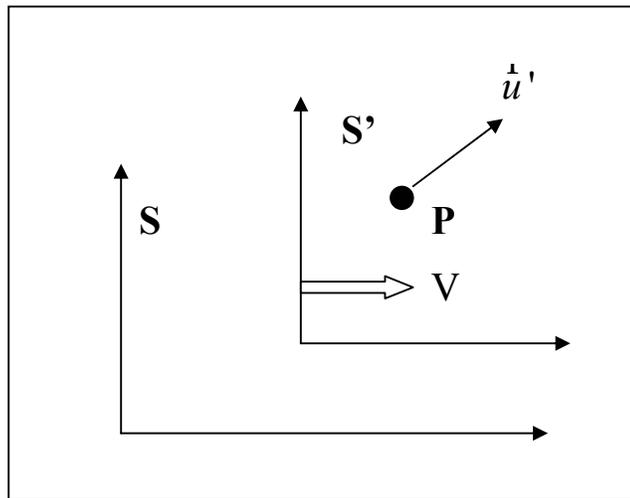
$$L = \frac{L_0}{\gamma} \tag{1.36}$$

Esta consecuencia de las transformaciones de Lorentz fue observada por Lorentz mucho antes de que Einstein diera forma a la teoría.

v. Transformación Relativista de velocidades

Consideramos una partícula P que se desplaza con cierta velocidad \dot{u}' en un referencial S'. A su vez, S' se desplaza en S con velocidad V en la dirección Ox. Esta situación se muestra esquemáticamente en la Figura 8.

¿Cual será la relación entre las componentes de la velocidad de la partícula en P vistas por S y por S'?



Es decir queremos

Figura 8: Adición relativista de velocidades.

⁹ Supondremos un desplazamiento en la dirección de la dimensión a medir. La generalización es inmediata.

generalizar la ley Galileana de transformación de velocidades $\vec{u} = \vec{V} + \vec{u}'$ al caso relativista.

Comenzamos por describir las transformaciones de Lorentz en forma diferencial

$$\begin{aligned} cdt' &= \gamma(cdt - \beta dx) \\ dx' &= \gamma(dx - \beta cdt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned} \quad (1.37)$$

donde $\beta = V/c$.

Las componentes de la velocidad en S' , en términos de las correspondientes en S , son entonces,

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \beta cdt}{dt - \beta dx/c} = \frac{u_x - \beta c}{1 - \beta u_x/c} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta dx/c)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \beta u_x/c)} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \beta dx/c)} = \frac{u_z}{\gamma(1 - \beta u_x/c)} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Estas ecuaciones son la transformación relativista de velocidades entre dos referenciales con movimiento relativo β según Ox . Observe que las componentes según Oy y Oz también se ven afectadas, debido al cambio en la percepción del tiempo.

Adición Relativista de velocidades

A partir de las ecuaciones (1.38) es fácil mostrar la ley relativista de adición de velocidades. Si una partícula se desplaza con β_2 a lo largo de Ox' en S' , mientras que S' se desplaza con velocidad β_1 a lo largo de Ox en S , (Figura 9) entonces la velocidad β de la partícula en S esta dada por

$$\boxed{\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}} \quad (1.39)$$

Es claro que si las velocidades son pequeñas (1.39) se reduce a la adición Galileana de velocidades $\vec{u} = \vec{V} + \vec{u}'$, en la notación anterior. Sin embargo, inclusive en el caso en que $\beta_1 \rightarrow 1$ y $\beta_2 \rightarrow 1$ la velocidad

compuesta de acuerdo con (1.39) no supera la velocidad de la luz, en acuerdo con el Postulado de Einstein.

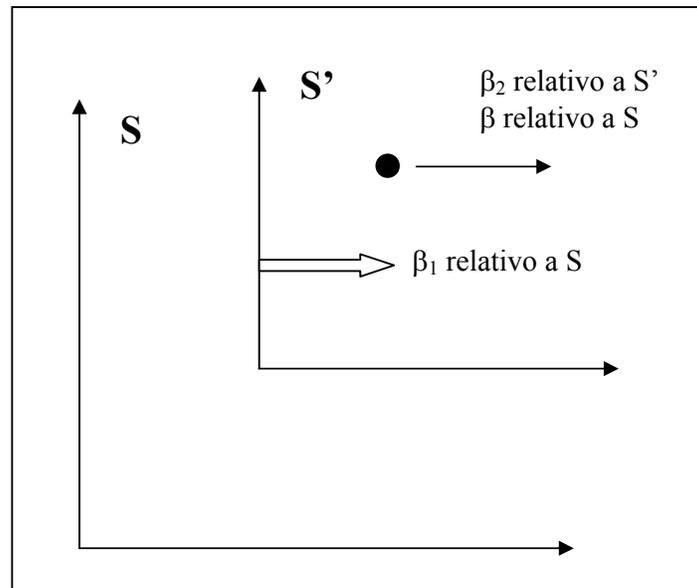


Figura 9: Adición relativista de velocidades (caso unidimensional)

3. Dinámica Relativista

a) 4-vector velocidad y cantidad de movimiento.

Consideremos un 4-vector $R = (ct, \mathbf{r})$ que describe la posición de una partícula en cierto instante t . Es natural construir, a partir de su variación diferencial $dR = (cdt, d\mathbf{r})$, el objeto de cuatro componentes

$$\frac{dR}{dt} = \left(c \frac{dt}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = (c, \mathbf{v}) \quad (1.40)$$

como la extensión de la velocidad al espacio de Minkowski. Sin embargo, la norma del objeto definido por (1.40) no es un invariante¹⁰, por lo que este objeto no es un 4-vector.

Si bien dR si es un 4-vector (por la linealidad de las TL) el intervalo de tiempo dt no es un invariante. Podemos construir un 4-vector a partir de dR multiplicando por algún invariante relativista adecuado. El tiempo propio es el candidato ideal. Un intervalo de tiempo propio se relaciona con un intervalo en S como $dt = \gamma d\tau$.

Se define el **4-vector velocidad** como

$$V = \frac{dR}{d\tau} = \gamma \frac{dR}{dt} = \gamma (c, \mathbf{v}) \quad (1.41)$$

donde γ está asociado a la velocidad v de la partícula. Este objeto si es un 4-vector y es sencillo verificar que su norma es el invariante c .

Con esta definición, el 4-vector cantidad de movimiento se obtiene de inmediato a partir de la definición clásica $p = mv$. En efecto, definimos

$$P = mV = (\gamma mc, \gamma \mathbf{p}) \quad (1.42)$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento no relativista de la partícula. La expresión (1.42) es un 4-vector porque la hemos obtenido multiplicando el 4-vector velocidad por un invariante relativista: la masa en reposo m de la partícula. La norma invariante del 4-vector P es simplemente mc .

Masa Relativista

Dado que la relación entre el vector cantidad de movimiento relativista y la velocidad es $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, es usual definir una “masa relativista” que depende de la velocidad como

$$m(v) = \gamma m. \quad (1.43)$$

¹⁰ Basta notar que la norma en S es $c^2 - v^2$, mientras que en el referencial propio de la partícula es c^2 .

Es decir que la masa relativista crece con la velocidad desde su valor en reposo hasta el infinito, cuando $v \rightarrow c$. Por esta razón, es imposible acelerar una partícula con masa en reposo no nula hasta la velocidad de la luz. Solo partículas sin masa (fotones, neutrinos o gravitones) se desplazan a esta velocidad.

b) Energía Relativista

El Principio de la Relatividad requiere que la Física sea la misma vista desde cualquier referencial inercial. En particular, deben seguir siendo válidos los Principios de conservación de la energía y cantidad de movimiento.

El Teorema del Trabajo y la Energía es una manifestación de la conservación de la energía. Relaciona la energía cinética que adquiere una partícula con el trabajo que se realiza para acelerarla. Este teorema nos permitirá definir la energía relativista.

Consideramos una partícula que se desplaza en la dirección Ox (por simplicidad) y sobre la cual actúa una fuerza que la acelera hasta velocidades comparables a la de la luz. Aplicaremos el Teorema del Trabajo y la Energía a este caso:

$$T = W = \int_0^{x_f} F dx = \int_0^{x_f} \frac{dp}{dt} dx = \int_0^{p_f} v dp = (pv)_0^f - \int_0^{v_f} p dv$$

Donde se ha usado la integración por partes. Si la partícula parte del reposo, se tiene

$$\begin{aligned} T &= p_f v_f - \int_0^{v_f} p dv = \gamma mc^2 \beta_f^2 - mc^2 \int_0^{\beta_f} (1 - \beta^2)^{-1/2} \beta d\beta = \\ &= \gamma mc^2 \beta_f^2 + mc^2 \left[\left(\sqrt{1 - \beta^2} \right) \right]_0^{\beta_f} = \gamma mc^2 \beta_f^2 + mc^2 \left[\sqrt{1 - \beta_f^2} - 1 \right] \\ &= (\gamma - 1) mc^2. \end{aligned}$$

Es decir que **la expresión relativista para la energía cinética** de una partícula de masa en reposo m y velocidad v es

$$\boxed{T_{rel} = (\gamma - 1) mc^2} \quad (1.44)$$

Para pensar:

Verifique que esta expresión se reduce al valor correcto, $mv^2/2$, si $v \ll c$.

El 4-vector energía.

Consideramos ahora el 4-vector Pc , obtenido multiplicando el 4-vector cantidad de movimiento por el invariante c . Este 4-vector tiene componentes

$$\mathcal{E} = Pc = \left(\gamma mc^2, \mathbf{p}_{rel} c \right) \quad (1.45)$$

La norma de este 4-vector es el invariante mc^2 y su componente 0 se es la **energía total** relativista de la partícula:

$$\boxed{E_{rel} = \gamma mc^2 = T_{rel} + mc^2} \quad (1.46)$$

Si la partícula se encuentra en reposo su energía no es nula, sino que es proporcional a su masa en reposo:

$$E_0 = mc^2 \quad (1.47)$$

Esta energía¹¹ es grande: para una masa de 1kg, corresponde a 9×10^{16} J lo cual equivale a varios años de operación de una central de generación de 30 MW! Este es el origen de la energía liberada por las reacciones nucleares.

A partir de la definición (1.46) se puede escribir el 4-vector energía como

$$\mathcal{E} = (E_{rel}, \mathbf{p}_{rel} c) \quad (1.48)$$

y en cualquier referencial S se cumple la relación invariante

$$E_{rel}^2 = p_{rel}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.49)$$

En caso de que la partícula no se encuentre libre sino que esté sometida a una fuerza conservativa $F = -dV/dx$, tendrá una energía potencial $V(x)$. En ese caso todas las relaciones anteriores son válidas con el reemplazo $E \rightarrow E + V(x)$.

c) Conservación de la Cantidad de Movimiento y la Energía

Estos dos Principios clásicos de conservación se convierten a nivel relativista en un único Principio: el de conservación del 4-vector P.

En efecto, este 4-vector puede expresarse como

$$P = (E_{rel}/c, \mathbf{p}_{rel}) \quad (1.50)$$

de modo que su conservación engloba a ambos principios.

Para un sistema de N partículas, la suma de sus 4-vectores P debe ser la misma antes y después de una interacción. Es decir que

$$\sum_{i=1}^N (P_i)_{antes} = \sum_{i=1}^N (P_i)_{despues} \quad (1.51)$$

donde cada partícula tiene asociado un 4-vector de la forma (1.50) y sus componentes satisfacen la relación (1.49).

¹¹ Esta constante mc^2 no afecta a las ecuaciones clásicas, debido a que clásicamente la energía se define a menos de una constante aditiva.

Ejemplo: Fotoproducción de un pión

Consideramos un fotón que incide sobre un protón en reposo. Como resultado se produce un pión y el fotón resulta acelerado.

Se conoce:

Energía del fotón incidente: $E_\gamma = p_\gamma c$

Energías en reposo del protón y del pión: mc^2 y $m_\pi c^2$.

Conservación de la energía:

$$E_\gamma + mc^2 = E_+ + E_\pi = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_+ c)^2} + \sqrt{(m_\pi c^2)^2 + (p_\pi c)^2}$$

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_+ + \vec{p}_\pi$$

o bien,

$$p_+^2 = p_\gamma^2 + p_\pi^2 - 2p_\gamma p_\pi \cos \theta$$

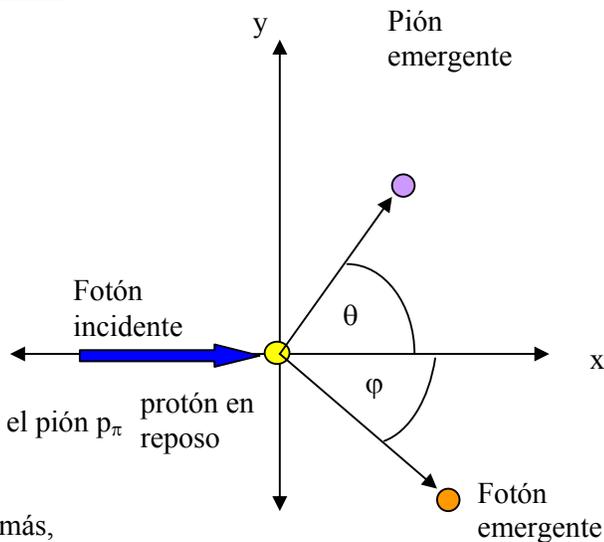
$$p_\pi^2 = p_\gamma^2 + p_+^2 - 2p_\gamma p_+ \cos \varphi$$

hay 4 Variables de salida:

cantidad de movimiento del fotón p_+ y el pión p_π
ángulos de salida con el eje Ox.

Fijando una de ellas se obtienen las demás,
A partir del sistema no lineal de tres ecuaciones.

Notar que la conservación de la energía muestra que la energía mínima para poder producir una partícula es igual a su masa en reposo.



*Notas elaboradas por el Prof. Gonzalo Abal
Agosto-Setiembre 2003.*

Enviar comentarios a abal@fing.edu.uy